O. BECKER

Fundamentele matematicii

510.2/B39

119.106
119.106

OSKAR BECKER
GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK
in geschichtlicher Entwicklung
VERLAG KARL ALBER FREIBURG
München

ÎN ROMÂNEȘTE DE
ALEXANDRU GIUCULESCU

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ROMÂNĂ DE
CORNELIU VILT

Oskar Becker

FUNDAMENTELE MATEMATICII

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
BUCUREȘTI 1968

COPERTA ŞI SUPRACOPERTA DE CONSTANTIN GULUŢĂ

PREFAŢĂ LA EDIŢIA ROMÂNĂ

> *Legendi sunt antiquorum libri, quoniam ingens beneficium est tot hominum laboribus nos uti posse: tum ut illa, quae iam olim recte inventa sunt, cognoscamus, tum etiam ut quaenam ulterius in omnibus disciplinis supersint excogitanda admoneamur.*
>
> DESCARTES, *Regulae*, III.

Cercetarea fundamentelor matematicii a apărut ca preocupare încă din antichitatea elenă, atît în sînul ştiinţelor matematice propriu-zise, ca o problemă de structură, cît şi, excedînd cadrul lor, ca o problemă impusă spiritului uman de considerarea filozofică a principiilor gîndirii ştiinţifice. *Elementele* lui Euclid, *Colecţiile matematice* ale lui Pappus din Alexandria, *Comentariile* lui Proclos, *Dialogurile* lui Platon şi *Organonul* lui Aristotel constituie documente revelatorii ale modului în care spiritul elen a întreprins această cercetare[1].

Matematica elenă însă, cu toată perfecţiunea sa, nu reprezintă decît o etapă — e drept, armonios închegată şi fundamentată logic şi metodologic. Evoluţia ulterioară a societăţii omeneşti, profundele transformări întîmplate în structura acesteia de-a lungul secolelor, generate şi stimulate în bună măsură de necesităţile practice, au determinat, inevitabil, şi o depăşire a orizontului matematic antic.

Reevaluînd creator bogatul tezaur al analizei vechilor geometri, secolul al XVII-lea al e.n. a deschis un nou orizont, acela al matematicilor moderne. Astfel Descartes a creat *Geometria analitică*, Leibniz — *Calculul infinitezimal*, Lagrange —

---

[1] Cf. Euclide, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, transl. from the text of Heiberg by Th. L. Heath, 2 ed., rev. 3 vol., Dover, New York, 1956.
Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, traduction, introduction et notes par Paul Ver Eecke, 2 vol. Blanchard, Paris, 1933.
Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. introd. et notes par Paul Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1948.
Platon, *Oeuvres complètes*, texte et traduction, Les Belles Lettres, Paris, 1930—1932.
Aristote, *Organon*, 6 vol. nouvelle traduction et notes par J. Tricot, Vrin, Paris, 1950.

Mecanica analitică ş.a.m.d. Secolul al XIX-lea a adăugat *Teoria mulţimilor* şi apoi *Topologia-analysis situs.*

Teoria mulţimilor ridica însă probleme: paradoxele logico-matematice descoperite de Burali-Forti, de Cantor, apoi de Bertrand Russell, Richard, Zermelo etc. şi, mai aproape de zilele noastre, de Gödel.

De aceea, începînd din secolul al XIX-lea, se produce o nouă reconsiderare a fundamentelor matematicii. Apar lucrările lui Helmholtz, Frege, Killing, B.Russell,[1] consacrate unei noi fundamentări a Geometriei şi Aritmeticii, impusă în parte şi de criza declanşată de Teoria mulţimilor. Urmează apoi, în plin secol al XX-lea, lucrările lui Poincaré, Zermelo, Weyl, Hilbert[2].

Concomitent cu acestea apar şi lucrări în care problema cercetării fundamentelor este privită în perspectiva evoluţiei istorice. Amintim între altele studiul lui M.Dehn, *Fundamentarea Geometriei în evoluţie istorică*, *Prelegerile* lui F.Klein şi, din cele mai recente, lucrarea lui Nicolas Bourbaki, *Elemente de istorie a matematicilor*, şi *Filozofia algebrei* a lui Jules Vuillemin[3].

---

[1] Cf. H. Helmholtz, *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Verh. d. naturw. med. Vereins, Heidelberg, 1868; idem, *The Axioms of Geometry*, The Academy, 1870; idem, *Über den Ursprung, Sinn und Bedeutung der geometrischen Sätze*, Wiss. Abh. 1878.

G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl (1884) — ed. şi trad. engl. de J. L. Austin, Blackwell, Oxford, 1953.

Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Padeborn, 1893.

Bertrand Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Dover, New York, 1956 (ed. I, 1897).

[2] Cf. H. Poincaré, *Les fondements de la Géométrie* (Oeuvres, 11 vol. Gauthier-Villars, Paris, 1916—1956); tom. XI; idem, *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.* (ibidem).

E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, I, 1908.

H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Transl. O. Helmer, 2nd. ed. Princeton, Un. Press, Princeton 1949.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7te Aufl. Teubner, Leipzig, 1930; idem, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, în „Math. Ann." LXXXVIII Band, 1923.

[3] Cf. M. Dehn, *Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung*, Anhang an Vorlesungen über neuren Geometrie de M. Pasch, 2te Auflage, Springer, Berlin, 1926.

F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, 2 vol., Springer, Berlin, 1926—1927.

N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 115, Boulevard Saint-Germain, Paris VI, 1960.

Jules Vuillemin, *La Philosophie de l'Algèbre*, Presses Universitaires de France, 108, Boulevard Saint-Germain, Paris, VI, 1962.

Apariția lor a fost precedată și de studii valoroase de istorie a matematicilor, dintre care merită să fie menționate lucrările lui H.G.Zeuthen și Th.Heath[1]. Același interes istoric a condus, de altfel, și la reeditarea principalelor opere ale celor mai de seamă matematicieni și gînditori ai antichității elene: Euclid, Arhimede, Pappus, Proclos, Platon, Aristotel[2].

Printre cei care au consacrat, în secolul al XX-lea, o laborioasă activitate cercetării problemelor de bază ale matematicii, precum și evoluției istorice a acestora, un loc important îl ocupă matematicianul, filozoful și lingvistul german Oskar Becker. După studii în care se resimte influența fenomenologiei lui Ed. Husserl[3] — ca de pildă, *Contribuții la o fundamentare fenomenologică a Geometriei și a aplicațiilor sale fizice*, *Existența matematică* (Cercetări asupra logicii și ontologiei fenomenelor matematice), *Valoarea și limita modului de gîndire matematic*[4] — Oskar Becker schițează în *Fundamentele matematicii*[5] un cuprinzător tablou al evoluției istorice a acestora.

Concepută pe dimensiuni mari, lucrarea prezintă principalele etape ale dezvoltării matematicii, începînd cu rudimentele de aritmetică, geometrie și algebră păstrate în tăblițele de lut ale culturii asiro-babiloniene și în papirusurile egiptene și încheind cu logicismul, formalismul și intuiționismul secolului al XX-lea.

---

[1] Cf. H. G. Zeuthen, *Die geometrische Konstruktion als Existenzbeweis in der antiken Geometrie*, în „Math. Ann.", Band 47, 1896; idem, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen, 1896; idem, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen-Âge*, Paris, 1902.
Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 2 vol., 1921.

[2] Cf. pentru Arhimede: *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. Paul Ver Eecke, Desclée-de-Brouwer, Paris-Bruxelles, 1921; pentru ceilalți autori, indicațiile bibliografice de la începutul acestei prefețe.

[3] Cf. Ed. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, Psychologische und logische Untersuchungen, Erster Band, Halle-Saale, 1891.

[4] Cf. Oskar Becker, *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen*, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung 6ter Band, Halle, 1923; idem, *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*, Jahrbuch f. Phyl. und phän. Forschung, 8ter Band, Halle, 1923; idem, *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise*, Studium universale, Karl Alber, Freiburg-München, 1959; cf., de asemenea *Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elementen* (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik) t. III, 1936.

[5] Idem, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, *Sammlung Orbis*, Karl Alber, Freiburg-München, 1954; ed. a II-a rev. și adăugită, 1964.

De o tratare amplă beneficiază în special antichitatea elenă, secolul al XVII-lea și apoi secolele XIX și XX — epocile cu adevărat fecunde pentru problematica propusă.

Două sînt caracteristicile principale ale lucrării lui *Oskar Becker*. Prima o constituie prezentarea evoluției fundamentelor prin documente împrumutate din operele celor mai de seamă gînditori aparținînd epocilor studiate — folosirea deci a unui bogat material antologic selectat de autor. A doua este preocuparea constantă de a ilustra transformările principiale prin care au trecut fundamentele matematicii în raport strîns cu concepția filozofică dominantă, specifică epocii respective. Relația matematică — filozofia teoretică, interdependența acestora, este prezentă ca un fir călăuzitor în tot cuprinsul lucrării. De aceea, alături de texte reprezentative din operele lui Euclid, Proclos, Descartes, Leibniz etc. întîlnim, în paralel, extrase din operele lui Platon, Aristotel, Kant ş.a.m.d.

Astfel concepute, *Fundamentele* nu sînt, de bună seamă, o operă de sinteză, creatoare. Originală este dispunerea vastului material documentar în desfășurare istorică, material care poartă nu numai girul unui matematician versat și al unui filozof subtil, dar și al unui lingvist competent, preocupat să reconstituie, și sub aspectul fidelității și preciziei terminologice, etapele acestei prodigioase evoluții. Scrupulozitatea lingvistului merge pînă acolo, încît unele fragmente mai dificile, susceptibile de controverse exegetice, sînt încorporate în traducere în cuprinsul lucrării și reproduse apoi în original în observațiile și notele de la sfîrșitul cărții, pentru a putea înlesni oricui o confruntare riguroasă. Lucrarea pune totodată la îndemîna cercetătorului o excepțională informare bibliografică și un index prețios de izvoare folosite.

Atît despre caracteristicile real-pozitive ale lucrării. Orice alte aprecieri sînt, *pro libri consilio*, inutile.

Considerăm, în schimb, oportun să relevăm unele obiecții pe care le-ar putea suscita lectura ei. Obiecțiile s-ar putea reduce, simetric-analog, la două principiale.

Prima ar fi cu privire la însuși modul de tratare a problematicii propuse. Pentru că fundamentarea unei științe în general — și în special a matematicii — comportă două operații intelectuale distincte: *definirea conceptelor de bază*, *entia mathematica*, existențele matematice (*id est*: număr, cantitate, mulțime, punct, linie, figură, continuu, infinit, funcţie, şir, limită etc.) şi *indicarea metodelor de invenţie şi demonstraţie.* Matesiologic vorbind, orice fundamentare este dublă : logic-conceptuală şi metodologică. Cît priveşte fundamentarea ontologică şi epistemologică, acestea ţin de natura reflecţiei filozofice.

Este drept că Oskar Becker are o concepţie ştiinţifică modernă asupra problemei fundamentării matematicii, cuprinzîndîn amplitudinea ei atît elementul logic-conceptual, cît şi cel metodologic. Dovadă: menţionarea metodei atomiste şi a metodei exhaustiunii în capitolul *„Fundamentarea matematicii mărimilor infinitezimale"* la eleni, sau a „metodei platonice a deducerii din ipoteze (supoziţii)" în capitolul *„Platon despre esenţa matematicii"* etc., etc. Cititorul, chiar cel cu formaţie matematică şi cu o largă orientare filozofică, nu poate însă disjunge clar şi reţine evident care sînt conceptele de bază şi, separat, metodele care fundamentează matematica, corespondente unei anumite trepte evolutive, din modul în care este dispus şi ordonat materialul documentar prezentat.

Astfel nu este pusă suficient în valoare corelaţia strictă, corespondenţa univocă dintre structura demonstrativă a geometriei euclidiene şi logica aristotelică (raţionamentul apodictic), deşi se citează un amplu fragment semnificativ din *Comentariile* ulterioare ale lui Proclos. Pare puţin probabil ca Oskar Becker să nu fi cunoscut celebra butadă a lui Leibniz, cu privire la structura matematică a *Organonului* aristotelic : *„Aristotel gîndeşte matematic, în afara matematicii"*.

Ar fi fost utile, de asemenea, unele relaţii cu privire la bogatul tezaur al *analizei* — atît ca concept fundamental, cît şi ca metodă (metoda analitică, rezolutivă, cu variantele sale : reducerea la absurd etc.) — aşa cum poate fi desprins din operele bătrînului Aristeu, ale lui Euclid, Apolonius din Perga, Pappus şi Diofant. Nu se poate trece peste matematica elenă care conţinea în germene elementele calculului diferenţial şi integral, ale geometriei analitice şi, care sînt de neconceput în afara *analizei.* Ori, acesta este un truism ineluctabil încă din secolul al XVII-lea, de la Descartes, Leibniz, Newton.

În general, aspectul metodologic al fundamentării matematicii antice elene se putea preta la o ilustrare mai bogată — dat fiind că el a constituit o preocupare arzătoare la gînditori de seamă în această epocă, dacă ar fi să amintim numai pe Platon, Aristotel, Euclid, Geminus (autorul celor *„Şase cărţi despre* *teoriile matematice"*, consacrate cercetării principiilor logice care fundamentează matematica) şi apoi pe Proclos şi Pappus.

Cu privire la cea de-a doua mare perioadă pe care o tratează lucrarea lui Oskar Becker, perioadă care începe din secolul al XVII-lea şi ţine pînă în secolul al XIX-lea, intervine un corectiv. Dacă în antichitate fundamentarea metodologică ne apare mai de grabă ca o reflecţie filozofică, posterioară fundamentării conceptuale, definirii noţiunilor de bază — în evoluţia matematicilor moderne ea premerge acesteia. După unele încercări timide — printre care merită să fie amintit tratatul lui Acontius, apărut la 1558 şi intitulat „*De methodo*", pe care cartezianul Huebner îl semnala ca fiind tot ceea ce se scrisese mai important înainte de Descartes asupra *analizei* —, preocupările în jurul unei noi fundamentări metodologice a matematicii irumpe exploziv, promovînd *analiza*, care generează *geometria analitică*, *analiza infinitezimală*, *mecanica analitică*, *calculul diferenţial* şi *integral*. Această dezbatere interesantă şi revelatorie pentru problematica fundamentării metodologice în plin secol al XVII-lea ar fi fost util, după părerea noastră, să figureze în tabloul prezentat de Becker. Ne referim la principalele lucrări purtătoare ale acestei dezbateri: *Regulele* şi *Discursul asupra metodei* ale lui Descartes[1], tratatul leibnizian *De synthesi et de Analysi universali, seu de arte inveniendi et judicandi*, precum şi *Logica de la Port-Royal* care, pentru prima dată în istoria filozofiei moderne, consacră metodologia ştiinţelor, încorporînd metoda analitică şi sintetică, ca metode de invenţie şi, respectiv, de demonstraţie.

Capitolul consacrat cercetării fundamentelor în secolul al XX-lea, cînd a avut loc o importantă mişcare ca aceea a încercării de fundamentare a matematicii prin logica simbolică, *logistica*, este ilustrat doar prin cîteva extrase din lucrările lui *Frege* şi *Russell*, autorul invocînd lipsa de perspectivă istorică, de distanţare contemplativă, inerentă unei astfel de prezentări, fenomenul fiind în curs de desfăşurare (Oare axiomatica hilbertiană nu este însă mai recentă decît logistica ?). Unele relaţii mai ample asupra logicii lui Boole, asupra logicilor polivalente şi raportului acestora cu calculul probabilităţilor, asupra lucrărilor lui Lukasiewicz și Post, A. Church și H.B.Curry, Heyting și H.Cartan ar fi completat tabloul fundamentelor matematicii în secolul nostru.

---

[1] Este demn de amintit aici că Jules Vuillemin, în lucrarea sa recentă *La Philosophie de l'Algèbre* (1962, p. 5.), porneşte de la definiţia carteziană a metodei analitice şi sintetice.

Și acesta cu atît mai mult cu cît nu se poate vorbi azi despre fundamentele matematicii moderne, fără a stabili ca un adevăr indelebil faptul că logicismul secolului nostru, în intenția de a conferi o nouă fundamentare matematicii, a tradus în limbaj simbolic însăși *analiza*, creînd *teoria implicației*. Penru că, în ultimă instanță, $p < q < r < z$ nu este altceva decît relația logic-formală a analizei descoperite de antici și repusă apoi în valoare de Descartes, Leibniz și Boole, ca metodă matematică.

Calculul propozițiilor din logica matematică actuală (Kalkül der Sätze) desfășoară relațiile logice ale „analizei" vechilor geometri.

A doua obiecție vizează modul în care este ilustrată relația matematică-filozofie, interdependența acestora. Evident, problema este complexă și susceptibilă de soluții variate. Rămînînd însă în cadrul strict determinat de problematica propusă — anume: urmărirea transformărilor principiale ale fundamentelor matematicii și raportul acestora cu filozofia — o singură soluție se impunea cu necesitate logică. Istoria matematicii și a filozofiei relevă, de altfel, indubitabil, faptul că o reînnoire a fundamentelor primei a atras repercusiuni inevitabile asupra secundei. Nu o dată în evoluția gîndirii omenești, filozofii și-au structurat concepțiile, „*more geometrico*", furnizînd „*à leur tour*", o fundamentare logic-conceptuală riguroasă matematicii.

Ori, tocmai în acest sens înțelegem să urmărim pe autor în evocarea principalelor momente ale acestui raport. Dacă, în ceea ce privește indicarea acestor momente, sîntem de acord cu Oskar Becker, în schimb configurarea lor ne relevă lipsa anumitor aspecte, după părerea noastră, esențiale pentru cadrul tematicii.

Așa se întîmplă, de pildă, cu momentul antichității elene. Contribuția filozofiei la definirea conceptelor fundamentale matematice este ilustrată prin definiția aristotelică a continuului și infinitului. Nu întîlnim însă, reciproc, influența pe care rigurozitatea demonstrativă a geometriei elene a exercitat-o asupra *Organonului*, deși logica aristotelică este structurată după modelul geometriei și ilustrată cu exemple tipice împrumutate acesteia.

În ce privește selectarea fragmentelor citate din dialogurile platonice, nu vom împinge exigența pînă la exces, cerînd să ni se releve modul în care descoperirea iraționalelor de către matematicienii eleni a influențat concepția *Politicii* lui Platon — deși unii gînditori contemporani n-au ezitat să semnaleze corespondența dintre metoda inventată de matematicieni, pentru a da prin fracțiile continue o aproximație satisfăcătoare a iraționalelor, și *Politică*, în care statele empirice se măsoară prin excesul și lipsa asemănării lor cu statul ideal[1]. Fragmentul citat de Becker din *Politica* nu relevă însă tocmai ceea ce enunțau titlurile sub care e reprodus: „Metoda platonică a deducerii din ipoteze" și „Platon despre esența matematicii". Extrasul fiind prea scurt, rămîn neobservate două aspecte importante ale filozofiei platoniciene. Primul îl constituie formularea metodei analitice. (Oare nu relata Proclos că Platon a explicat pentru prima oară lui Leodamas din Tasos metoda cercetării problemelor prin analiză?)[2] Al doilea, critica matematicii, întreprinsă de Platon, și raportul dintre cunoașterea matematică și cunoașterea dialectică — aspect important și revelator al concepției filozofice în antichitatea elenă[3].

Bineînțeles, obiecția s-ar putea reitera, *ad libitum*, și pentru momentele următoare. Ne limităm doar la formularea ei principială și la aceste exemplificări. Cel mult, am mai putea semnala absența *Prolegomenelor* lui Kant (Cartea I — *Cum este posibilă matematica pură*?)[4].

* * *

Oricum, lucrarea lui Oskar Becker constituie un tablou interesant și sugestiv al evoluției istorice a problematicii fundamentelor matematicii. Prin vastul material antologic, documentar, pe care îl conține, ea pune în circulație o colecție de extrase din texte datorite matematicienilor şi filozofilor din toate timpurile, avînd darul să familiarizeze pe cercetător cu operele de bază şi să-l orienteze spre acest nesecat şi preţios izvor al culturii care este contactul direct, nemijlocit, cu operele marilor gînditori. În acest sens, ea este un răspuns exemplar la clasicul deziderat cartezian pe care îl citam la început: ,,Trebuie citite scrierile celor vechi, deoarece lectura lor ne dă avantajul imens de a putea folosi lucrările atîtor oameni: fie pentru a cunoaşte acele lucruri care au fost ingenios descoperite altădată, fie pentru a şti, de asemenea, ce mai rămîne de descoperit de acum încolo în toate ştiinţele''.

---

[1] Cf., de pildă, Jules Vuillemin, *op. cit.*, p. 4.

[2] Cf. Proclos, *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*, ed. Friedlein, 1873, pp. 211, 18; de asemenea, Diogene Laerțiu, *Viețile și doctrinele filozofilor*, Editura Academiei, București, 1963, p. 210.

[3] În note am reconstituit ambele aspecte ale concepției platoniciene, așa cum sînt expuse în fragmentul citat din *Politica*.

[4] Cf. *Kants Werke*, Herausgegeben von I. H. v. Kirchmann, Dritter Band, Leipzig, 1901; idem, *Prolegomene la orice metafizică viitoare*, Cultura Națională, București, MCM XXIV.

De aceea, apariţia ei în limba română este un fapt îmbucurător.

Se cuvine *Editurii Ştiinţifice* — care înscrie publicarea ei într-o culegere vastă de alte lucrări de informare istorică şi de filozofie a matematicii — gratitudine pentru această iniţiativă fecundă.

CORNELIU VILT

PREFAȚĂ

Această carte urmărește să schițeze, cu ajutorul unei serii de documente, un tablou al evoluției istorice a problematicii fundamentelor matematicii de la începuturile sale pînă în ziua de azi. Din cauza abundenței materialului și a dorinței de a păstra o anumită accesibilitate, ne-a fost, în general, imposibil să înfățișăm realmente ideile matematice în succesiunea lor propriu-zisă. Căci matematica nu este de fapt o știință care — cultivată cu oarecare rigurozitate — să poată fi prezentată într-un mod accesibil tuturor. Nici n-ar mai fi cazul să mai publicăm cărți de genul celor care înfățișează o serie de idei matematice prin exemple, pentru a marca evoluția matematicii oarecum prin jaloane „de la Pitagora pînă la Hilbert". Lucrarea de față își propune mai degrabă să schițeze transformările principiale prin care a trecut cercetarea fundamentelor matematicii, subliniind legătura cu filozofia din epoca respectivă, fără a intra în detalii tehnice. Pentru aceasta a fost necesar să se prezinte o serie de documente provenite chiar de la mari matematicieni și filozofi. Între documente am inserat observații scurte care să lege numai, și oarecum să explice, propriile lor cuvinte. Trebuia evitată o prolixitate obositoare; astfel am putut oferi numai o mică selecție din vastul material care s-a păstrat.

Ideea conducătoare în această selecție a fost să scoatem în evidență epocile cu adevărat fecunde pentru problematica fundamentelor: antichitatea clasică, secolul al XVII-lea și apoi secolul al XIX-lea și al XX-lea. S-au mai adăugat unele completări. Nu am avut totdeauna la dispoziție documentele originale cele mai potrivite pentru a scoate în evidență evoluția; în locul lor a trebuit să punem informații istorice bazate cît mai mult posibil pe materialul păstrat de tradiție. Pe lîngă aceasta am putut folosi cîteodată expuneri oarecum clasice de istorie a matematicii, care pot fi considerate ca citate de mîna a doua.

În ordonarea materialului nu am putut proceda totdeauna după criteriul absolut cronologic, deoarece nu s-a putut ocoli o anumită ordine sistematică după domeniile de probleme.

La Observațiile de la sfîrșitul cărții, în afară de indicațiile izvoarelor indiscutabile, am dat în original, în cîteva cazuri, unele fragmente deosebit de importante care sînt traduse în această lucrare, cu scopul de a indica textul folosit și, eventual, pentru justificarea traducerii.

Am dat în mod intenționat un index bibliografic scurt și, față de abundența materialului, am indicat culegeri bibliografice cunoscute, care prezintă garanție. Prin aceasta am urmărit să indicăm cititorului interesat, lucrări mai ample care să-i permită aprofundarea întregului domeniu sau a anumitor sectoare.

Este pentru mine o plăcută datorie să mulțumesc acelora care au contribuit cu amabilitate la geneza acestei cărți. Imboldul pentru alcătuirea ei mi-a venit de la dl. prof. G.Martin, urmat mai tîrziu de dl. prof. W.Britzelmayr, sub a cărui îngrijire a apărut cartea. Înainte de toate trebuie să mulțumesc însă editurii, precum și Fundației Dante, pentru sprijinul remarcabil pe care mi l-a dat în muncă. În plus, la alcătuirea indexului de nume am primit un ajutor plin de amabilitate din partea d-lui consilier bibliotecar dr. Th. Clasen, a prof. J.E. Hofmann și a prof. H. Scholz.

Bonn, mai 1954

OSKAR BECKER

A doua ediție cuprinde în esență vechiul text, în care s-au îndreptat cîteva greșeli, și care a fost completat cu un număr de observații (la sfîrșitul volumului). De asemenea bibliografia și indexul de nume au fost, pe cît posibil, aduse la zi. Cea mai importantă inovație este însă adăugarea, ca anexă, a începutului celebrei lucrări a lui Gödel, intitulată *Despre propozițiile nedecidabile din Principia Mathematica*.

Mulțumiri cordiale se cuvin d-lor colegi prof. H. Hermes (Münster), I.E. Hofmann (Tübingen) și P. Lorenzen (Erlangen), pentru ajutorul prietenesc pe care mi l-au dat la completarea bibliografiei și a indexului de nume.

Bonn, decembrie 1963

OSKAR BECKER

OBSERVAŢIE PRELIMINARĂ

Fundamentele matematicii posedă oarecum o latură obiectivă şi una subiectivă. Orice formă de matematică cu existenţă istorică are în mod obiectiv anumite fundamente, dar matematicienii nu sînt totdeauna conştienţi în mod explicit de acest lucru. În realitate trebuie să facem o distincţie între conceptele fundamentale şi reflecţia conştientă asupra lor. Numai pe baza unei astfel de reflecţii se poate vorbi despre conştiinţa unor fundamente, precum şi despre o cercetare a fundamentelor necesarmente legată în timp de această conştiinţă.

Fundamentele matematicii, devenite astfel explicite, cu alte cuvinte *fundamentarea* ei expresă, conştientă şi gîndită metodic, vor constitui obiectul consideraţiilor noastre. Din fericire aceasta înseamnă că nu este nevoie ca întreaga istorie a matematicii – în toată întinderea ei enormă de la babilonenii din prima jumătate a mileniului al II-lea precreştin pînă în prezent — să fie obiectul atenţiei noastre. Ne vom ocupa numai de acele perioade din această istorie în care problematica fundamentelor a avut viaţă şi ca expresie şi ca metodă.

În esenţă aceste perioade sînt în număr de trei.

1. Începuturile şi înflorirea matematicii greceşti din secolul al V-lea pînă în secolul al III-lea î.e.n.
2. Apariţia matematicii occidentale moderne (îndeosebi a calculului infinitezimal) în secolul al XVII-lea.
3. Cercetarea critică a fundamentelor, din ce în ce mai profundă şi mai subtilă, din secolul al XIX-lea şi al XX-lea. (Asupra acestei epoci, încă puţin tratată din punct de vedere istoric, s-a pus un accent deosebit.)

Restul se grupează în jurul acestui nucleu. Tuturor acestora le premerge o privire de ansamblu asupra celei mai vechi matematici în Egipt şi în Babilon, deşi aici latura „subiectivă” a fundamentelor nu apare încă.

CAPITOLUL I

PRIVIRE ASUPRA FUNDAMENTELOR MATEMATICII PREELENE

Despre matematica preelenă din orientul antic posedăm numai puține documente: din Egipt avem două mari texte cu probleme (papirusul Rhind și papirusul de la Moscova), precum și cîteva tabele de calcul; din Babilon avem aproximativ 100 de texte cu probleme și 300 de texte cu tabele (tăblițe de lut cu scriere cuneiformă). În afară de acestea mai posedăm texte de astronomie, dintre care cele interesante din punct de vedere matematic provin de-abia din epoca babiloneană tîrzie (elenistă). În nici unul din aceste texte nu se găsește vreo urmă de reflecție cu privire la fundamentele matematicii conținută în ele. De fapt colecțiile de exerciții (adesea, dar nu totdeauna, cu soluție exprimată în numere) se pot compara oarecum cu manualele noastre școlare de aritmetică, care conțin culegeri de exerciții de calcul (printre care și unele formulate ca probleme). Într-o astfel de literatură nu se fac reflecții. Și pe deasupra, din tabele (din „*numeri Babylonici*" de care vorbește Horațiu*) adesea trebuie să desprindem conținutul matematic printr-o interpretare migăloasă.

Așadar noi nu știm dacă egiptenii și babilonenii au reflectat asupra problemei fundamentelor matematicii lor; și este chiar puțin probabil s-o fi făcut, căci la ei matematica pare să fi fost orientată numai spre problemele practice-economice ale funcționarilor administrației — cu excepția astronomiei, care de altfel servea unor scopuri astrologice (fără îndoială avînd un caracter public, nu particular). Totuși, din punct de vedere obiectiv, egiptenii și babilonenii au pus bazele tehnicii noastre de calcul, algebrei și geometriei.

De aceea sîntem îndreptățiți să încercăm a face, sub forma unei prezentări succinte (intercalînd unele exemple originale în traducere liberă), un tablou al matematicii orientului antic din care matematica greacă și-a scos materialul ei inițial.

---

* În *Carminum liber primus*, XI, 2—3. — *N. T.*

A. Tehnica de calcul

1. Tehnica de calcul la egipteni

Sistemul de numeraţie egiptean este strict decadic, chiar şi în modul de scriere: treptele decadice 1, 10, 100, 1000 ş.a.m.d. sînt redate prin semne individuale. Sistemul corespunde aşadar cifrelor romane (I, X, C, M), dacă facem abstracţie de valorile intermediare V, L, D şi de expresiile formate prin scădere, ca IV şi IX.

Într-un astfel de sistem de numeraţie operaţiile aritmetice de adunare şi dublare se pot reprezenta prin juxtapunere („succesiune"), iar înmulţirea cu zece prin înlocuirea, de exemplu, a semnului I prin X. Trecerii de la 10 la 20 îi corespunde trecerea de la X la XX, de la 3 la 30 îi corespunde trecerea de la III la XXX.

Este demn de observat faptul că şi în concepţia actuală operaţiile „succesiune" (înşiruire) şi „înlocuire" (substituţie) s-au dovedit a fi operaţii fundamentale cu simboluri matematice.

Rezultă de aici că în Egipt înmulţirea şi împărţirea *nu* aparţin genurilor de calcule fundamentale, ci se reduc la adunare şi dublare (respectiv înjumătăţire) şi cîteodată la înzecire. Următoarele exemple lămuresc procedeul:

Înmulţirea

13 × 15	∕1	15
	2	30
	∕4	60
	∕8	120

Soluţie (1 + 4 + 8 = 13) : 195

Împărţirea

77 : 7	∕1	7
	∕2	14
	4	28
	∕8	56

Soluţie: 1 + 2 + 8 = 11
(căci: 7 + 14 + 56 = 77)

Particularităţile specifice ale calculului cu fracţii la egipteni sînt următoarele. Egipteanul cunoaşte numai fracţiile „naturale" $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ şi mai departe unităţile fracţionare (cu numărătorul 1). Notarea se face scriind litera *r* deasupra numărului care reprezintă numitorul, literă reprezentată printr-un simplu punct în scrierea „hieratică" a papirusurilor matematice. Noi redăm aceasta prin punerea unei liniuţe deasupra numitorului. Fracţiile $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{4}$ sînt reprezentate prin semne speciale.

Prima problemă care apare este dublarea unităţilor fracţionare. De două ori $\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}$ etc. sînt calculate în raport cu $1, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ etc.; în loc de două ori $\overline{3}$ găsim $\overline{\overline{3}} = \frac{2}{3}$. Însă pentru dublarea fracţiilor $\overline{5}, \overline{7}, \overline{9}$ etc. se întrebuinţează reguli speciale, care dau ca rezultat din nou o sumă de unităţi fracţionare. Ele ne sînt transmise într-o mare tabelă, care începe în felul următor:

dublul lui $\overline{3}$ este $\overline{2} + \overline{6}$
„ „ $\overline{5}$ „ $\overline{3} + \overline{15}$
„ „ $\overline{7}$ „ $\overline{4} + \overline{28}$

dublul lui $\overline{9}$ este $\overline{6} + \overline{18}$
„ „ $\overline{11}$ „ $\overline{6} + \overline{66}$
„ „ $\overline{13}$ „ $\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$

Este de prisos să reproducem aici în întregime calculul sau să intrăm în amănuntele metodei, care nici măcar nu a avut un caracter absolut sistematic. Important, în principiu, este faptul că apare o tabelă matematică ca instrument de calcul, aşa cum se găseşte, într-o măsură şi mai mare, şi în matematica babiloneană.

Menţionăm, mai departe, şi aşa-numitele „numere auxiliare roşii", scrise cu culoare roşie într-un text altfel negru, care servesc mereu egipteanului la adunarea fracţiilor. Rolul lor este asemănător cu cel pe care îl joacă la noi „numitorul comun"; dar egipteanul nu caută, ca noi, adevăratul numitor comun, ci consideră cea mai mică unitate fracţionară a sumei care trebuie calculată ca o nouă unitate şi determină de cîte ori se cuprinde aceasta în fiecare termen al sumei. Rezultă astfel nu totdeauna numere întregi, ci cîteodată şi fracţii la „numărător".

Exemplu (cea mai mică unitate fracţionară este $\overline{45}$):

Fracţii („numitori"):	$\overline{4}$ +	$\overline{8}$ +	$\overline{9}$ +	$\overline{10}$ +	$\overline{30}$ +	$\overline{40}$ +	$\overline{45}$ +	$\overline{3}$
Numere auxiliare („numărători"):	$11 + \overline{4}$	$5 + \overline{2} + \overline{8}$	5	$4 + \overline{2}$	$1 + \overline{2}$	$1 + \overline{8}$	1	15

Noua unitate aleasă este $\overline{45}$. Pentru a obţine numerele auxiliare, se înmulţesc unităţile fracţionare cu 45. În $\overline{9}$, de pildă, se cuprind 5 unităţi fracţionare de forma $\frac{1}{45}$, dar în 4 se cuprind $11\frac{1}{4}$ unităţi fracţionare de forma $\frac{1}{45}$. Suma numerelor auxiliare este 45, suma fracţiilor este deci 1. Reciproc, unităţile fracţionare se obţin, fireşte, din nou prin împărţirea numerelor auxiliare cu 45.

Tehnica de calcul egipteană consecvent aditivă este, într-un anumit sens, primitivă, sensorial-intuitivă. Dublarea, înjumătăţirea, înzecirea se pot efectua imediat intuitiv din cauza particularităţii cifrelor egiptene. Unităţile fracţionare sînt o extindere a fracţiilor „naturale", aşa cum însăşi denumirea lor lingvistică („treimea", „pătrimea", adică totdeauna *ultima* din părţile existente), mai aparţine încă în întregime limbii naturale.

Pe de altă parte în tehnica egipteană de calcul se găsesc deja principiile matematice fundamentale:

1. Operațiile fundamentale semiotice de succesiune și substituire a semnelor.
2. Construcția și efectuarea consecventă a unui algoritm matematic pentru cazuri care depășesc banalitatea.
3. Întrebuințarea ingenioasă a tabelelor matematice.

2. Tehnica de calcul la babiloneni

Ca și matematica babiloneană în general, tot astfel și tehnica de calcul babiloneană este mult superioară celei egiptene. Această situație se explică prin sistemul de numerație al babilonenilor.

Sistemul pozițional (relativ) sexagesimal al textelor cuneiforme de matematică și de astronomie, sistem care datează chiar din epoca sumeriană (mileniul al III-lea î.e.n.), a apărut, după cum rezultă îndeosebi din cercetările lui *O. Neugebauer*, din grupe, inițial independente, de unități de măsură folosite în special pentru greutăți și monede; aceste grupe erau alcătuite — în concordanță cu limbajul — după criteriul zecimal, fiind înșirate unele după altele și la urmă, asociate în grupe din ce în ce mai mari. Deoarece deosebirea dintre sistemele de unități de măsură era prea mare pentru a putea fi înlăturată prin identificare, s-a pășit la alcătuirea unei grupe armonioase cuprinzătoare, caracterizatăprin faptul că părți din măsurile mai mari apar ca multipli întregi ai măsurilor mai mici. Ținînd seama că structura ambelor grupe era caracterizată prin numerele $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, 2, 3, . . . , 10, raportul dintre cele două unități fundamentale trebuia să permită diviziunea prin doi și prin trei; acest lucru, împreună cu structura zecimală a sistemului numeric inițial, a făcut ca 60 să devină baza noului sistem global. (1 : 60 este și raportul dintre *șekel* și *mina*, care sînt respectiv măsuri pentru greutăți și pentru monede.)

Scrierea pozițională a apărut mai tîrziu, printr-un proces de rafinare: s-a renunțat să se mai numească unitățile de măsură, subdiviziunile unităților de măsură au devenit utilizabile pentru subdiviziuni în general și totodată pentru o măsură oarecare.

Sistemul nu conținea pe zero; cîteodată zero era marcat în mijlocul unui număr printr-un spațiu liber, mai tîrziu printr-un semn care de altfel servea și pentru despărțirea cuvintelor, totuși niciodată nu era pus la sfîrșitul numărului. O poziție absolută nu a fost așadar niciodată indicată: numai din context se poate deduce dacă este vorba de 1 sau de 60 sau de 3600, sau dacă este vorba de 30 sau $\frac{1}{2}$, sau dacă se referă la 15 sau 1/4 sau, de pildă, 900. Pentru tehnica de calcul acest fel de scriere are avantajul că numere întregi și fracții sexagesimale neperiodice (adică acelea care scrise ca fracții ordinare au la numitor numai factorii primi 2, 3, 5) sînt scrise absolut la fel, așa încît calculul cu fracții nu constituie o problemă specială, așa cum se întîmplă și la noi datorită folosirii fracțiilor zecimale.

Scrierea numerelor constă la babiloneni dintr-o combinație de două semne, din „cuiul" perpendicular T și din „colț" < pentru 1 și pentru 10; cuiele formează grupe pînă la 9, colțurile pînă la 5.

Sistemul numeric sexagesimal este folosit pentru alcătuirea de tabele cu multiple utilizări. Tabelele reciproce sînt alcătuite din numere întregi și din fracțiile naturale $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$ cu inversele lor, în cazul că posedă valori inverse finite. Tabelele de înmulțire se referă la multiplii numerelor care posedă valori inverse finite, la care se adaugă numărul 7, ceea ce ajunge pentru completarea tabelei. Aceste tabele rezolvă complet toate problemele de înmulțire și împărțire, în măsura în care ele nu duc la fracții sexagesimale infinite (periodice). (Împărțirea este concepută totdeauna ca înmulțire cu valoarea inversă.) Aceeași problemă, pe care egiptenii au încercat s-o rezolve prin dublarea unităților fracționare, este soluționată aici cu totul altfel, mai bine.

Există apoi tabele pentru pătrate, cuburi, rădăcinile respective, pentru numere de forma $n \cdot n \cdot (n+1)$ și altele asemenea pentru puterile unui număr, ba chiar pentru coeficienții binomiali (asemenea triunghiului lui *Pascal*) și pentru laturile triunghiurilor dreptunghice raționale (numere „pitagoreice", cum spunem noi astăzi).

În general avem în fața ochilor noștri, așadar, un tablou al unei tehnici de calcul foarte dezvoltate, superioară tehnicii grecești din epoca clasică, din care cauză și astronomia elenistă a preluat fracțiile sexagesimale din astronomia babiloneană, păstrate încă și la noi în diviziunea unghiurilor în grade, minute, secunde. Este probabil că sistemul pozițional zecimal al indienilor, pe care îl folosim astăzi, a luat naștere sub influența sistemului fracțiilor sexagesimale transmis din astronomia elenistă în India, probabil în epoca bizantină. Astfel, în mod indirect, și sistemul nostru de numerație ar putea să aibă originea în cel babilonean.

În sfîrșit, mai sînt de menționat anumite valori aproximative, cum sînt, de pildă, acelea ale rădăcinilor pătrate. În textele cuneiforme avem două aproximații pentru $\sqrt{2}$: 1 ; 25 și 1 ; 24, 51, 10 (aici semnul „;" înseamnă „virgula sexagesimală" în stînga căreia stă numărul întreg; cifrele fracției zecimale sînt despărțite prin virgule). Aceste valori se pot obține prin împărțirea alternativă a lui 2 și prin calcularea mediei aritmetice.

O primă aproximație pentru $\sqrt{2}$ este anume $\frac{3}{2} = 1 ; 30$; aceasta e prea mare căci $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$. Obținem așadar un număr prea mic, dacă împărțim 2 prin $\frac{3}{2}$ ceea ce dă $\frac{4}{3} = 1 ; 20$. Media între $\frac{3}{2}$ și $\frac{4}{3}$ (respectiv între 1 ; 30

și 1 ; 20) dă o aproximație mai bună ; este $\frac{17}{12} = 1\,;\,25$. Aceasta este prima valoare care ni s-a transmis ; ea este totuși prea mare, căci $(1\,;\,25)^2 = 2\,;\,0{,}25$. Împărțirea 2 : 1 ; 25 dă rezultatul 1 ; 24, 42, 21 ... $\left(\text{sau } 2 : \frac{17}{12} = \frac{24}{17}\right)$. Media ultimelor două aproximații este (nu absolut exact) 1 ; 24, 51, 10 — a doua valoare babiloneană.

În cartea Ṡulva-Sūtra a vechilor hinduși se găsește aproximația: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Aceasta este exact $\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right)$.

Aceste încercări de a găsi aproximații din ce în ce mai precise pentru numere iraționale ca $\sqrt{2}$ presupun ideea că asemenea valori care nu se pot exprima aparent prin numere întregi, așa cum este raportul dintre diagonală și latura pătratului, sînt perfect determinate fiind inerente esenței figurii respective și a căror aproximare din ce în ce mai precisă urmărește în consecință un obiectiv precis determinat. Grecilor le-a fost rezervată favoarea de a-și da seama că acest obiectiv nu va putea fi niciodată atins, deși prin aproximații ne vom apropia necontenit de el.

B. Algebra

1. Algebra egipteană

Algebra egipteană se mărginește la ecuații de gradul întîi și la probleme de gradul doi, fără termen de gradul I. Dăm mai jos cîteva exemple liniare, apoi unul de gradul doi în formă incompletă.[1]

---

[1] Denumirile de ecuații liniare, cvadratice și cubice corespund în algebra actuală cu ceea ce numim ecuații de gradul I, de gradul II și de gradul III. Algebra antică se baza însă pe reprezentarea grafică geometrică a figurilor și corpurilor. Teoria proporțiilor era legată de construcții geometrice, de aceea puterile unei cîtimi erau concepute geometric, concepție care s-a păstrat pînă în secolul al XVII-lea e.n., pînă la François Viète inclusiv. Descartes este acela care va reforma algebra, fundamentînd-o aritmetic și concepînd puterile unei cîtimi ca un șir de proporții de tipul $\frac{1}{a} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a^3}{a^4} \ldots$, admițînd unitatea ca termen mediu în teoria proporțiilor, ca fundamentare a reprezentării puterilor drept o serie de mărimi continuu proporționale. A se vedea în acest sens: Jurnalul lui Isaac Beeckman, în Descartes *Oeuvres*, ed. A.T., vol. X, p. 332 și urm., precum și Descartes, *Regule*, Editura Științifică, București 1964 Regula XVI, p. 79 și urm., precum și notele 87, 94, 95. — *C. V.*,

(1) Papirusul Rhind nr. 37: ,,Am intrat de trei ori într-un hekat[1], $\frac{1}{3}$ din mine adăugat la mine și $\frac{1}{3}$ din $\frac{1}{3}$ din mine adăugat la mine și $\frac{1}{9}$ adăugat la mine dă 1''.

Adică $3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x = 1$; $x = 1 : \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)$.

(2) Papirusul Rhind nr. 31: ,,Grămadă, $\frac{2}{3}$ din ea, $\frac{1}{2}$ din ea, $\frac{1}{7}$ din ea, întregul său, totul face 33.

Adică $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 33$.

(3) Papirusul Rhind: ,,$\frac{1}{3}$ se adaugă, $\frac{1}{3}$ se scade, mai rămîne 10''.

Adică $\left(x + \frac{1}{3}\,x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\,x\right) = 10$.

Deosebirea de formă față de ecuațiile de azi este în fond neînsemnată, însăși efectuarea calculului corespunde metodelor actuale: necunoscuta x (în egipteană ,,h'' = ,,grămadă'', ,,mulțime'') se adună cu părți din ea și membrul constant se împarte prin coeficientul care rezultă. În afară de aceasta mai există și procedeul așa-numitei ,,false ipoteze'', ca în următoarele exemple.

(4) (Papirusul Rhind nr. 40). Este vorba de repartizarea a 100 de loturi[2] la 5 persoane (probabil la împărțirea unei moșteniri), și anume astfel încît cotele descresc în progresie aritmetică și $\frac{1}{7}$ din suma primelor 3 cote este egală cu suma celorlalte două. Fie cotele: $a + 4d$, $a + 3d$, $a + 2d$, $a + d$, a. Atunci avem, evident:

$$3a + 9d = 7(2a + d), \text{ deci } d = \left(5 + \frac{1}{2}\right) a.$$

---

[1] *Hekat* = măsură egipteană de capacitate conținînd aproximativ 4,028—5,44 l. Enunțul problemei este formulat într-un mod curios pentru noi: vasul este reprezentat ca și cum ar vorbi, spunînd că intră în hekat de un număr de ori și se întoarce după ce a umplut măsura numită hekat (cf. *Papyrus Rhind* vol. I, pp. 76—77). — *N. T.*

[2] În limba germană ,,*Posten*''; în limba engleză ,,*loaves*''. — *N. T.*

În papirus se spune: „fă diferența, care este $5\frac{1}{2}$". Apoi se ia $a = 1$ și se obține progresia: 23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1. Suma sa este 60 și 100 este 60 înmulțit cu $1\frac{2}{3}$. Se spune acum pur și simplu: „înmulțește cu $1\frac{2}{3}$", și se obțin adevăratele valori: $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$.

(5) Un exemplu de ecuație cvadratică incompletă din papirusul de la Berlin 6619:

$$x^2 + y^2 = 100;\ x : y = 1 : \frac{3}{4};\ \text{deci } y = \frac{3}{4}x$$

x se presupune mai întîi egal cu 1, și $x^2 + y^2$ sau $x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2$ este atunci $\frac{25}{16} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Apoi $\frac{25}{16} \cdot 64 = 100$, deci $x^2 = 64$. Așadar $x = 8$, $y = 6$.

2. Algebra babiloneană

Algebra babiloneană posedă un domeniu mai mare decît cea egipteană, căci în afară de ecuațiile liniare și cvadratice incomplete ea posedă în întregime și ecuațiile cvadratice, cu termeni liniari. În plus întîlnim și tratarea problemelor cubice „transcendente" cu ajutorul tabelelor și calculul dobînzilor compuse. Iată mai întîi o problemă de împărțire a moștenirii (asemănătoare celei egiptene, de la nr. 4):

„10 frați și $1\frac{2}{3}$ uncii argint. Frate peste frate s-a ridicat. Cu cît s-a ridicat nu știu. Cota celui de-al nouălea este de 6 șekeli. Frate peste frate, cu cît s-a ridicat?"

„Iată cum trebuie să procedezi: formează inversul lui 10, numărul de oameni, și vei avea 0; 6. Înmulțește 0; 6 cu $1\frac{2}{3}$ mine de argint și vei avea 0; 10. Dublează 0; 10 și vei avea 0; 20". (Se va forma așadar cota mijlocie dublă). „Dublează 0; 6, cota celui de-al optulea, și vei avea 0; 12. Scade 0; 12 din 0; 20 și vei obține 0; 8. Păstrează în minte 0; 8. 1 adunat cu 1, ca cel mai mic, dă 2. Dublează 2 și obții 4. Adaugă la 1 pe 4 și obții 5. Scade 5 din 10, numărul oamenilor, și obţii 5". (Din 10, numărul fraţilor, se scade $5 = 2(1 + 1) + 1$. 5 este numărul intervalelor între fratele al 3-lea şi al 8-lea; între al 8-lea şi al 10-lea, precum şi între primul şi al 3-lea, se află cîte 2 intervale, aşadar împreună $2(1 + 1)$ intervale. Numărul intervalelor dintre primul şi al 10-lea este $10 - 1$. Acest 1 se adaugă celorlalţi scăzători, aşa încît în final avem: $10 - 2(1 + 1) - 1 = 10-(2(1+1)+1) = 10-5 = 5$. ,,Formează inversul lui 5 şi vei avea 0 ; 12. Înmulţeşte 0 ;12 cu 0; 8 şi vei obţine 0 ; 1,36 · 0 ; 1,36 reprezintă cu cît s-a ridicat frate peste frate". (Diferenţa dublă a cotei celui de la mijloc şi celui de-al optulea, adică diferenţa dintre cota a treia şi a opta, se împarte prin numărul intervalelor care formează această diferenţă, anume 5, şi astfel se obţine valoarea unui interval.)

Problema nu se rezolvă aici după un procedeu schematic, formalizat, ci prin raţionamente intuitive pe cazul concret. Aceasta nu exclude aplicabilitatea procedeului la alte exemple asemănătoare cu ajutorul raţionamentului prin analogie întîlnit totdeauna la o treaptă primitivă de cultură. După obiect procedeul este absolut aplicabil în general. În matematica babiloneană lipseşte numai forma logică pentru a exprima astfel o atare ,,generalitate". În felul nostru actual de exprimare este vorba, evident, de o progresie aritmetică descrescătoare de 10 termeni, a căror raţie trebuie calculată cu ajutorul sumei şi al termenului de rangul opt.

Algebrei ecuaţiilor liniare cu mai multe necunoscute îi aparţin *problemele cu terenuri plane*, adesea cam complicate. Dăm mai jos un exemplu:

,,Un trapez, despărţit în două fîşii. Suprafaţa superioară este de 13,3, cea inferioară de 22,57. A treia parte a înălţimii părţii de jos este înălţimea părţii superioare. Diferenţa dintre baza superioară şi linia de despărţire a fîşiilor se adună cu diferenţa dintre linia de depăşire şi baza inferioară şi dă 36. Cît de lungi sînt înălţimile, bazele şi linia de despărţire? (fig.1).

Soluţia textului este, în linii mari, următoarea:

,,$36 \cdot \frac{1}{4} = 9$; $9 \cdot 1 = 9$; $9 \cdot 2 = 18$; $9 \cdot 3 = 27$. Diferenţa dintre baza superioară şi linia de despărţire este 9.

$$\left(1 \cdot 13{,}3 - \frac{1}{3} \cdot 22{,}57\right) \cdot \frac{2}{1 + 3} = 2{,}42;\quad 2{,}42 \cdot \frac{1}{9} = 18.$$

$1 \cdot 18$ este înălţimea părţii superioare ; $3 \cdot 18 = 54$ este înălţimea părţii inferioare.

$$\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1{,}12 = 21{,}36 \text{ (avem } 1{,}12 = 18 + 54\,!)^*.$$

$$36 - 21{,}36 = 14{,}24 \text{ (avem } 36 = 13{,}3 + 22{,}57\,!).$$

$14{,}24 \cdot \frac{1}{1{,}12} = 12$ este baza părţii inferioare ; $36 + 12 = 48$

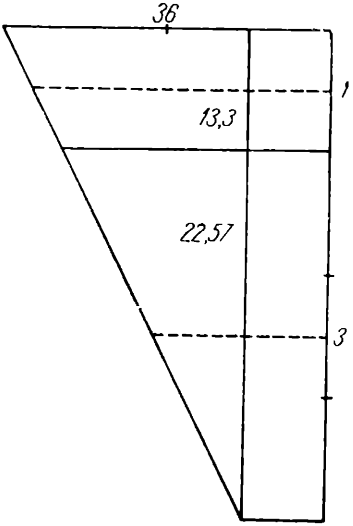


Fig. 1

este baza părţii superioare ; $12 + 27 = 39$ este linia de despărţire".

Condiţiile problemei pot fi transpuse în formule moderne şi atunci se obţine un sistem de ecuaţii liniare ; se poate însă reconstitui soluţia şi printr-un şir de raționamente concrete și astfel, poate, vom înțelege mai bine metoda babilonenilor.

---

* În sistemul sexagesimal. — *N. T.*

Numerele proporționale 36, 27, 18, 9 redau în chip simplu lungimile laturilor omologe în triunghiuri asemenea, care sînt între ele ca numerele 4 : 3 : 2 : 1. Numerele $13, 3 \cdot \frac{1}{1}$ și $22,57 \cdot \frac{1}{3}$ înseamnă lungimile liniilor mijlocii între laturile paralele ale celor două trapeze parțiale (ale „fîșiilor") în ipoteza îndoielnică („falsa ipoteză" !) că ambele „lungimi" (laturile perpendiculare ale trapezului) au valorile 1 și 3, în timp ce în realitate se cunoaște numai raportul lor (1 : 3). Diferența acestor linii mijlocii este jumătate din diferența dintre baza superioară și linia de despărțire; diferența lor dublată este deci egală cu diferența însăși, care este cunoscută o dată cu 36, $\frac{1}{4}$ din ea fiind 9. Calculul cu ajutorul „falsei ipoteze" dă însă 2,42. Așadar această „ipoteză" este de 2,42 : 9 = 18 ori mai mare. Aceasta se explică prin faptul că părțile 1 și 3 au fost luate de 18 ori mai mici. Așadar înălțimea superioară nu este 1, ci 18, cea inferioară nu este 3, ci $3 \cdot 18 = 54$. Înălțimea totală este $18 + 54 = 1,12$.

Textul dă mai departe $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 1,12 = 21,36$; aceasta este aria unui triunghi dreptunghi cu catetele de 36 și 1,12 (diferența dintre baza superioară și baza inferioară, înălțimea totală). La scăderea următoare 36 se consideră ca suma dintre 13,3 și 22,57; 36 așadar este aria totală. 36 — 21,36 = 14,24 este aria dreptunghiului, care rămîne prin scăderea ariei triunghiului din aria totală. 14,24 : 1,12, adică împărțind aria dreptunghiului prin înălțimea totală, obținem lungimea dreptunghiului, adică baza de jos 12; 12 + 36, suma formată din baza de jos și din diferența dintre baza superioară și cea inferioară, dă baza de sus de 48. La fel se obține linia de despărțire: 27 + 12 = 39.

Dacă problemele de mai sus au fost liniare, cea care urmează are o soluție care corespunde unei ecuații cvadratice complete.

„Un cîmp și latura pătratului său adunate dau 0; 45. Pune coeficientul unu. Scade jumătatea lui unu: 0; 30. Înmulțește rezultatul cu 0; 30. Obții 0,15. Adăugă la 0; 45; atunci rezultă unu. Rădăcina pătrată este unu. Scade din unu pe 0; 30, pe care îl înmulțiseși cu el însuși; atunci 0; 30 este latura pătratului".

(**Thureau-Dangin**, „Revue d'Assyriologie, **66**, vol. 53, pp. 2-44).

Interpretare: Problema: $x^2 + 1 \cdot x = 0;\ 45$. Tipul: $x^2 + px = q$. La rezolvare se formează succesiv:

(în numere)	(formule generale)
1) $1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0;\ 30$	1) $\frac{1}{2} p$
2) $(0;\ 30)^2 = 0;\ 15$	2) $\left(\frac{1}{2} p\right)^2$
3) $0;\ 15 + 0;\ 45 = 1$	3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + q$
4) $\sqrt{1} = 1$	4) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right) p^2 + q}$
5) $1 - 0;\ 30 = 0;\ 30$	5) $\sqrt{\left(\frac{1}{2} p\right)^2 + q} - \frac{1}{2} p$

Explicație: avem identitatea

$$\left(x + \frac{1}{2} p\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{1}{2} p\right)^2.$$

Deoarece după formula problemei avem $x^2 + px = q$, atunci

$$\left(x + \frac{1}{2} p\right)^2 = \left(\frac{1}{2} p\right)^2 + q \qquad \text{(cf. 3).}$$

În consecință:

$$x + \frac{1}{2} p = \sqrt{\left(\frac{1}{2} p\right)^2 + q} \qquad \text{(cf. 4).}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2} p\right)^2 + q} - \frac{1}{2} p \qquad \text{(cf. 5).}$$

Identitatea de mai sus se exprimă geometric (dacă ne imaginăm numerele interpretate prin pietricele) astfel (cf. *Euclid, Elemente,* II, 4) (cf. fig. 2): $q = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} px$ este gnomonul. Dacă aria q este dată ca pătrat (a^3), atunci

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} p\right)^2 + a^2}$$

poate construi ca ipotenuză a triunghiului dreptunghic cu catetele $\frac{1}{2}p$ şi a. Dacă de aici se scade $\frac{1}{2}p$, se obţine x.

Acestei metode babilonene de rezolvare îi corespunde aproape textual demonstraţia lui *Euclid* (*Datele*, 59):

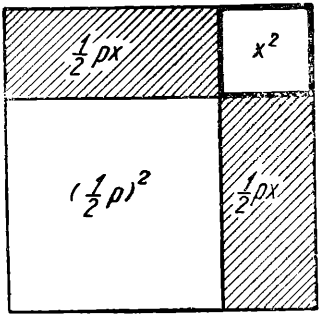


Fig. 2

Fie $AB = p$ (cf. fig. 3), dreptunghiul construit pe $AD = q$, $BD = x$. *Euclid* spune:

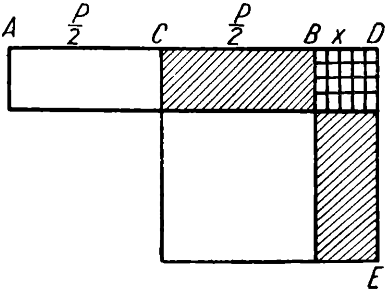


Fig. 3.

„AB este împărţit de punctul C în două părţi egale, aşadar CB este dat. Pătratul cu latura BC se poate construi, aşadar este dat. Dreptunghiul pe AD împreună cu pătratul pe BC este egal cu pătratul pe CD. Aşadar pătratul pe CD este dat, în consecință este dată și latura CD. Așadar este dat și BD (ca diferență între CD și BC)".

În *Elemente* acestei demonstrații îi corespunde teorema II, 6, așa-numitul caz de aplicare hiperbolică a ariilor.

Elemente, II, 6: Dacă se împarte un segment AB în părți egale prin C și se prelungește cu segmentul BD, atunci dreptunghiul construit pe segmentul format din AB și BD, împreună cu pătratul construit pe jumătatea segmentului BC, este egal cu pătratul a cărui latură este suma formată din jumătatea segmentului BC și din segmentul suplimentar BD".

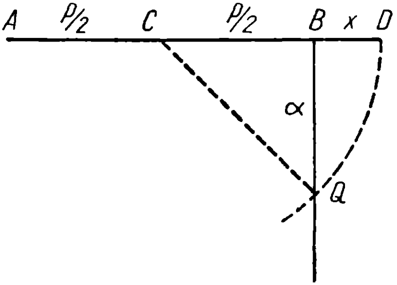


Fig. 4.

($px + x^2 = q$; $AC = CB = \frac{1}{2}p$, $BD = x$, dreptunghiul cu latura $AD = px + x^2$; gnomon $CDE = q$. Gnomonul este egal cu dreptunghiul AD).

Construcția pe care Euclid o efectuează în cazul particular al „diviziunii continue"* în *Elemente,* II, 11, este următoarea (fig. 4).

„Fie dat q ca un pătrat a^2 (în cazul din *Elemente,* II. 11, avem $a = p$). În punctul B al segmentului dat AB se construiește o perpendiculară BQ de lungime a și se duce din punctul C, mijlocul lui AB, un cerc cu raza CQ, care taie pe AB, respectiv lungimea sa, în D; BD este atunci egal cu x".

---

* Construcția mai poartă și alte denumiri: împărțirea în raport extrem și mediu, împărțirea în medie și extremă rație, *sectio divina* (Kepler), sau secțiunea de aur (pe la mijlocul secolului trecut). — *N. T.*

(Demonstrație: Avem $\overline{CB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{CD}^2$, cu alte cuvinte $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + px + x^2$, deci $q = px + x^2$.)

În continuare trebuie să observăm că problema transformării unui dreptunghi într-un pătrat de aceeași arie, care este echivalentă cu rezolvarea ecuației cvadratice incomplete $y^2 = ab$, apare chiar în geometria sacră, a vechilor hinduși, din Śulva-Sūtra („regulile sforii"), reguli care au existat cu toată probabilitatea înaintea grecilor și provin de la matematica babiloneană, chiar dacă datarea lor este dificilă.

În *Āpastamba-Śulva-Sūtra*, capitolul II, § 7, se spune:

> Dacă dorim să transformăm un dreptunghi într-un pătrat, îl scurtăm ca să fie cît latura mai mică, împărțim restul și adăugăm în ambele părți. Umplem locul gol cu bucata adăugată. Scăderea acesteia s-a arătat (fig. 5a).

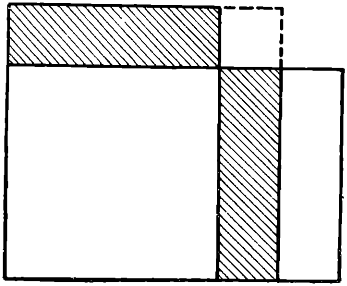


Fig. 5a.

Se transportă latura mai scurtă a dreptunghiului pe latura mai lungă și se obține astfel un pătrat. Dreptunghiul-rest se împarte în două jumătăți, iar jumătățile se lipesc la două laturi învecinate ale pătratului și se completează colțul cu un pătrat. Astfel pătratul obținut, împreună cu pătratul din colț este mai mare decît pătratul căutat, care trebuie să fie egal în arie cu dreptunghiul inițial. Pătratul din colț trebuie deci scăzut.

Asupra scăderii pătratelor, trebuie să facem comparație cu cap. II, § 5:

> Dacă dorim să scădem un pătrat din alt pătrat tăiem o fîșie din pătratul mai mare în continuarea laturii acelui pătrat pe care

vrem să-l scădem şi transpunem latura mai lungă a bucăţii tăiate pe cealaltă latură. Acolo unde o întîlneşte, se va tăia. Prin asta s-a scăzut. (fig. 5b)

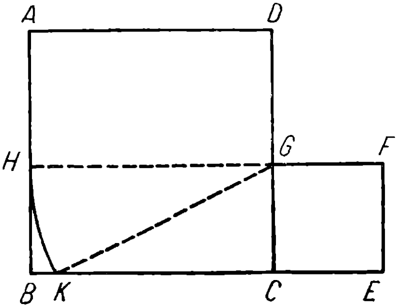


Fig. 5b.

Scăderea a două pătrate: pătratul *CEFG* trebuie scăzut din pătratul *ABCD*. Se prelungeşte *FG* pînă în *H*, se descrie cu centrul în *G* şi cu raza *GH*, un cerc care taie *BC* în *K*. Atunci *CK* este latura pătratului căutat.

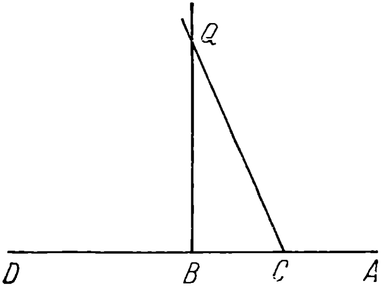


Fig. 6.

Într-adevăr, după „teorema lui Pitagora" avem

$$KC^2 = KG^2 - GC^2 = BC^2 - GC^2.$$

Construcţia indiană este deosebită de soluţia grecească din *Elemente*, II, 14. Este foarte curios că efectuarea practică a construcţiei indiene se apropie foarte mult de „aplicarea hiperbolică a ariilor" a lui *Euclid*. Figura este aceeaşi, numai că în ambele cazuri altele sînt segmentele date şi cele căutate (fig. 6).

I. (La hinduși.) Transformarea unui dreptunghi într-un pătrat. Se cere: $BQ = y$. Se dă: $AD = a$, $BD = b$. $AB = a - b$. Problemă: $y^2 = ab$.

II. (La greci.) Aplicarea hiperbolică a ariilor.

Se cere: $BD = x$. Se dă: $AB = p$, $QC = c$, $QC^2 = c^2 = q$.

Problemă: $x(x + p) = c^2 = q$; adică: $x^2 + px = q$.

Se poate admite așadar că chiar babilonenii, care probabil i-au învățat pe vechii hinduși matematica, au rezolvat probleme cvadratice algebrice în formă geometrică.

Babilonenii rezolvau chiar ecuații de gradul III. Iată un exemplu de ecuație binomă de gradul trei: *BM*: 85200 (*Neugebaur, Math. Keilschrift-Texte*, I, 204):

Problema 22: $12x^3 = 1;30$.

Soluție: $\frac{1}{12} \cdot 1;30 = 0;7,30$. Din aceasta se extrage rădăcina cubică cu ajutorul unei tabele: $x = 0;30$.

Altă ecuație cubică mixtă (de formă particulară):

Problema 23: $x^2(12x + 1) = 1;45 \left[1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}\right]$.

Textul conține: $(12x)^2(12x + 1) = 4,12 \left[144 \cdot \frac{7}{4} = 252 = 4 \cdot 60 + 12\right]$ și de aici derivă direct soluția:

$$12x = 6; \quad x = 0;30.$$

Aceasta presupune, evident, o tabelă pentru numere de forma $n^2(n + 1) = n^3 + n^2$, așa cum de fapt se găsește printre textele cu tabele care ni s-au păstrat.

Babilonenii considerau așadar ecuațiile cubice oarecum ca ecuații „transcendente" pe care ei, așa cum procedăm și noi azi la problemele transcendente propriu-zise, le rezolvau cu ajutorul tabelelor, oarecum analog cu utilizarea tabelelor noastre logaritmice ș.a.m.d.

Există însă în matematica babiloneană și probleme cu caracter numai aparent cubic, care pot fi reduse la probleme cvadratice prin introducerea ingenioasă de noi necunoscute.

YBC 4697 (**Neugebauer,** *Math. Keilschr.-Texte* I, 485).

Problema $D2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x + y) - 0;\ 1(x - y)^2 = 15 \\ xy = 10,0 \end{cases}$$

Aceasta are aspectul unei probleme cubice. Dacă însă se introduc noi necunoscute u, v prin substituția:

$$x = u + v\,; \quad y = u - v,$$

atunci problema se transformă astfel:

$$0;\, 40\,u - 0;\, 4v^2 = 15$$

$$u^2 - v^2 = 10{,}0\,; \text{ adică: } 0;\, 4u^2 - 0;\, 4v^2 = 40,$$

de unde: $0;\, 4\,u^2 - 0;\, 40\,u = 25$, o simplă ecuație cvadratică.

Această introducere de noi necunoscute este un semn de gîndire algebrică pură care se poate elibera de substratul concret-intuitiv al unei probleme și operează exclusiv în domeniul formalului. Acest mod de gîndire este caracteristic și lui **Diofant** din Alexandria, matematician din epoca greacă tîrzie, care reprezintă linia tradiției orientale în matematica grecească.

Diofant, *Aritmetica*, I, 28.

Problemă: Trebuie găsite două numere x, y, astfel ca suma lor și suma pătratelor lor să fie numere date.
Soluție: Fie $x + y = 20$ și $x^2 + y^2 = 208$. Se pune diferența $x - y = 2u$ și fie $x = u + 10$ și $y = 10 - u$.
În consecință $(u + 10) + (10 - u) = 20$ și $x - y = 2u$. Dacă ținem seama că $x^2 + y^2 = 208$, atunci:

$$x^2 + y^2 = (u + 10)^2 + (10 - u)^2 = 2u^2 + 200 = 208$$

Așadar $u = 2$ și $x = 12$, $y = 8$.

Toate textele babilonene de probleme cunoscute și descifrate pînă acum conțineau exemple numerice; de curînd a fost interpretat de către *H. Freudenthal* un text publicat de *Thureau-Dangin*, în care se indică un procedeu (*nepešum*) general pentru rezolvarea unei probleme matematice fără specificarea anumitor numere.

AO 6770 (**Thureau-Dangin,** *Textes math. babylon.*, p. 71; van der Waerden, *Ontvakende Wetenschap*, p. 83):

1. Lungimea și lățimea sînt împreună egale cu aria.
Procedezi astfel:
2. Pui (adică scrii) înmulțitorul de două ori;
3. Scazi din el 1;
4. Iei inversul;
5. Înmulțești cu înmulțitorul pe care l-ai pus (scris), și ai lățimea.

Interpretare

1. $\underline{x + y = xy \quad \text{Cît este } y?}$ (x: lungime, y: lăţime, xy: arie)

2. $x \quad x$

3. $x - 1$

4. $\overline{x - 1}$

5. $\overline{x - 1} \cdot x = y$

(A pune (adică a scrie) de două ori înmulţitorul x la început este o indicaţie naivă, clară. $\overline{x - 1}$ înseamnă $1 : (x - 1)$.)

Textul de faţă[1] înseamnă o etapă logică esenţială depăşind textele cu exemple în măsura în care el indică un procedeu de aplicat în general. Prin aceasta el depăşeşte în forma sa logică şi „textele de serie". Totuşi nici el nu dă vreo teoremă matematică.

Dimpotrivă în Ṡulva-Sūtra a vechilor hinduşi se găseşte aşa-numita „teoremă a lui Pitagora" exprimată în forma unui enunţ scurt (Sūtra):

Apastamba Ṡulva-Sūtra I, 4

> Diagonala (d) a unui dreptunghi ne dă la un loc ceea ce dau cele două laturi ale sale, atît cea mai lungă, cît şi cea mai scurtă (a, b), fiecare pentru sine. (Adică $d^2 = a^2 + b^2$.)

Hinduşii nu adaugă totuşi nici o demonstraţie pentru asemenea propoziţii.

C. Geometria egipteană şi babiloneană

Mai întîi trebuie să remarcăm faptul fundamental că toată geometria preelenă nu este o ştiinţă „pură" sau „independentă", ci o ştiinţă „aplicată", anume „arta" calculării şi măsurării dimensiunilor spaţiale, ariilor şi volumelor etc., care nu trebuie considerate altfel de cum se consideră măsurarea şi calcularea greutăţilor, a grămezilor de monede etc., chiar dacă aici intră şi constante materiale şi altele de acest fel. Aceasta rezultă clar din unele texte cuneiforme, care pot fi considerate ca „liste de coeficienţi" (*YBC* 5022 şi 7243, **Neugebauer-Sachs,** *Math. Cuneiform Texts Ud, Ue,* p. 132 şi urm.). În aceste liste se înregistrează amestecate la întîmplare numere care reprezintă coeficienţi pur matematici ca

---

[1] Un alt text se găseşte la Observaţii, p. 444.

$\sqrt{2}$ și $\frac{1}{4}\pi$ sau, de pildă, raportul dintre greutatea și volumul cărămizilor (măsurate în anumite unități uzuale). Chiar și expresia sumeriană pentru aceste constante sau coeficienți este aceeași (*igi-gub-ba*). Așadar, pentru babiloneni nu există nici o deosebire între constantele matematice („apriorice") și cele fizico-tehnice („empirice"). Geometria ca „știință independentă" este o descoperire pur grecească.

În ce privește conținutul, geometria preelenă constă din reguli elementare de calcul pentru mărimea dreptunghiurilor și triunghiurilor, a trapezelor, paralelipipedelor, prismelor și chiar a trunchiurilor de piramidă. Alături de formule aproximative apar și formule exacte. Adesea se mai folosesc și triunghiuri asemenea în poziții asemănătoare (cu laturi omologe paralele), de pildă atunci cînd este vorba de suprafețe de terenuri. Se cunosc proprietățile proporțiilor care apar în asemenea cazuri.

Măsurarea figurilor celor mai simple este o chestiune banală; în schimb volumul piramidei reprezintă o problemă reală. În ce privește metoda prin care s-a calculat corect, nu putem face decît ipoteze. Probabil că s-a împărțit cubul în 6 piramide patrulatere echivalente, unindu-se cele 8 vîrfuri ale sale cu centrul de greutate, iar piramidele obținute au fost iarăși subdivizate, de pildă, în 2 sau 4 piramide triunghiulare echivalente. Pe aceste cazuri particulare s-a aflat adevărata formulă a volumului, care apoi prin raționament analogic a fost considerată ca general valabilă.

În ce privește măsurarea suprafețelor curbe, probabil prin desfășurare s-a determinat ușor aria laterală a cilindrului. O formulă pentru aria sferei găsită de *Struve* în papirusul de la Moscova, a fost — desigur în mod greșit — interpretată de acest cercetător ca aparținînd textului egiptean.

Aria cercului a fost determinată aproximativ fără ca totuși să se fi dat un procedeu pentru o aproximare din ce în ce mai bună, în etape, așa cum a făcut mai tîrziu *Arhimede*. Egiptenii indică latura pătratului cu aria egală cu a cercului ca fiind $\frac{8}{9}$ din diametrul acelui cerc. Aceasta se poate explica în felul următor: Cercul poate fi aproximat printr-un octogon semiregulat, care se obține prin împărțirea pătratului circumscris cercului în 9 mici pătrate și prin eliminarea colțurilor (fig. 7).

Dacă exprimăm aria cercului în părți ale pătratului circumscris, atunci ea este $\frac{7}{9} = \frac{63}{81}$ deci aproximativ $\frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Astfel se găsește „cvadratura" propriu-zisă a cercului. Dacă luăm ca bază octogonul însuși, se obține π cu valoarea $3\frac{1}{9}$. Dimpotrivă, babilonenii posedau valoarea aproximativă $3\frac{1}{8}$; ei mai posedau, pentru poligoanele regulate cele mai simple, aproximații care concordă cu cele transmise de *Heron* din Alexandria (probabil secolul I e.n.)

Geometria egipteană și babiloneană mai au, în comun, noțiunea de pantă, înclinare sau povîrniș (în egipteană *śqt*, în sumeriană *ša-gal*, în akkadiană *ukullû*), care este proporțională cu cotangenta unghiului de înclinare. Este vorba de suportul (măsurat în palme) al unui zid cu înălțimea de un cot (*ukullû* înseamnă „ceea ce este consumat", așadar spațiul orizontal ocupat). Această noțiune este suficientă pentru toate scopurile practice ; și astăzi o întrebuințăm pentru a indica panta unei străzi sau a unei linii de cale ferată ; dar din punct de vedere teoretic această noțiune este subordonată noțiunii de unghi pe care matematicienii preeleni se pare că nu au folosit-o. Înclinările nu se pot aduna ca unghiurile ; teorema despre suma unghiurilor într-un triunghi, din care se pot deduce atît de multe lucruri, nu aparține tezaurului geometriei preelene.

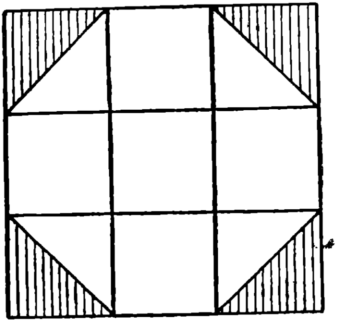


Fig. 7.

Dimpotrivă, babilonenii cunoșteau și întrebuințau încă de mult (în jurul anului 1700 sau poate chiar 1900) așa-numita „teoremă a lui Pitagora", chiar și pentru triunghiuri dreptunghice cu laturi neraționale ; ei posedau și regula generală pentru construirea triunghiurilor dreptunghice cu laturi raționale.

Așa cum am mai spus, teorema a fost enunțată în Sulva-Sūtra în general.

Nu este sigur cum a fost fundamentată această teoremă. Ne putem gîndi atît la o demonstrație prin descompunere pentru care pledează sursele orientale, cît și la o deducție din proporțiile triunghiurilor-părți în care se descompune un triunghi dreptunghi prin înălțimea sa, triunghiuri asemenea între ele și asemenea și cu cel întreg.

În calendarul chinezesc antic, *Chou-pei Suan-king*, se găsește descrisă „figura sforii" de mai jos (ceea ce amintește de „regulile sforii" indiene, Ṡulva-Sūtra) (fig. 8a, 8b).

Figura este desemnată numai pentru cazul particular al triunghiului cu laturile 3, 4, 5, se poate însă generaliza la triunghiuri oarecare, chiar neraționale.

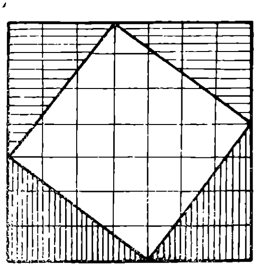


Fig. 8a

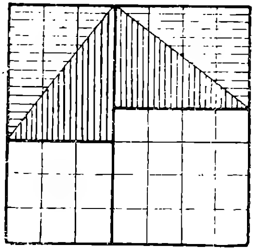


Fig. 8b

Pentru triunghiuri dreptunghice isoscele figura apare deja într-un text cuneiform (precum mai tîrziu în dialogul *Menon* al lui *Platon*).

Aceeași figură există, în esență, la comentatorul arab al lui Euclid, *An-Naīrīzi*

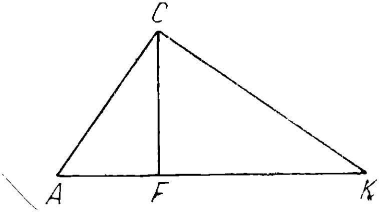


Fig. 9

(în l. latină, Anaritius, ed. M. Curtze, p. 85); demonstrații prin descompunere asemănătoare se găsesc și la geometrii hinduși de mai tîrziu.

Demonstrația lui *Euclid* (*Elemente*, I, 47) indică o demonstrație a „teoremei lui Pitagora" cu ajutorul proporțiilor, deși demonstrația lui Euclid evită proporțiile — din motive pe care le vom arăta mai tîrziu — dar lasă să se întrevadă o demonstrație și mai veche, care le folosea (fig. 9).

Datorită asemănării triunghiurilor AFC şi AKC avem $AF : AC = AC : AK$ sau $AF \cdot AK = AC^2$; deoarece triunghiurile KFC şi AKC sînt asemenea, avem $KF : KC = KC : AK$ sau $KF \cdot AK = KC^2$. Adunate, acestea dau:

$$(AF + KF) \cdot AK = AC^2 + KC^2, \text{ adică } AK^2 = AC^2 + KC^2.$$

În ce priveşte „teorema lui Tales", conform căreia unghiul înscris într-un semicerc este drept, nu se poate dovedi nemijlocit existenţa ei în matematica preelenă; totuşi textele cuneiforme arată că se cunoaşte relaţia dintre coardă şi săgeata respectivă, ceea ce duce la figura următoare, care arată că diagonalele unui dreptunghi sînt egale şi se taie în părţi egale (fig. 10).

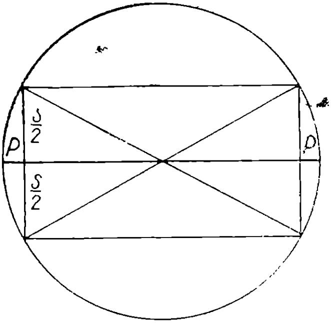


Fig. 10

Relaţia între coarda s, săgeata p şi diametrul d se deduce uşor de aici:

$$s^2 + (d - 2p)^2 = d^2, \; s^2 = 4dp - 4p^2, \; \frac{1}{4} s^2 = p(d - p).$$

De aici rezultă unele legături cu geometria de la începuturile epocii elene a *şcolii lui Tales* (începutul secolului al VI-lea î.e.n.).

CAPITOLUL II

FUNDAMENTAREA MATEMATICII ȘTIINȚIFICE DE CĂTRE GRECI

Încă de la începutul cercetărilor lor în Ionia (Milet) în jurul anului 600 î.e.n., matematicienii greci par să fi avut intenția de a-și formula riguros propozițiile și de a le demonstra. Ei au preluat o mare parte din materialul vechiului orient, îndeosebi babilonean (deși tradiția greacă vorbește totdeauna numai de Egipt ca țară de origine a geometriei); însă ei, ca și în artă, au transformat profund acest material, punîndu-și asupra lui amprenta originalității lor. În ce privește babilonenii, nu sîntem siguri nici măcar că a existat o formulare a propozițiilor generale. (Dimpotrivă, astfel de formulări apar în forma tradițională a enunțului scurt dogmatic (sūtra) în geometria sacră a vechilor hinduși.) Demonstrații nu se găsesc absolut de loc în documentele păstrate de la orientul antic; cel mult se întîlnesc verificări de calcule numerice. La greci, însă, trebuie să admitem demonstrații încă în *școala lui Tales* la începutul secolului al VI-lea; pe unele le putem chiar reconstitui cu oarecare plauzibilitate. De asemenea, trebuie să concedăm chiar și celor mai vechi *pitagoreici*, cu o generație sau două mai tîrziu, o conștiință științifică deosebită în ideea lor de „învățătură liberă" (ἐλευθέρα παιδεία), cultivată pentru ea însăși de oamenii liberi. Fără îndoială că aici se află chiar începuturile științei exacte, concomitent cu ale filozofiei, și, în consecință, acum are loc, pentru Europa, ceea ce se numește „descoperirea spiritului".

În condițiile unei astfel de poziții spirituale, era imposibil să nu apară și o reflecție explicită asupra fundamentelor construcției deductive în curs de edificare, îndată ce această construcție a fost înțeleasă ca atare. Reflecția s-a desăvîrșit cel mai tîrziu în cursul secolului al cincilea, după cum spune tradiția, prin sofistul *Hipocrat* din Chios, un matematician foarte merituos, care a trăit cu o generație înaintea lui *Platon* (440 î.e.n.). Acest *Hipocrat* este considerat ca primul autor de *Elemente*. Aceasta înseamnă că el este cel dintîi care a pus la baza matematicii anumite prime concepte fundamentale și principii, de la care începe deducția.

Despre acestea tradiția nu ne-a transmis, firește, nici un document. Prima operă mai însemnată, păstrată întreagă, sînt înseși *Elementele* lui *Euclid*. Din unele texte ale filozofilor presocratici, ale lui *Platon*, *Aristotel* și ale altora mai noi, precum și din *Euclid* însuși, se poate deduce, bineînțeles, existența unor opere și mai vechi. Nu poate rămîne nemenționată nici prima istorie a geometriei și astronomiei, pe care *Eudemos* din Rodos, unul din primii elevi ai lui *Aristotel*, a alcătuit-o și care se mai păstrează parțial în fragmente importante.

În întreaga istorie a fundamentelor matematicii contribuțiile grecilor sînt de o importanță foarte mare, chiar hotărîtoare. Ei au întemeiat matematica ca știință; ei sînt primii care au sesizat cu pătrundere conceptele fundamentale ale infinitului și continuului; lor li se datorează descoperirea iraționalelor, fiind pe deplin conștienți de problemele fundamentale pe care le pune acest concept.

În consecință colecția de documente care urmează este atît de bogată, încît abia poate fi apreciată în cadrul fixat.

A. Începuturile matematicii grecești

Ca de obicei, și matematica greacă începe cu introducerea cifrelor și cu dezvoltarea unei tehnici de calcul. Să spunem cîteva cuvinte despre acestea.

1. Cifrele și calculul

Primele începuturi ale gîndirii matematice la greci sînt puțin cunoscute. La *Homer* cuvîntul πεμπάζειν („a socoti cu cele cinci degete"), cu sensul de a număra (*Odiseea*, IV, 412), amintește socotitul cu degetele de la o mînă. Sistemul de numerație al limbii grecești este decadic; în epoca clasică se folosesc două feluri de cifre. Sistemul „atic" are semne individuale pentru treptele decadice, constînd din inițialele numeralelor corespunzătoare; legînd semnul pentru 5 de celelalte semne, se redau treptele intermediare 50, 500 etc. Notații formate prin scădere lipsesc; în celelalte privințe există o mare asemănare cu cifrele romane și egiptene. Acest sistem a fost întrebuințat numai pentru desemnarea coloanelor abacului, nu pentru calculul scris.

Al doilea sistem, care a apărut mai tîrziu (cam de la anul 450 î.e.n.), este cel „alfabetic"; numai acesta a fost întrebuințat în textele matematice științifice. El constă din cele 24 de litere uzuale cu trei semne suplimentare provenite din tradiția orientală mai veche.

1–9	α β γ δ ε ϛ ζ η ϑ	[ϛ = 6: Vau]
10–90	ι k λ μ ν ξ ο π ϙ	[ϙ = 90: Koppa]
100–900	ρ σ τ υ φ χ ψ ω ϡ	[ϡ = 900: Sampi]
1000–9000	,α ,β ,γ	(liniuță jos în stînga)
10000	M (Μυριάς)	

Numerele au fost formate prin juxtapunere de semne, ceea ce înseamnă adunare ; de exemplu ιβ = 10 + 2 = 12, σkβ = 200 + 20 + 2 = 222, ͵ατε = 1000 + + 300 + 5 = 1305. Numărul miriadelor (zeci de mii) se scrie deasupra semnului M :

$$\overset{k\varepsilon}{\mathrm{M}}\mu\gamma = 25000 + 40 + 3 = 25043.$$

Unitățile fracționare (fracții cu numărătorul 1) sînt notate de cele mai multe ori prin numitor cu o liniuță sus în dreapta ; fracțiile mai generale sînt notate într-un fel diferit, de exemplu, prin scrierea numărătorului sub numitor, invers decît la noi.

Potrivit experiențelor lui *P. Tannery*, calculul cu aceste cifre nu este așa de obositor cum se presupune astăzi de cele mai multe ori, deși sistemul nu este pozițional. Trebuie să ne gîndim că cifrele nu erau citite ca litere, ci ca numerale, astfel că, de pildă, înrudirea dintre 3,30, 300 (γ, λ, τ) rezultă de la sine ; se spunea că aceste cifre ar avea același *pythmēn* (număr fundamental).

Exemplu de înmulțire (după *Eutokios*)

τα σξε	265
ἐπὶ σξε	înmulțit cu 265
$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$͵β ͵α	40 000 12 000 1 000
$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$͵β ͵γχ τ	12 000 3 600 300
͵α τ kε	1 000 300 25
ὁμοῦ $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$σkε	în total 70 225

2. Începuturile geometriei grecești

Primele propoziții „găsite" sau „demonstrate" de un grec sînt atribuite lui *Tales* din Milet, care este considerat totodată ca primul filozof grec. Aceste propoziții sînt în esență următoarele :

1. Un cerc este împărțit în 2 părți egale de oricare diametru al său.
2. Unghiurile opuse la vîrf sînt egale.
3. Unghiurile de la baza triunghiului isoscel sînt egale.
4. Diagonalele unui dreptunghi sînt egale și se taie în părți egale, sau : unghiu înscris într-un semicerc este drept.

Aceste propoziții se pot deduce ușor dintr-o figură fundamentală, care constă dintr-un dreptunghi cu diagonale, căruia îi este circumscris un cerc. Căci această figură este simetrică față de două axe perpendiculare (în fig. 11 liniile punctate).

Pentru teorema unghiului de la bază (3), *Aristotel* a păstrat o veche demonstrație, care se încadrează foarte bine în geometria lui Tales și poate da o noțiune despre felul demonstrației în geometria de la începuturile epocii grecești (cf. fig. 12).

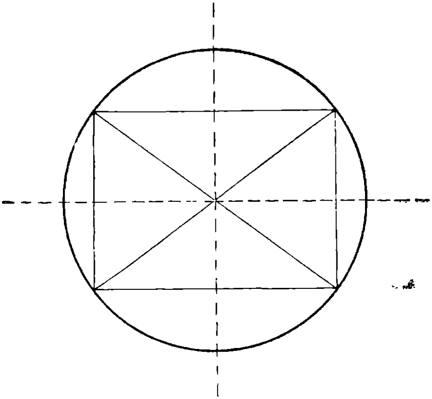


Fig. 11

Aristotel. *Analitica primă* I, 24 (p. 41, b 13—15):

Dacă admitem că unghiurile $\alpha + \beta$ și $\beta + \delta$ sînt egale, fără a afirma că în general unghiurile înscrise într-un semicerc (din același cerc) sînt toate egale, și dacă mai admitem că și unghiurile γ și δ sînt egale, fără a face ipoteza că ambele unghiuri ale fiecărui segment sînt egale și dacă în fine am trage concluzia că,

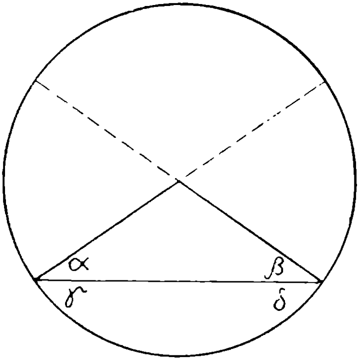


Fig. 12

deoarece unghiurile întregi ($\alpha + \gamma$, respectiv $\beta + \delta$) sînt egale și că din ele se scad unghiuri egale (γ, respectiv δ), unghiurile rămase α și β sînt egale, fără a admite în general că dacă scădem aceeași cantitate din cantități egale rămîn cantități egale — atunci am comite o petitio principii.

Pentru comparație, urmează demonstrația aceleiași teoreme dată de Euclid.

Euclid, *Elemente* I, 5 (fig. 13) :

Într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt egale; de asemenea și unghiurile obținute prin prelungirea laturilor cu segmente egale sub bază trebuie să fie egale.

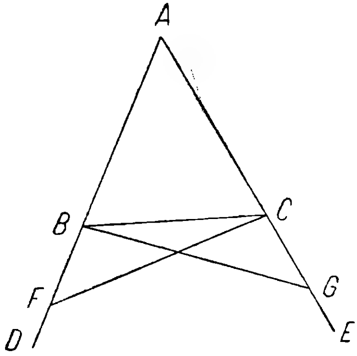


Fig. 13

Fie ABC un triunghi isoscel cu laturile $AB = AC$, fie AB, AC prelungite cu dreptele AD și CE. Afirm că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BCE$.

Alegem un punct oarecare F pe BD, punem pe segmentul mai lung AE, segmentul mai scurt $AG = AF$, și ducem dreptele FC și GB.

Deoarece $AF = AG$ și $AB = AC$, avem laturile FA, AC respectiv egale cu GA și AB, și ele cuprind un unghi comun, anume FAG; așadar $FC = GB$, $\triangle AFC = \triangle AGB$, iar celelalte unghiuri trebuie să fie respectiv egale cu celelalte unghiuri, totdeauna acelea care se opun la laturi egale : $ACF = ABG$ și $AFC = AGB$. Și deoarece segmentele întregi AF și AG sînt egale, iar părți din ele, AB și AC, sînt tot egale, atunci și resturile

BF și CG, sînt egale. Așa cum s-a demonstrat mai sus, avem $FC = GB$; în consecință două laturi, BF și FC, sînt respectiv egale cu două laturi CG și GB; de asemenea $\sphericalangle BFC = \sphericalangle CGB$ și baza BC este comună; așadar trebuie ca $\triangle BFC = \triangle CGB$, și celelalte unghiuri trebuie să fie respectiv egale, totdeauna acelea care se opun la laturi egale, deci $\sphericalangle FBC = \sphericalangle GCB$ și $\sphericalangle BCF = \sphericalangle CBG$. Deoarece însă, așa cum s-a demonstrat mai sus, unghiurile întregi ABG, ACF sînt egale, tot astfel sînt și unghiurile diferențe, $ABC = ACB$. Acestea se află la baza triunghiului ABC. Așa cum s-a demonstrat mai sus, $\sphericalangle FBC = \sphericalangle GCB$, iar acestea sînt situate sub bază.

Vechea demonstrație pentru egalitatea unghiurilor de la bază se face folosind ipoteza că într-un cerc determinat unghiurile mixtilinii din fiecare semicerc au o valoare fixă și că în fiecare segment circular ambele unghiuri mixtilinii sînt egale. Prima dintre aceste ipoteze decurge din principiul lui *Tales* că fiecare diametru împarte cercul în două părți egale, astfel că toate semicercurile unui anumit cerc sînt echivalente; a doua ipoteză rezultă din simetria cercului, așa cum apare în „figura fundamentală" și se transpune asupra segmentului.

Așadar este foarte probabil că în demonstrația aristotelică ni s-a mai păstrat încă un fragment din geometria lui *Tales*, după care ne putem face o imagine despre această geometrie.

* * *

Tot din epoca ioniană veche a lui *Tales* face parte și prima demonstrație a teoremei despre suma unghiurilor unui triunghi. Dificultatea care trebuia învinsă aici constă în însăși elaborarea conceptului de unghi. Matematica preelenă cunoștea ca măsură a înclinării raportul de pantă (*ṡqt*, *ša-gal*), astronomia preelenă măsura unghiurile pe cer (care aveau vîrful în ochiul observatorului, adică în centrul boltei cerești aparente) în „coți" și „țoli", așadar ca lungimi (de arc) pe sferă. Dar unghiuri într-un triunghi desenat și măsura lor erau ceva nou. Tradiția a păstrat o informație dată de *Geminos*, în cartea lui *Eutokios* intitulată *Apollonii Conica* (*Apoll.*, ed. Heiberg, II, p. 170). Potrivit acestei informații „anticii" au demonstrat teorema despre suma unghiurilor „în mod separat" pentru triunghiul echilateral, pentru cel isoscel, cel dreptunghic și, în fine, pentru triunghiul cu laturile neegale și cu unghiuri oarecare.

Ne putem imagina că demonstrația pentru triunghiul echilateral s-a dezvoltat dintr-un model constînd din cercuri și hexagoane, care se găsește mai tîrziu la broșe grecești geometrice (din secolul al VIII-lea) și chiar pe mozaicurile babi-

Ionice de pe pardosele (fig. 14). Hexagonul regulat înscris într-un cerc se găsește gravat și pe o tablă cuneiformă cu conținut matematic. Aceste figuri pun în evidență faptul că șase triunghiuri regulate înconjură complet un punct în plan.

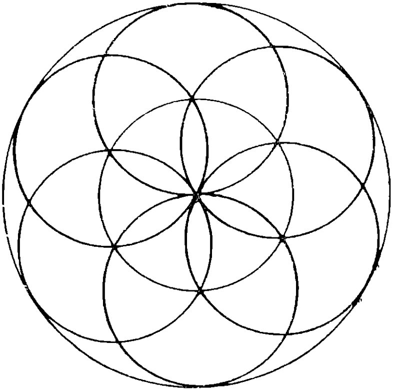


Fig. 14[1]

Aici cele trei colțuri (unghiuri, γωνίαι) ale unui triunghi echilateral sînt, evident, părți ale unei figuri de forme perfect egale (ele sînt cum spune *Tales*, ὅμοιαι nu ἴσαι) și de aceea pot fi adunate ca orice lucruri egale.

Triunghiul isoscel oarecare permite însă configurația indicată în figura de mai sus, care se găsește ca model de „zigzag" pe vasele grecești geometrice încă din secolul al II-lea (fig. 15). Aici este ușor de văzut că triunghiurile albe sînt la fel cu cele negre, numai că sînt cu vîrful în jos. Deci se poate lua un vîrf alb ca vîrf negru și astfel se obține imediat suma unghiurilor egală cu două unghiuri drepte alăturînd două colțuri negre de la bază (care, după *Tales*, sînt egale) și un colț alb.

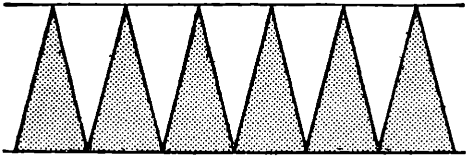


Fig. 15

---

[1] Dintr-o broșă de bronz din Thisbe (azi la Berlin). (Cf. Wolfg. Schadewaldt, *Von Homers Welt und Werk*, Leipzig, 1944, fig. 20, lîngă pg. 240).

Dacă împărțim triunghiurile isoscele simetric prin înălțimile duse pe baze, atunci prin alăturarea celor două jumătăți în formă de triunghiuri dreptunghice albe și negre, învecinate în model, se obține un dreptunghi în care, evident, suma unghiurilor este egală cu patru unghiuri drepte, așa încît pentru fiecare din cele două triunghiuri dreptunghice rezultă suma a două unghiuri drepte. De aici se deduce apoi foarte ușor suma unghiurilor pentru un triunghi oarecare, deoarece ni-l putem imagina descompus prin una din înălțimi în două triunghiuri dreptunghice.

Se vede cum aici, prin trecerea de la un caz particular la unul mai general, se dezvoltă treptat conceptul de unghi, dispensîndu-se de condiția simetriei.

* * *

Urmează acum acel prețios „incunabul'' al geometriei preeuclidiene, expunerea lui *Eudemos* din Rodos (elevul lui *Aristotel* și primul istoric al matematicii) despre cvadratura „lunulelor'' (μηνίσϰοι, lunulae), efectuată de *Hipocrat* din Chios, expunere păstrată textual la *Simplicius*, comentatorul lui *Aristotel* din sec. al VI-lea e.n.). Această expunere a lui *Eudemos*, deși este considerată fidelă ca expresie (ϰατάλεξιν), este amestecată cu observațiile lui *Simplicius*, însă un studiu atent al limbajului folosit de cei doi pentru a desemna obiectele geometrice prin litere, permite o separație netă (cf. observațiile de critică a textului de la sfîrșitul acestei cărți).

Din punctul de vedere al conținutului, geometria lui *Hipocrat*, „sofist'' (adică specialist) și profesor de matematică (în jurul anului 440 î.e.n.), pare să fi cuprins cea mai mare parte din conținutul primelor trei cărți ale *Elementelor* lui *Euclid*, în plus teoria asemănării.

3. Eudemos despre cvadratura lunulelor la Hipocrat din Chios

Dar și cvadraturile lunulelor, care păreau să aparțină ca atare figurilor neobișnuite din cauza înrudirii cu cercul, au fost descrise mai întîi de *Hipocrat* și s-a găsit că au fost în mod corect rezolvate, de aceea vrem să ne ocupăm mai amănunțit cu ele și să le studiem temeinic. El și-a pregătit un fundament și a stabilit ca primă propoziție utilă aici propoziția că segmentele asemenea ale cercurilor sînt în același raport ca și pătratele bazelor lor. Acest lucru l-a demonstrat însă arătînd că diametrele la pătrat sînt în același raport ca și cercurile. Căci așa cum sînt cercurile între ele, așa sînt și segmentele asemenea între ele.

Segmente asemenea sînt anume acelea care constituie aceeași parte a cercului, ca de pildă semicercurile între ele sau treimile de cercuri între ele.

După ce a demonstrat aceasta, el a descris în ce mod se poate efectua o cvadratură dacă o lunulă are ca arc exterior un semicerc. El explică aceasta construind un semicerc în jurul unui triunghi dreptunghic isoscel și descriind pe bază un segment circular asemenea cu cele determinate de celelalte două laturi (fig. 16)..

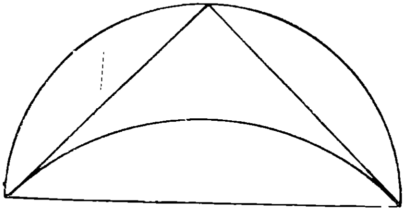


Fig. 16

Dacă însă segmentul construit pe bază este egal cu segmentele mărginite de celelalte două laturi și dacă la aceste două segmente adăugăm partea triunghiului care se află deasupra segmentului descris pe bază, atunci lunula va fi egală cu triunghiul. Dacă am demonstrat că lunula este egală cu triunghiul, atunci se poate face cvadratura ei. Așadar, astfel presupunînd arcul exterior al lunulei ca un semicerc, *Hipocrat* a efectuat cvadratura lunulei fără greutate.

Apoi, presupunînd arcul exterior al lunulei mai mare decît un semicerc, el a construit un trapez cu trei laturi succesive egale, cea mai mare dintre laturile paralele fiind la pătrat de trei ori mai mare decît pătratul fiecăreia dintre celelalte trei, a circumscris un cerc trapezului și a descris un segment circular pe cea mai mare dintre laturile sale, asemenea segmentelor tăiate din cerc de către cele trei laturi egale (fig. 17).

Afirmația că segmentul în discuție este mai mare decît un semicerc devine clară dacă în trapez se duce o diagonală. Căci în mod necesar aceasta, care este situată sub două laturi ale trapezului, trebuie să fie, la pătrat, mai mare decît dublul pătratului laturii rămase. În consecință cea mai mare dintre laturile trapezului trebuie să fie, la pătrat, mai mică decît pătratul diagonalei, mărit cu pătratul aceleia dintre celelalte laturi sub care, împreună cu diagonala, este situată latura despre care vorbim.

Din această cauză unghiul care se află pe latura mai mare a trapezului este un unghi ascuțit. Prin urmare segmentul în care se găsește unghiul este mai mare ca un semicerc. Și acesta este arcul exterior al lunulei.

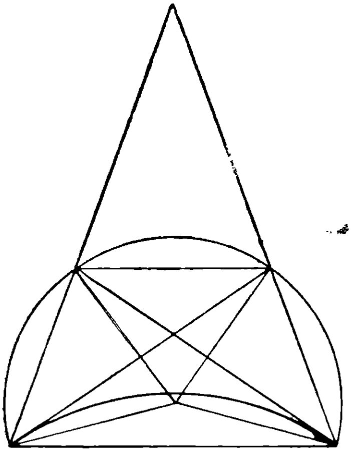


Fig. 17

În cazul că arcul exterior era mai mic decît un semicerc, Hipocrat îl construia desenînd mai întîi o figură în felul următor (fig. 18).

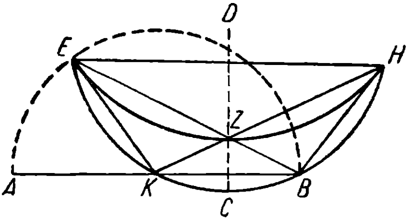


Fig. 18

Fie dat un cerc care are ca diametru dreapta *AB* și centrul în punctul *K*. Dreapta *CD* împarte perpendicular dreapta *BK* în două părți egale. Dreapta *EZ* este situată între aceasta și circumferință, fiind îndreptată spre *B* și avînd pătratul o dată și jumătate mai mare decît pătratul razei. Dreapta EH este însă paralelă cu dreapta AB. Se duc din K linii către E și Z. Segmentul care unește pe K și Z întîlnește, prin prelungire, dreapta EH în H și se duc iarăși din B segmente către Z și H. Este evident că pe de o parte dreapta BZ ajunge, prin prelungire, în E și că pe de altă parte dreapta BH va fi egală cu dreapta EK.

Dacă se procedează așa, atunci un arc de cerc circumscrie trapezul $EKBH$ și trapezul conține segmentul circular, care la rîndul său conține triunghiul EZH*. Se descrie acum segmentul de cerc; atunci lunula care ia naștere va fi egală cu figura rectilinie alcătuită din trei triunghiuri. Anume, segmentele determinate în figura rectilinie de dreptele EZ, ZH, în partea interioară a lunulei, sînt egale cu segmentele situate în afara figurii rectilinii. Căci fiecare dintre cele două segmente din partea interioară este o dată și jumătate mai mare decît fiecare din segmentele exterioare. Dacă acum, pe de o parte lunula este alcătuită din cele trei segmente și din figura rectilinie exclusiv cele două segmente, pe de altă parte figura rectilinie conține cele două segmente și nu pe cele trei, iar cele două segmente sînt egale cu cele trei, atunci lunula poate fi egală cu figura rectilinie.

Faptul că această lunulă are arcul exterior mai mic decît un semicerc, el îl demonstrează folosind situația că unghiul aflat în segmentul exterior este obtuz.

Deoarece dreapta EZ la pătrat este de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît razele (EK și BK) și (de aceea) dreapta EZ este mai mare decît dreapta EK, din care cauză unghiul din $Z(EZK)$ este ascuțit și unghiul adiacent (KZB) este obtuz, este clar că și pătratul dreptei BK este mai mare decît dublul pătratului dreptei EK. În consecință dreapta EZ la pătrat este mai mare decît pătratele dreptelor EK și KZ împreună (adică $EZ^2 > EK^2 + KZ^2$)**.

În consecință unghiul cu vîrful în K este obtuz și segmentul în care este situat unghiul este așadar mai mic decît un semicerc.

În acest mod *Hipocrat* a găsit cvadratura fiecărei lunule, cel puțin în cazul cînd efectua cvadratura unei lunule care avea ca arc exterior un semicerc, sau un arc mai mare ca un semicerc sau mai mic ca un semicerc.

---

* Vezi textul la sfîrșitul acestei cărți.

** Vezi textul la sfîrșitul cărții.

Pentru suma dintre o lunulă și un cerc el a efectuat cvadratura în felul următor (fig. 19).

Descriem două cercuri din centrul K, diametrul celui exterior la pătrat fiind de șase ori mai mare decît pătratul diametrului celui interior și după ce hexagonul $ABCDEZ$ a fost înscris

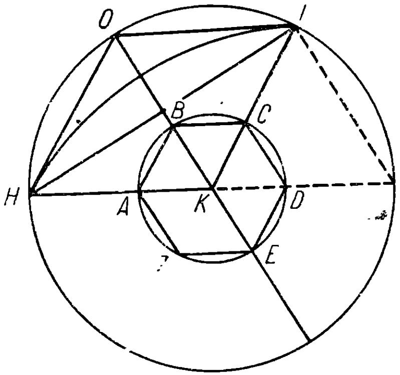


Fig. 19

în cercul interior, razele KA, KB, KC se prelungesc pînă la circumferința cercului exterior și se duc coardele HO, OI, HI; pe dreapta HI se descrie un segment circular asemenea cu cel determinat de dreapta HO. Deoarece dreapta HI la pătrat trebuie să fie de trei ori mai mare decît pătratul laturei OH a hexagonului[1], iar aceasta de șase ori mai mare decît pătratul dreptei AB, atunci este evident că segmentul descris pe dreapta HI este tot atît de mare ca segmentele determinate în cercul exterior de dreptele HO, OI, la care se adaugă segmentele determinate în cercul interior de toate laturile hexagonului. Astfel s-ar putea ca lunula HOI să fie mai mică decît triunghiul HOI, și anume cu o cantitate egală cu segmentele mărginite în cercul interior de laturile hexagonului. În consecință, lunula, mărită cu segmentele determinate de hexagon, este egală cu triunghiul. Și dacă în ambele părți se adaugă hexagonul atunci suma dintre triunghi și hexagon este egală cu suma dintre lunula în discuție și cercul interior. Acum, dacă se poate efectua cvadratura acestor figuri rectilinii, atunci se poate efectua și cvadratura cercului împreună cu lunula.

---

[1] Deoarece HI formează împreună cu diametrul și o latură a hexagonului, egală cu raza, un triunghi dreptunghic.

4. Aritmetica pietricelelor (ψῆφοι)

La începuturile matematicii grecești, probabil încă din secolul al VI-lea î.e.n., întîlnim un mod particular de gîndire, ca să spunem așa, jumătate aritmetic jumătate geometric. Se folosesc pietricele (ψῆφοι) de aceeași mărime și formă (rotunde și pătratice), cu care se fac figuri. Astfel relatează *Aristotel* (*Metafizica*, N 5, 1092, b 10) că pitagoreicul *Eurytos* determina „numărul" (ἀριθμός) fiecărui obiect și imita formele ființelor prin pietricele (ψῆφοι) „în felul în care unii așază numerele în formă de triunghi sau pătrat". Ultima observație este pentru noi foarte importantă: joaca lui *Eurytos* o putem lăsa la o parte. *Aristotel* face aluzie aici la așa-numitele „numere figurative" ale pitagoreicilor. În realitate tradiția ne spune că ei ar fi definit unitatea (μονας) ca un punct fără poziție (στιγμή ἄθετος) și, respectiv, un punct (στιγμή) ca unitatea care are o poziție (μονας θέσιν ἔχουσα) (*Aristotel, Metafizica*, Δ6, p. 1016 b 24—31; M. 8, p. 1084 b 25, de Anima I, 4, p. 409 a 6).

Prin numere figurative se înțeleg, în plan, numerele triunghiulare, numerele pătratice, numerele oblonge.

1. Numere triunghiulare.

Pietricelele sau punctele se pot înșira în triunghiuri în felul următor.

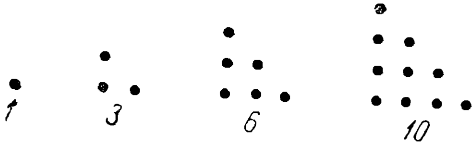


Fig. 20.

Din această înșirare rezultă imediat că prin folosirea a două feluri de pietre fiecare pereche de triunghiuri egale formează împreună un număr „oblong" în formă de dreptunghi în care o latură este mai mare cu 1 decît cealaltă (fig. 21).

Numerele oblonge sînt așadar de forma $n(n+1)$ sau chiar de forma $n(n-1)$, ceea ce înseamnă același lucru. Șirul lor este deci:

$1 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 4$	$4 \cdot 5$	$5 \cdot 6$	. . . . $n(n+1)$
2	6	12	20	30	. . . .

Numerele triunghiulare sînt, evident, jumătăți din numerele oblonge, deci sînt de forma $\frac{1}{2}n(n+1)$. În consecință șirul lor este:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}(1\cdot 2) & \frac{1}{2}(2\cdot 3) & \frac{1}{2}(3\cdot 4) & \frac{1}{2}(4\cdot 5) & \frac{1}{2}(5\cdot 6)\ \ldots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \end{array}$$

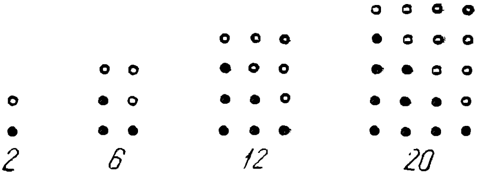


Fig. 21.

Pe de altă parte rezultă clar din „figura" lor că numerele triunghiulare reprezintă sumele primelor numere naturale. Adică, avem:

$$1 = 1,\quad 1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,$$

$$1+2+3+4+5=15,\ \ldots\ldots\quad 1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

Astfel s-a obținut suma șirului numerelor naturale, cel mai simplu exemplu de progresie aritmetică.

2. *Numere pătratice și oblonge* (ἑτερομήκης) — gnomoni (cf. *Aristotel, Fizica,* III, 4p, 203 a 13—15).

Dacă formăm șirul numerelor pătratice unul după altul, se vede ușor că fiecare număr rezultă din precedentul prin bordare (fig. 22).

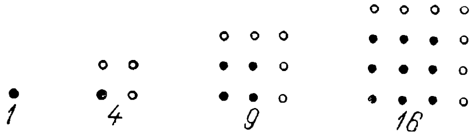


Fig. 22.

Această bordare, care din punct de vedere geometric este o figură reprezentînd diferența a două pătrate, dreptunghiuri sau paralelograme oarecare cu unghiurile egale, se numește, în limba greacă, *gnōmōn,* adică „arătător" (care permite să se „recunoască”, γνῶναι ceva). Cuvîntul provine de la indicatorul de umbră al ceasurilor solare, care în cazul cel mai simplu consta dintr-un baston înfipt perpendicular pe un plan orizontal (de aceea, κατὰ γνώμονα este și o expresie mai veche pentru „perpendicular”).

La numerele pătratice, atunci cînd se trece de la n^2 la $(n+1)^2$, gnomonul are valoarea $n + n + 1 = 2n + 1$. Șirul gnomonilor sau al diferențelor dintre numerele pătratice constă așadar din numerele impare:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 . . . . n^2, $(n+1)^2$

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 . . . . $2n+1$

Reciproc, însumarea numerelor impare dă, natural, numerele pătratice: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, ... Din punct de vedere geometric, la aceasta corespunde așezarea gnomonilor în jurul lui 1.

În mod absolut analog pot fi tratate numerele *oblonge* care, de fapt, în aritmetica pitagoreică sînt puse totdeauna alături de cele pătratice (fig. 23). Ele sînt de forma $n(n+1)$.

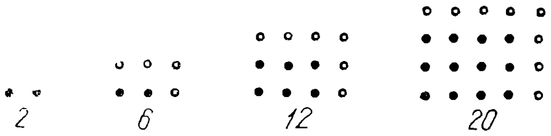


Fig. 23.

Aici gnomonul care trebuie adăugat la $(n-1)n$ are, evident, valoarea $n + n = 2n$, pentru a da $n(n+1)$. Așadar numerele oblonge au ca diferențe numerele pare:

2 6 12 20 30 . . . . $(n-1)n$, $n(n+1)$

4 6 8 10 . . . . $2n$

Reciproc, prin însumarea primelor numere pare sau, vorbind geometric, prin așezarea gnomonilor în jurul lui doi, se obțin numerele oblonge.

3. Adunarea numerelor pătratice

Într-un text babilonean, care fără îndoială provine dintr-o epocă tîrzie (epoca seleucidă, așadar elenistă), dar care ar putea avea un model mai vechi, suma numerelor pătratice se găseşte reprezentată în forma următoare, neobişnuită:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{1}{3}(1 + 2n) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots n).$$

Această formulă rezultă din figura următoare (fig. 24) care aici este reprodusă pentru $n = 4$, dar se poate, desigur, generaliza pentru un număr oarecare (reconstituire de *J. E. Hofmann*).

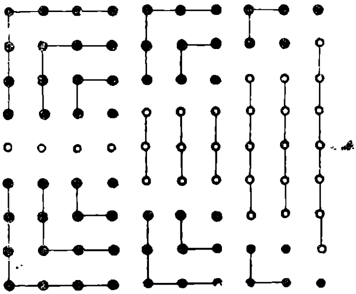


Fig. 24

Dreptunghiul mare conţine în total $(1 + 2n) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ pietre. O treime din ele este albă, celelalte două treimi, care constau fiecare din pătratele $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3 \ldots n \cdot n$, sînt negre. Dacă se descompun pătratele în gnomonii lor, atunci se vede că aceştia reapar, puşi în evidenţă, în şirurile transversale de pietre albe. (În figura noastră, adică pentru $n = 4$, există 4 gnomoni la o piatră, 3 gnomoni la 3 pietre, 2 gnomoni la 5 pietre şi un gnomon la 7 pietre.)

5. Învăţătura despre par şi impar

În legătură cu concepţia despre lume a *pitagoreicilor*, bazată pe distincţia dintre cele infinite şi cele limitante (τὰ ἄπειρα, τὰ περαίνοντα), distincţie exprimată, de pildă, în fragmentele lui *Philolaos* (pe care le vom cita mai tîrziu în legătură cu chestiuni mai principiale), întîlnim opoziţia dintre par şi impar (ἄρτιον — περισσόν).

Noţiunile „par-impar" se întîlnesc prima dată la autorul de comedii *Epiharm* (aproximativ anul 500 î.e.n., la Siracuza); tot aici se găseşte o aluzie la reprezentarea numerelor prin pietricele.

Epiharm (*fragm.* B2 [Diels]) :

Dacă cineva vrea să adauge o piatră (ψᾶφος) la un număr impar sau chiar la unul par, sau să ia o piatră dintre cele care există — crezi oare că numărul o să mai rămînă la fel?

Philolaos însuși spune însă (*fragm.* B5 [Diels]) :

Numărul are într-adevăr două forme deosebite, par, impar și o a treia, născută din amestecul celor două, par-impar (ἀρτιοπέριττον). Fiecare dintre cele două forme are însă multe înfățișări, pe care orice lucru le arată de la sine însuși.

Pasajul următor din **Aristotel.** *Fizica* (III, 4, 203 a, 10—15) face legătura dintre noțiunile opuse „finit-infinit" și „par-impar".

Pitagoreicii admiteau că infinitul este identic cu parul. Căci el ar oferi lucrurilor infinitul, fiind în el însuși desprins și limitat de impar. Aceasta s-ar dovedi prin ceea ce se întîmplă cu numerele. Dacă gnomonii sînt așezați împrejur, mai întîi în jurul unității și apoi astfel încît unitatea să fie exclusă, atunci figura care apare este într-un caz (al doilea) totdeauna diferită, în celălalt caz (în primul) este însă totdeauna aceeași.

Acest pasaj dificil este explicat de (Pseudo?) **Plutarh** în **Stobeu**, *Eclogae*, I, pr. 10, p. 22, 16 W(= *școala pitagoreică*, 28, [Diels]) :

Dacă în jurul unității se așază ca gnomoni numerele impare succesive, numărul care rezultă este pătratic; dacă din contră numerele pare se așază împrejur tot ca gnomoni, rezultă simple numere oblonge și de forme neegale; nici unul dintre ele nu este însă un număr înmulțit cu el însuși.

Așadar este vorba, evident, de producerea pătratelor, așa cum s-a arătat mai sus, ca sumă de numere impare și de producerea numerelor de forma $n(n + 1)$ ca sumă de numere pare. (De fapt pătratele sînt asemenea între ele; din contră dreptunghiurile, ale căror laturi sînt în raportul $n : (n + 1)$, nu sînt asemenea.)

Această preocupare a pitagoreicilor privitoare la numerele pare și impare a dus, evident, chiar de timpuriu, la mijlocul sau chiar în prima jumătate a secolului al V-lea (nu știm precis) la formarea unei „învățături despre par și impar" ca teorie sistematică la care *Platon* face adesea aluzie. Această teorie ni s-a păstrat corect expusă — deși, fără îndoială, parțial alterată din cauza reelaborării —

la sfîrşitul cărţii a noua a *Elementelor* lui *Euclid*. Negreşit că includerea ei în această carte se datorează unui interes istoric; căci ea nu se încadrează de loc aici în expunerea sistematică pe care Euclid o face aritmeticii. În acelaşi timp această teorie este cel mai vechi exemplu de *„mathema"* grecească, fragment didactic de deducţie, foarte interesant chiar şi din acest motiv.

Definiţiile 6—9, 12 din *Elemente*, VII, trebuie să preceadă propoziţiile din *Elemente*, IX, 31—34.

Definiţia 6: Număr par este acela care se poate împărţi în părţi egale.

Definiţia 7: Număr impar este acela care nu se poate împărţi în două părţi egale sau care diferă de un număr par cu o unitate.

Definiţia 8: Număr par ori par este acela pe care un număr par îl măsoară după un număr par.

Definiţia 9: De par ori impar este acela pe care un număr par îl măsoară după un număr impar.

Definiţia 12: Numere prime între ele sînt acelea care au ca măsură comună numai unitatea.

Elemente, IX, 21. Dacă se adună oricîte numere pare, suma este pară.

22. Dacă se adună oricîte numere impare, iar mulţimea lor este pară, atunci şi suma va fi pară.

23. Dacă se adună oricîte numere impare, iar mulţimea lor este impară, atunci şi suma lor va fi impară.

24. Dacă dintr-un număr par se scade un număr par, restul va fi par.

25. Dacă dintr-un număr par se scade un număr impar, restul va fi impar.

26. Dacă dintr-un număr impar se scade un număr impar, restul va fi par.

27. Dacă dintr-un număr impar se scade un număr par, restul va fi impar.

28. Dacă un număr impar înmulţind pe unul par face un număr oarecare, produsul va fi par.

[Căci: un număr impar a înmulţind numărul par b să facă c; afirm că c este număr par. Într-adevăr, deoarece a înmulţind pe b a făcut c, prin urmare c se compune din atîtea numere egale cu *b* cîte unități sînt în *a* (VII, def. 15). Și *b* este par; deci *c* se compune din numere pare. Dacă se adună oricîte numere pare, atunci suma este pară (IX, 21); așadar *c* este număr par.]

29. Dacă un număr impar înmulțind un număr impar face un număr oarecare, produsul va fi impar.

30. Dacă un număr impar măsoară un număr par el va măsura și jumătatea aceluia.

[Căci: Un număr impar *a* să măsoare numărul par *b*; afirm că el va măsura și jumătatea aceluia.

Într-adevăr, deoarece *a* poate pe *b* să-l măsoare după *c*; afirm că *c* nu este impar. Căci dacă se poate, să fie impar și fiindcă *a* măsoară pe *b* după *c*, deci *a* înmulțind pe *c* a făcut *b*. Prin urmare *b* se compune din numere impare, a căror mulțime este impară. Deci *b* este impar (IX, 23); ceea ce este absurd; fiindcă s-a presupus că este par. Prin urmare *c* nu este impar; așadar *c* este par. Astfel că *a* măsoară pe *b* de un număr par de ori. Din aceeași cauză va măsura și jumătatea aceluia (VII, def. 6).]

31. Dacă un număr impar este prim cu un număr oarecare, el va fi prim și cu dublul aceluia.

[Căci: fie un număr impar *a* prim cu un număr oarecare *b*; și fie *c* dublul lui *b*. Afirm că *a* este prim cu *c*.

Căci dacă nu sînt prime, le va măsura un număr oarecare (VII, def. 12). Să le măsoare, și fie *d* acest număr. Și *a* este impar deci și *d* impar (IX, 28). Și fiindcă *d* fiind impar măsoară pe *c*, iar *c* este par, prin urmare *d* va măsura și jumătatea lui *c* (IX, 30). Dar *b* este jumătatea lui *c*; *d* măsoară deci pe *b*. Dar măsoară și pe *a*. Prin urmare *d* măsoară pe *a*, *b*, care sînt prime între ele; ceea ce nu se poate. Deci nu se poate ca *a* să nu fie prim cu *c*. Așadar *a*, *c* sînt prime între ele.]

32. Fiecare dintre numerele obținute prin dublarea continuă, începînd cu doi, este un număr numai de par ori par.

33. Dacă un număr are jumătatea impară, el este numai de par ori impar.

[Fie jumătatea lui *a* un număr impar. Afirm că *a* este numai de par ori impar.

Dar este evident că el este de par ori impar fiindcă jumătatea lui, fiind impar, îl măsoară de un număr par de ori (VII, def. 9). Mai afirm că el este numai de par ori impar, căci dacă *a* este și de par ori par, un număr par îl va măsura de un număr par de ori

(VII, def. 8) ; astfel că și jumătatea aceluia o va împărți un număr par, deși ea este impară (VII, def. 6) ; ceea ce este absurd. Așadar *a* este numai de par ori impar de ori.]

34. Dacă un număr (par) nu este nici dintre cele obținute prin dublarea continuă începînd cu doi, nici nu are jumătatea impară, el este atît de par ori par cît și de par ori impar.

[Căci: un număr *a* (par) să nu fie nici dintre cele obținute prin dublare continuă începînd cu doi, nici să nu aibă jumătatea impară ; afirm că *a* este atît de par ori par cît și de par ori impar de ori.

Dar este evident că *a* este de par ori par, fiindcă nu are jumătatea impară (VII, def. 8). Mai afirm că este și de par ori impar. Căci dacă înjumătățim pe *a*, apoi înjumătățim jumătatea și procedăm astfel continuu, vom ajunge la un număr oarecare impar, care va măsura pe *a* după un număr par. Căci, dacă nu, vom ajunge la doi, și *a* va fi dintre cele obținute prin dublarea continuă începînd cu doi ; ceea ce este contrar ipotezei. Astfel că *a* este de par ori impar (VII, def. 9). Dar s-a demonstrat că este și de par ori par. Prin urmare *a* este atît de par ori par cît și de par ori impar de ori.]

O demonstrație aritmetică pentru incomensurabilitatea laturii cu diagonala pătratului

De la formele conceptuale, care ne apar atît de primitive, ale aritmeticii diadice o cale ușoară duce la demonstrarea incomensurabilității laturii s a pătratului cu diagonala sa d, adică la demonstrarea imposibilității relației $d^2 : s^2 = 2$ sau $2s^2 = d^2$.

Ambele numere s, d pot fi totdeauna considerate ca nefiind amîndouă pare fără ca generalitatea să sufere. Altfel am putea divide prin 2 pe s și d în ambele părți ale ecuației pînă cînd cel puțin în una din părți nu ar mai fi posibil. Dacă d ar fi impar, atunci și d^2 ar fi tot impar, care totuși ar trebui să fie egal cu numărul par $2s^2$. Aceasta este imposibil. Dacă însă s, deci și s^2, este impar, iar d este par, atunci în stînga, conform propoziției IX, 33, avem un număr exclusiv impar de un număr par de ori ; la dreapta însă avem pătratul numărului par d care este, evident, par de un număr de ori. Astfel ajungem deci de asemenea la o contradicție.

Această demonstrație a imposibilității de a exprima în numere întregi raportul dintre rădăcina pătrată a lui 2 și unitate trebuie să fi fost cunoscută de pitagoreici încă de la mijlocul sau poate chiar din prima jumătate a secolului al V-lea. Raționamentul este așa de simplu încît chiar un matematician preelen l-ar fi putut face. Însă numai spiritul grec a fost în stare să-și dea seama de extraordinara valoare a acestei descoperiri a iraționalelor, descoperire cu urmări pînă în zilele noastre.

B. Fundamentarea matematicii mărimilor infinitezimale

1. Primele considerații asupra infinitului mic

Se pare că latura principială a problemei iraționalității a apărut prima oară în conștiința grecilor nu din considerații aritmetice, ci din analiza continuului în legătură cu problema infinitului mare (ca număr) și a infinitului mic (ca mărime). Primele considerații care ne-au fost păstrate în această privință provin de la **Zenon** din Eleea din prima jumătate a secolului al V-lea (*fragm.* B 1—3 [Diels]).

1. *Zenon* a explicat mai înainte infinitul ca mărime folosind aceeași argumentație. Mai întîi el arată că dacă ceea ce există nu posedă mărime, atunci acesta nici nu există. Apoi continuă astfel: ,,Dacă într-adevăr există, atunci fiecare unitate va avea cu necesitate o anumită dimensiune și grosime, și o parte din ea se va afla la o anumită distanță de o altă parte. Și același raționament se aplică la ceea ce este situat înainte (în această parte). Căci și aceasta va avea într-adevăr o dimensiune, deci o parte a acesteia va fi situată înainte. Aceeași afirmație este valabilă o dată pentru totdeauna. Căci la această unitate nici o parte nu va fi ultima și nu se va ajunge niciodată ca una din aceste părți să nu poată fi opusă altei părți. Deci dacă lucrurile (unitățile) sînt multe atunci ele trebuie să fie, cu necesitate, în același timp și mari și mici: atît de mici încît să nu aibă nici o dimensiune; atît de mari încît să fie nelimitat de multe.

2. În scrierea sa care conține multe argumentații, el arată în fiecare că acela care susține multiplul afirmă ceva contradictoriu. Una din aceste argumentații este următoarea: El vrea să arate că ,,dacă există multiplul, acesta trebuie să fie totodată și mare și mic, și anume mare pînă la infinit și mic pînă la neant”. Prin aceasta *Zenon* vrea să arate acum că un lucru, care nu posedă nici mărime nici grosime nici masă, în genere nu poate exista. ,,Căci dacă un lucru ar fi adăugat la altceva care există (așa sună cuvintele sale), atunci el nu l-ar mări

cu nimic. Căci dacă se va adăuga la altul ceva lipsit de dimensiuni, atunci acela nu poate cîştiga nimic în privinţa dimensiunilor. Şi astfel ceea ce s-a adăugat va fi egal cu nimic. Dacă, pe de o parte prin scăderea a ceva celălalt nu se va micşora cu nimic şi dacă, pe de altă parte, prin adăugare nu se măreşte, atunci, evident, şi ceea ce se adaugă şi ceea ce se scade sînt egale cu nimic". Şi aceasta Zenon n-o arată spre a desfiinţa Unul, ci pentru că fiecare din multele şi infinitele lucruri trebuie să aibă dimensiuni. Căci înaintea fiecărui lucru în parte, care se ia, trebuie iarăşi să fie totdeauna altceva din cauza divizării nelimitate. Aceasta o spune el după ce mai înainte a arătat că nimic nu posedă dimensiuni, pentru că fiecare lucru din cele multe este identic şi una cu sine însuşi.

3. La ce este nevoie de multă vorbă? Există chiar în scrierea lui *Zenon*. Acolo unde arată din nou că multiplicitatea include contradicţia mărginirii şi nemărginirii lucrurilor identice, el scrie textual următoarele:

„Dacă există multiplul, atunci în mod necesar există exact atîtea lucruri cîte sînt în realitate, nici mai multe, nici mai puţine. Dacă însă există atîtea lucruri cîte sînt, atunci ele ar trebui să fie (ca număr) mărginite.

Dacă multiplul există, atunci lucrurile care există sînt nemărginite (ca număr). Căci în permanenţă există alte lucruri între cele care există şi iarăşi altele între acelea. Şi astfel lucrurile care există sînt (ca număr) nemărginite".

Ideea exprimată în ultima propoziţie se găseşte de asemenea în următorul fragment al lui **Anaxagora** (B3, Diels).

Căci nici la ceva mic nu există ceva foarte mic, ci totdeauna ceva ce este mai mic (căci este imposibil ca ceva ce există [prin diviziune] să înceteze să existe) — însă şi la ceva mare există ceva şi mai mare.

Şi ca mulţime este egal cu ceea ce este mic; în sine însă fiecare lucru este şi mare şi mic.

2. Problema cvadraturii cercului

Aceste reflecţii, care capătă mai tîrziu o formă exactă în cele două axiome ale măsurii (măsura „multiplicativă" şi cea „divizivă") formulate mai întîi, probabil, de *Eudoxos*, au fost aplicate de către sofistul **Antifon** încă din secolul al V-lea la problema cvadraturii cercului, despre care ne informează *Simplicius, In Aristotelis physicam commentaria,* (p. 54, 20—55, 11, Diels) (fig. 25).

Antifon a construit însă un cerc şi a înscris un poligon înăuntrul cercului, unul din acele poligoane inscriptibile. Fie poligonul înscris, de pildă, un pătrat. Găsind apoi mijlocul fiecărei laturi a pătratului, el a dus drepte perpendiculare din aceste puncte pînă la arcul cercului, care, evident, au împărţit, respectiv, fiecare segment de cerc în două părţi egale. Unind prin drepte punctele de diviziune ale arcelor de cerc cu vîrfurile pătratului, au apărut patru triunghiuri, astfel că întreaga figură înscrisă în cerc a devenit octogon. Împărţind prin acelaşi procedeu în două părţi egale fiecare latură a octogonului, ducînd perpendiculare din punctele de diviziune ale laturilor pînă la circumferinţă şi unind punctele de diviziune ale arcelor cu extremităţile segmentelor împărţite, el a transformat poligonul înscris într-un poligon cu 16 laturi. Împărţind iarăşi laturile acestui poligon în acelaşi raport şi unind punctele de diviziune ale arcelor respective cu vîrfurile alăturate ale poligonului înscris, dublînd numărul laturilor poligonului înscris şi repetînd mereu procedeul, el credea că, în sfîrşit, la un moment dat după epuizarea suprafeţei[1] se va înscrie în felul acesta în cerc un poligon, ale cărui

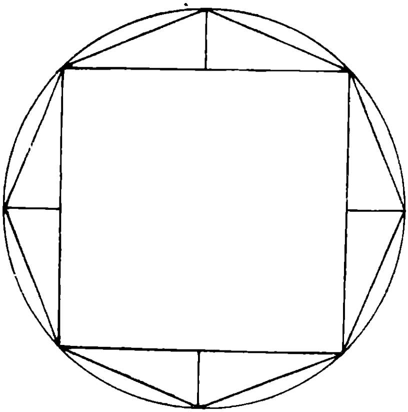


Fig. 25

---

[1] δαπανομένου τοῦ ἐπιπέδου (*exhausto plano*).

laturi din cauza micimii lor s-ar suprapune cu circumferința. Întrucît însă putem construi pentru fiecare poligon un pătrat egal, după cum am învățat în *Elemente*, și pentru că poligonul trebuie considerat egal cu cercul, cu care se suprapune, vom fi în stare astfel să construim pentru un cerc un pătrat egal.

În completare la aceasta găsim în **Themistius**, *in Aristotelis physicam commentaria*, p. 4, 2–8 [Schenkl] (cf. fig. 26):

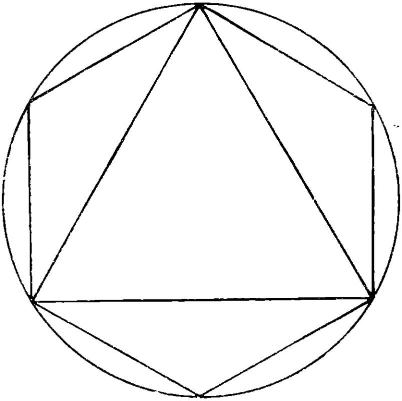


Fig. 26

(*Antifon*) a înscris în cerc un triunghi echilateral, a construit pe fiecare latură un alt triunghi isoscel pînă la circumferința cercului și, repetînd mereu procedeul, el credea că în sfîrșit la un moment dat latura ultimului triunghi, care este totuși rectiliniu, s-ar suprapune cu circumferința — deși, prin aceasta, el desființa diviziunea la infinit, pe care geometrul o admite ca principiu.

Ioannes Philoponos (*in Aristotelis physicam commentaria*, p. 31, 9–32, 3, [Vitelli], după ce indică aceeași construcție pe care o găsim și la Simplicius).

. . . astfel construim o figură cu multe vîrfuri. Dacă procedăm tot așa în continuare, ia naștere o figură cu vîrfuri foarte, foarte multe și foarte plate[1], care, prin dreptele adiacente, deoarece sînt foarte mici, vor ajunge să se suprapună cu cercul.

..... *Antifon* desființează (astfel) principiile geometrice ; căci este un principiu geometric că o dreaptă nu se suprapune niciodată cu un arc de cerc. El admite însă că din cauza micimii o anumită dreaptă s-ar suprapune cu un anumit arc de cerc.

Să adăugăm aici și cele două axiome ale măsurii menționate mai înainte (al căror autor este probabil *Eudoxos*), așa cum le formulează **Aristotel** în *Fizica*, VIII, 10 (266b, 2—4) :

Dacă adaug mereu ceva la un lucru limitat, atunci voi depăși pînă la urmă orice lucru limitat și dacă (într-un chip adecvat) scad ceva, atunci, tot așa, voi coborî (sub orice limită).

Trebuie comparat și pasajul din *Fizica*, III, 6, (206b 3—12) aparținînd altui context, anume în legătură cu analiza infinitului.

... Dacă însă se mărește raportul adaosului (făcut în etape succesive) (față de creșterea imediat anterioară) astfel încît adaosul cuprinde totdeauna aceeași cantitate, atunci cantitatea (care se completează) se termină, deoarece orice lucru limitat este epuizat printr-un lucru oarecare delimitat (anume cînd acesta este scăzut suficient de des din acela).

Tratarea problemei cvadraturii cercului a căpătat la pitagoreicul sau sofistul *Bryson* (care trebuie să fi fost ceva mai tînăr decît *Antifon*, dar mai bătrîn decît *Platon*) o nouă întorsătură, care se va dovedi mai tîrziu plină de însemnătate. Deosebit de importantă este apariția pentru prima oară a unui principiu al continuității precis formulat.

Bryson consideră nu numai poligoanele înscrise, ca *Antifon*, ci totodată și pe cele circumscrise, așa cum va face mai tîrziu *Arhimede*. Comentatorii lui Aristotel, *Alexandru* din Afrodisia (cunoscut prin intermediul lui *Joannes Philoponos*) și *Themistius* au redat argumentația lui *Bryson* în felul următor :

1. *Alexandru din Afrodisia* (în versiunea lui *Joannes Philoponos, in Aristotelis Analyticam posteriorem comment.*, pp. 111, 21 urm., Wallies) :

Cercul este mai mare decît orice poligon înscris în el și este mai mic decît orice poligon circumscris lui... Dar și figura rectilinie situată între o anumită figură rectilinie înscrisă și o anumită figură rectilinie circumscrisă este mai mică decît cea circumscrisă și mai mare decît cea înscrisă. Însă ceea ce este în același timp mai mare, respectiv mai mic decît același lucru, este egal cu acel lucru ; cercul este așadar egal cu poligonul situat între poligonul înscris și cel circumscris. Noi însă avem posibilitatea de a construi pentru orice figură rectilinie dată un pătrat cu aceeași arie ; așadar este posibil să construim un pătrat de aceeași arie cu cercul.

---

[1] πολυγωνότατον σχῆμα μικράς πάνυ ἔχον γωνιας.

2. *Themistius* (*in Aristotelis Analyticam posteriorem comment.*, pp. 19, 13 urm., Wallies) :

Cercul este mai mare decît toate poligoanele înscrise și mai mic decît cele circumscrise. În același mod se comportă și poligonul construit între poligonul înscris și cel circumscris. Așadar față de aceleași figuri și cercul și acest poligon (intermediar) sînt respectiv mai mari și mai mici ; prin urmare ambele sînt egale conform principiului citat.

Acest principiu este astfel formulat (*loc. cit.*, pp. 19, 7—12) ;

Bryson a folosit următoarea axiomă, desigur adevărată dar generală (κοινόν) : ,,Acele figuri față de care aceleași figuri sînt respectiv mai mari sau mai mici, sînt egale între ele ,,(ὧν τὰ αὐτὰ μείζω καὶ ἐλάττω, ἐκεῖνα εἶναι ἶσα ἀλλήοις).

Tocmai pentru că el a folosit o axiomă desigur adevărată, dar nu specific geometrică, cvadratura cercului, aparținînd lui *Bryson*, a fost calificată de *Aristotel* ca ,,sofistică", Cf., în afară de *Analitica secundă*, I, 9 (75b, 37—76a, 3), la care se referă comentariile, și *Respingerile sofistice*, 11 (171b, 12—18 ; b34—172a, 7).

Forma citată a axiomei ,,continuității" subliniază unicitatea figurii situate între cele două grupe de poligoane. Existența ei este expusă mai clar în următoarea formulare provenită de la Proclos și reprodusă după relatarea elevului său, *Ammonios Hermeiou*, de către *Joannes Philoponos* (*in Analyticam posteriorem comment.*, p. 112, 20—24).

Proclos spunea că *Bryson* a efectuat cvadratura cercului în felul următor : cercul, spune *Bryson*, este mai mare decît orice poligon înscris și mai mic decît orice poligon circumscris. Cînd însă în comparație cu ceva există ,,mai mare" și ,,mai mic", față de acel ceva există și ,,egal". Dar poligoane mai mari şi mai mici decît cercul există, aşadar există şi un poligon egal cu cercul.

Aceasta este formularea unui autor din secolul al V-lea e.n. (*Proclos* a trăit în perioada 410—485). Noi posedăm însă chiar de la **Platon**, în *Parmenide*, 161 d, o enunţare cu totul asemănătoare:

Celui ce are proprietatea de a fi mare şi mic i se poate atribui şi proprietatea de a fi egal, care este situată între ele (ὅτω ἄρα μέγεθος καί σμικρότης, ἔστι καὶ ἰσότης αὐτῶ μεταξύ τοῦτοιν οὖσα).

Acest principiu al continuităţii în accepţia existenţială, care i s-a dat la urmă, corespunde aproape întocmai axiomei continuităţii a lui *Dedekind*.

Filozofii şi matematicienii antici erau conştienţi însă şi de graniţele în cadrul cărora este valabil principiul continuităţii. Aristotel discută problema în Cartea I din *Metafizica*. Iată cîteva pasaje caracteristice:

Aristotel, *Metafizica* I, 5 (1056a, 3—24): Egalul este situat între mare şi mic (se subînţelege: mai mare şi mai mic)...; este opoziţia privativă[1] faţă de amîndouă (adică ceva care nu este nici mai mare nici mai mic)... Este vorba însă nu de o negaţie necesarmente privativă; căci egalul nu este tot ce nu este mai mare sau mai mic, ci numai acela căruia aceea (adică proprietatea de a fi mai mare sau mai mic) i se atribuie conform *naturii* lui.

Aşadar egalul este ceea ce nu este nici mai mare nici mai mic, însă prin firea sa poate fi mai mare sau mai mic, şi este opus acestora două ca o negaţie privativă; din această cauză egalul este situat între ele.

În rezumat (*Metafizica*, I, 7, 1057b, 32—34):

Este acum evident că tot ce este intermediar aparţine aceluiaşi gen, se află între contrarii şi se compune din ele.

Aşadar condiţia decisivă pentru valabilitatea principiului continuităţii este faptul că la trecerea de la mai mare la mai mic rămînem înăuntrul aceleiaşi speţe.

---

[1] Privaţiunea (στέρησις) indică o restricţie logică, sub raportul sferei. Astfel şi noţiunea de clipă (*instans*) este o restricţie a celei de durată (*duratio*) *în aceeaşi serie de noţiuni*. Negaţiile indică opoziţia dintre noţiuni, neantul fiind o negaţie a existenţei, iar repausul o negaţie a mişcării — *C. V.*

Aceasta a spus-o foarte clar și **Proclos** în *Comentariu asupra lui Euclid* (p. 234, 12–19):

Nu s-ar putea oare ca cineva să se întrebe îndoindu-se (διηπόρησεν) dacă nu cumva nu ar fi posibil în anumite cazuri ca două linii drepte să fie egale între ele? Și anume chiar în cazul acelor figuri geometrice, la care există desigur inegalitate, însă nu totdeauna egalitate? Căci noi vom afla chiar că un unghi corniform (adică un unghi format de tangentă) este totdeauna neegal cu un unghi ascuțit și niciodată egal, și, la fel, unghiul (interior mixtiliniu) al semicercului (cf. *Euclid*, *Elemente*, III, 16). Și trecerea de la mai mare la mai mic nu se efectuează deci peste tot prin ceea ce este egal.

Ultima formulare poate fi comparată cu ceea ce spune **Platon** însuși în *Parmenide* (165 a) (pentru cazul normal al trecerii continue):

Căci nu s-ar trece de la mai mare la mai mic înainte de a ajunge la intermediar; dar acesta ar putea fi desigur egalul[1].

(Textual *Platon* vorbește despre „aparența egalității"; aceasta este în legătură cu contextul filozofic al argumentării sale, care nu prezintă interes pentru problema noastră.)

În alt pasaj (pp. 121, 12–122, 20; 124, 2–125, 3) **Proclos** discută natura unghiului și temeiul incomparabilității anumitor unghiuri, cum sînt cel ascuțit și cel corniform.

Unii dintre vechii autori consideră unghiul ca făcînd parte din categoria relației și îl definesc ca înclinație reciprocă a liniilor sau suprafețelor; alții îl introduc în categoria calității, ca linia dreaptă și linia frîntă, și îl numesc ca atare pe o suprafață sau la un corp, iar alții îl raportează la cantitate și admit că el este o suprafață sau un corp. Căci unghiul plan este împărțit printr-o linie, unghiul în spațiu este împărțit printr-o suprafață. Ei susțin însă că ceea ce este împărțit prin acestea nu este altceva decît o cantitate, și anume nu o linie, căci linia este împărțită printr-un punct; rămîne deci ca el să fie sau o suprafață, sau un corp. Dar dacă unghiul este o cantitate și toate „cantitățile omogene", în măsura în care sînt limitate, stau într-un anumit raport una față de alta, atunci și toate unghiurile de același fel (cel puțin unghiurile plane) se găsesc unele față de altele într-un anumit raport, așadar și unghiul corniform față de cel rectiliniu. Însă cele ce se află într-un anumit raport pot prin multiplicare să se depășească una pe alta. Așadar ar trebui ca și unghiul corniform (multiplicat) să depășească pe cel rectiliniu, ceea ce este însă imposibil. Căci se poate demonstra că el rămîne mai mic decît cel rectiliniu. Și tot așa, dacă el este numai o calitate, precum căldura și frigul, atunci cum poate fi împărțit în părți egale? căci a fi egal și a fi neegal sînt proprietăți ale unghiurilor în aceeași măsură ca și ale cantităților, și în general posibilitatea diviziunii este în același mod un accident esențial pentru amîndouă. Dacă însă cele care, prin natura lor, au această posibilitate sînt cîtimi oarecare și nu calități, atunci este evident că nici unghiurile nu sînt calități. Căci calității i se atribuie mai multul sau mai puținul, și nu egalul și neegalul. Nu s-ar putea deci vorbi despre unghiuri neegale și despre un unghi mai mare sau mai mic, ci numai despre unghiuri neasemenea, și că unul este (unghi) mai mult și altul mai puțin. Că aceste propoziții sînt incompatibile cu existența matematică este evident pentru oricine...

---

[1] οὐ γαρ μετέβαινεν ἐx μεῖζονος εἰς ἔλάττον... πρὶν εἰς τὶ μεταξὺ ἐλθεῖν τοῦτο δ'εἴη ἄν φάντασμα ἰσότητος.

...Astfel deci și unghiul are neapărat nevoie de cantitatea dată prin mărime, dar are nevoie și de calitate, datorită căreia el are oarecum o formă proprie și o configurație concretă și, în sfîrșit, are nevoie și de relația dintre liniile care îl mărginesc sau suprafețele care îl cuprind. De-abia suma tuturor acestor categorii este unghiul și nu una singură dintre ele. El este divizibil și admite egalitatea și neegalitatea, datorită cantității sale, dar nu i se poate impune să admită un raport cu cantități de același fel, deoarece el mai posedă și o calitate proprie datorită căreia adesea unele unghiuri nu sînt comparabile cu altele, și nici pentru că înclinația fiind una singură, ea nu formează un unghi, întrucît cîtimea situată între liniile care se înclină una față de alta constituie esența unghiului. Așadar dacă luăm în considerație aceste distincții, vom rezolva dificultățile existente și vom găsi că esența proprie a unghiului nu constă, cum spune Apollonios, în contracția fie a unei suprafețe, fie a unui corp — chiar dacă aceste fapte contribuie totuși la determinarea esenței sale — ci constă în însăși suprafața contractată într-un punct, cuprinsă între linii înclinate (unele către altele), sau înconjurată de o linie înclinată față de ea însăși, sau constă în însuși corpul contractat sub plane înclinate unele către altele, pentru ca unghiul să fie determinat de această cantitate înzestrată cu o anumită calitate, generată printr-o astfel de relație, iar nu de cantitatea în sine, nici de calitate, nici numai de relație.

Comentatorii de mai tîrziu ai lui *Aristotel* sînt de acord în privința faptului că principiul continuității trebuie aplicat numai la mărimi de aceeași natură; asupra criteriului proprietății de a fi de aceeași natură, există însă controverse, *Proclos* și *Simplicius* găsesc criteriul în aplicabilitatea axiomei lui *Arhimede* în domeniul espectiv de mărime, *Ammonios* și *Joannes Philoponos* se bazează pe criterii figurative .Îndeosebi aceștia doi din urmă cred că pot să deducă incomparabilitatea suprafețelor mărginite de linii curbe și drepte din incomparabilitatea unghiurilor mixtilinii și rectilinii.

Simplicius, *în Aristotelis physicam comment.* (p. 59, 22—60,7):

Învățătorul nostru, *Ammonios*, spunea . . . că dreapta și circumferința cercului n-ar fi de aceeași natură. El spunea că ,,nu este de mirare că nu s-a găsit nici un poligon egal cu cercul, unde întîlnim această deosebire de natură și la unghiuri. Căci nu există nici un unghi rectiliniu care ar fi egal cu unghiul din semicerc sau cu diferența acestuia pînă la un unghi drept, așa-numitul unghi corniform. Și astfel nici pînă azi nu s-a găsit teorema (cvadratura cercului), căutată de atîția oameni vestiți, nici măcar de către Arhimede însuși''.

Eu am răspuns învățătorului nostru că de vreme ce totuși s-a putut efectua cvadratura lunulei și ea este de aceeași natură cu cercul, pentru că este compusă din arce de cerc, nimic nu împiedică — dacă se pune problema — ca să se efectueze și cvadratura cercului. Dacă însă nici lunula nu este de aceeași natură cu cercul din cauza cornurilor, atunci nici o lunulă nu este de aceeași natură cu o figură rectilinie oarecare — și totuși se poate efectua cvadratura lunulei. Unghiul semicercului și unghiul corniform, care sînt formate de arce de cerc și drepte, nu numai că nu sînt de aceeași natură cu orice unghi rectiliniu, dar nici nu se pot compara cu el (ἀσύμβλητοι). [Aceasta ar însemna că ele împreună cu unghiurile rectilinii nu formează un sistem ordonat arhimedic.] Din această cauză ceea ce s-a spus (de către *Ammonios*) nu constituie un temei suficient pentru a ne îndoi de aflarea cvadraturei cercului.

Simplicius și, desigur, chiar *Proclos* recunoscuseră în orice caz că valabilitatea principiului continuității presupune valabilitatea axiomei arhimedice. Se pare că ei înclină fără îndoială către părerea (greşită) că însăşi aplicabilitatea axiomei lui Arhimede atrage deja după sine continuitatea unei multiplicităţi.

Mai adăugăm încă o mărturie din evul mediu, o observaţie a lui **Joannes Campanus** din Navarra (în jurul lui 1270), din *Comentar asupra Elementelor lui Euclid III, 16*:

De altfel rezultă evident din această teoremă că acea demonstraţie de care *Bryson* s-a servit la cvadratura cercului, este eronată. Iată enunţul: „se trece de la mai mic la mai mare şi, invers, parcurgînd toate valorile intermediare; apoi se trece şi prin ceea ce este egal. Reuşim să găsim la un lucru existent fie mai marele, fie mai micul; deci reuşim să găsim şi egalul''.

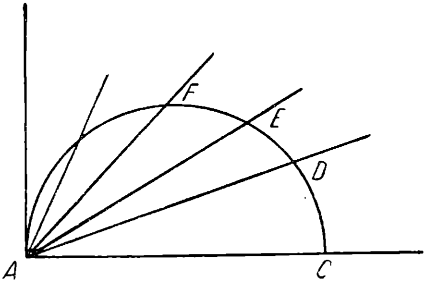


Fig. 27

S-ar putea construi cercul *ADC* (fig. 27), al cărui diametru *AC* se poate considera mişcîndu-se în jurul extremităţii fixe *A* prin punctele *D*, *E*, *F*, pînă cînd atinge cercul în *A*. Dacă se admite aceasta, atunci este evident că, atîta vreme cît dreapta *AC* taie cercul, ia naştere un unghi ascuţit, mai mic decît unghiul mixtiliniu al semicercului. În momentul în care încetează de a mai tăia cercul, se formează un unghi drept, mai mare decît acelaşi unghi al semicercului. Deoarece însă trecerea s-a făcut prin toate unghiurile rectilinii intermediare, greşeala acestei demonstraţii este evidentă.

Obiectiv vorbind, „trecerea de la mai mic la mai mare, şi invers, parcurgînd toate valorile intermediare'', corespunde aşa-numitului principiu al valorilor intermediare'', din teoria funcţiilor reale. Valabilitatea acestui principiu este şi după concepţia actuală, la funcţiile monotone, echivalentă cu continuitatea iar la *Bryson* şi *Campanus* trecerea este concepută, evident, ca desfăşurîndu-se monoton în timp.

Pentru lămurire urmează propoziția lui **Euclid** la care se referă comentariul lui *Campanus*, și pe care și comentatorii lui *Aristotel* o au mereu sub ochi în analizele pe care ei le fac.

Elemente, III, 16

O linie dreaptă dusă perpendicular la extremitatea diametrului cercului va cădea în afara cercului, și în intervalul dintre dreaptă și arc nu se mai poate interpune nici o altă dreaptă; unghiul

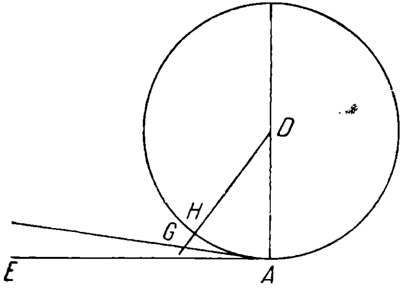


Fig. 28

semicercului este mai mare decît orice unghi rectiliniu ascuțit, iar cel rămas este mai mic...

... Afirm că în intervalul dintre dreapta *AE* și arcul *HA* nu se poate interpune altă dreaptă (fig. 28).

Dacă se poate, să considerăm o astfel de dreaptă interpusă. Atunci din punctul *D* să se ducă pe ea perpendiculara *DG*. Pentru că atunci *AGD* ar fi un unghi drept și *DAG* < dr. (ca parte din *DAE* = dr.), am avea *AD* > *DG* (I, 19). Însă *DA* = *DH*; așadar am avea *DH* > *DG*, iar segmentul mai mic (pentru că este o parte) ar fi mai mare decît segmentul mai mare; aceasta este însă imposibil. Așadar în intervalul dintre dreaptă și arc nu se poate duce nici o altă linie dreaptă.

Afirm că în plus și unghiul semicercului, anume acela care este cuprins între linia dreaptă *DA* și arcul *HA* (III, def. 7) este mai mare decît orice unghi ascuțit rectiliniu, însă unghiul rămas, cuprins între arcul *HA* și dreapta *AE* (așa-numitul unghi „corniform"), este mai mic decît orice unghi ascuțit rectiliniu.

Dacă însă un unghi rectiliniu oarecare ar fi mai mare decît acela cuprins între dreapta *DA* și arcul *HA* sau mai mic decît cel cuprins între arcul *HA* și dreapta *AE*, atunci s-ar putea interpune o dreaptă în intervalul dintre arcul *HA* și dreapta *AE*... Însă o astfel de dreaptă nu se poate interpune...

Demonstrațiile prin exhaustiune la Eudoxos

În sfîrșit marele **Eudoxos** a tras consecințele din cercetările lui *Antifon* și *Bryson*, pe care le-am descris. Cu demonstrațiile sale prin „exhaustiune", cum le numim noi astăzi pe drept cuvînt, el a pus baze precise teoriei măsurării ariilor mărginite de o linie curbă și a corpurilor mărginite de suprafețe curbe.

Pentru aceasta el s-a folosit de forma „divizivă" a axiomei măsurii (*Elemente*, X, 1) unde această formă apare ca teoremă dedusă din forma „multiplicativă", care se găsește în cartea a V-a, def. 4:

Considerînd două mărimi neegale (însă de aceeași natură), dacă din cea mai mare se scade o bucată mai mare decît jumătate sau jumătate, iar din rest se scade o bucată mai mare decît jumătate sau jumătate, și se repetă aceasta continuu, va mai rămîne o mărime care este mai mică decît mărimea considerată mai mică.

Ca exemplu să luăm demonstrația din *Elemente*, XII, 2

Elemente, XII, 1

Poligoanele asemenea înscrise în cercuri sînt între ele ca pătratele diametrelor.

Elemente, XII, 2

Cercurile sînt între ele ca pătratele diametrelor.

Fie *ABCD*, *EFGH* cercuri, iar *BD*, *FH* diametrele lor; afirm că cercul *ABCD*: cercul $EFGH = BD^2 : FH^2$ (cf. fig. 29 pentru cercul *EFGH*).

Dacă cercul $ABCD : EFGH$ nu $= BD^2 : FH^2$, atunci ar trebui să avem $BD^2 : FH^2 =$ cercul *ABCD*: o porțiune de arie, care ar fi sau $<$ sau $>$ cercul *EFGH*.

Mai întîi să fie așa față de o porțiune mai mică de arie *S*. În cercul *EFGH* să se înscrie pătratul *EFGH* (IV, 6); aici pătratul înscris $> \frac{1}{2}$ cercul *EFGH*. [Căci dacă se duc tangente la cerc prin punctele E, F, G, H, (III, 16, corolar), atunci pătratul $EFGH$ este jumătatea pătratului circumscris cercului (I, 41); cercul este însă $<$ decît pătratul circumscris (I, axioma 8), astfel încît pătratul înscris $EFGH > \frac{1}{2}$ cercul $EFGH$.] Să se împartă acum pe jumătate arcele EF, FG, GH, HE prin punctele K, L, M, N (III, 30) și să se ducă EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Fiecare din triunghiurile EFK, FLG, GMH, HNE este atunci mai mare decît jumătatea segmentului circular respectiv. [Căci dacă ducem tangente la cerc prin punctele K, L, M, N și completăm paralelogramele de pe dreptele EF, FG, GH, HE, atunci fiecare din triunghiurile EKF, FLG, GMH, HNE va fi jumătate din paralelogramul respectiv; segmentul respectiv este mai mic decît paralelogramul, așa încît fiecare din triunghiurile EKF, FLG, GMH, $HNE > \frac{1}{2}$ segmentul circular respectiv.] Așadar împărțind pe jumătate arcele rămase, ducînd drepte și repetînd continuu procedeul, ne vor rămîne în sfîrșit segmente de cerc, care împreună sînt $<$ diferența dintre cercul $EFGH$ și porțiunea de arie S. Căci s-a arătat în prima teoremă a cărții a X-a că fiind date două mărimi neegale (de aceeași natură), dacă din cea mai mare scădem mai mult decît jumătate, iar din rest mai mult decît jumătate, și repetăm

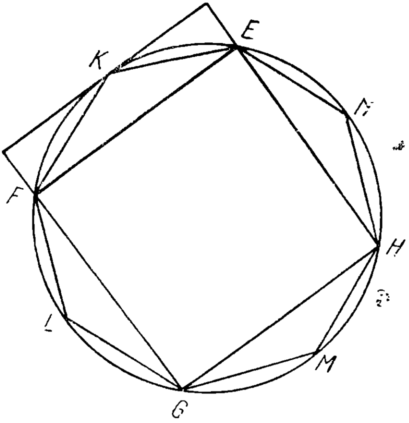


Fig. 29

continuu operația, va rămîne la un moment dat o mărime care este mai mică decît mărimea mai mică dată (*Elemente*, X, 1).

Fie așa și segmentele cercului $EFGH$ rămase pe EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE să fie împreună $<$ decît diferența dintre cercul $EFGH$ şi aria S. Poligonul care mai rămîne $EKFLGMHN$ ar fi atunci $>$ aria S. Să se înscrie și în cercul $ABCD$ un poligon $AOBPCQDR$ asemenea cu poligonul $EKFLGMHN$; atunci $BD^2 : FH^2 =$ poligonul $AOBPCQDR$: poligonul $EKFLGMHN$ (XII, 1). Însă ar mai trebui să avem și $BD^2 : FH^2 =$ cercul $ABCD$: aria S; așadar am avea cercul $ABCD$: aria $S =$ poligonul $AOBPCQDR$: poligonul $EKFLGMHN$ (V, 11); și, schimbînd, cercul $ABCD$: poligonul înscris $=$ aria S: poligonul $EKFLGMHN$ (V, 16). Dar cercul $ABCD >$ poligonul înscris în el (I, axioma 8); așadar și aria $S >$ poligonul $EKFLGMHN$ (V, def. 5). În același timp ar trebui să fie mai mic; aceasta este imposibil. Așadar $BD^2 : FH^2$ nu $=$ cercul $ABCD$: o arie $>$ cercul $EFGH$. [La fel se poate arăta că și $FH^2 : BD^2$ nu $=$ cercul $EFGH$: o arie $<$ cercul $ABCD$.]

Mai afirm că nici $BD^2 : FH^2$ nu $=$ cercul $ABCD$: o arie $>$ cercul $EFGH$.

Căci dacă ar fi posibil, să se raporteze astfel către o arie S mai mare. Atunci ar fi, invers (V, def. 13), $FH^2 : DB^2 =$ aria S: cercul $ABCD$. Atunci am avea aria S: cercul $ABCD =$ cercul $EFGH$: o arie $<$ cercul $ABCD$ (V, 14); așadar am avea și $FH^2 : BD^2 =$ cercul $EFGH$: o arie $<$ cercul $ABCD$ (V, 11); ceea ce am demonstrat mai înainte că nu se poate. Așadar $BD^2 : FH^2$ nu $=$ cercul $ABCD$: o arie $>$ cercul $EFGH$. Dar s-a demonstrat mai sus că nici către o arie mai mică: așadar $BD^2 : FH^2 =$ cercul $ABCD$: cercul $EFGH$.

Euclid, respectiv *Eudoxos*, foloseşte în această demonstraţie principiul nedemonstrat că la trei mărimi date există totdeauna o a patra proporţională. Dar el nu valorifică acest principiu în demonstraţia din XII, 10 („orice con este a treia parte a cilindrului avînd aceeaşi bază cu el şi înălţime egală"). Căci această demonstraţie începe astfel:

„Dacă cilindrul n-ar fi triplul conului, atunci cilindrul va fi sau mai mare sau mai mic decît triplul conului". La fel argumentează *Arhimede* în cazurile corespunzătoare, de pildă la cvadratura segmentului de parabolă.

Este vorba însă, aici, de un anumit raport numeric (1 : 3). În XII, 2, dimpotrivă, raportul razelor ambelor cercuri este complet nedeterminat, aşadar, este posibil ca nici să nu se poată indica un raport în numere întregi. Se pare că *Euclid*, în această situație, se teme să formuleze disjuncția completă: raportul ariilor cercurilor este față de raportul pătratelor razelor sau egal, sau mai mare, sau mai mic.

3. Integrări prin metoda atomistă și prin metoda exhaustiunii

În antichitate, pe lîngă și înainte de demonstrațiile riguroase prin exhaustiune ale lui *Eudoxos*, au fost folosite alte procedee pentru determinarea ariilor și volumelor în cazul conturului curb, procedee bazate, evident, pe reprezentări atomiste ale spațiului. Un maestru în această privință a fost *Arhimede*, care relatează amănunțit despre aceasta în scrierea sa, adresată lui *Eratostene*, asupra „Metodei propozițiilor care se pot deduce din mecanică". Totuși considerații și mai primitive de același fel se mai păstrează într-un fragment al lui *Democrit* și în *Metrica* (Teoria măsurării) a lui *Heron* din Alexandria, care, deși aparține de-abia primului secol al erei noastre, a păstrat însă multe elemente primitive, chiar preelene.

Mai întîi vom prezenta un pasaj din preambulul la scrierea despre metodică a lui *Arhimede*, care redă poziția pe care o lua marele matematician față de propria sa metodă „mecanică" și totodată conține o importantă observație istorică.

Arhimede, *Opere*, ed. Heiberg (ed. a II-a, 428, 18—430, 9):

Arhimede salută pe Eratostene

Deoarece ... te-am cunoscut ca pe un distins cercetător și dascăl de filozofie care apreciază și chestiunile matematice, atunci cînd apar undeva, m-am hotărît să explic în această carte specificul unei anumite metode, datorită căreia vei fi în stare să rezolvi anumite chestiuni matematice cu ajutorul „mecanicii" (staticii). Sînt însă convins că metoda nu este mai puțin folositoare chiar pentru demonstrarea teoremelor. Căci unele chestiuni dintre cele care mi-au fost evidente din punct de vedere „mecanic", ulterior au fost demonstrate în mod geometric, deoarece punctul de vedere al acestei metode („mecanice") este lipsit de forța demonstrativă (riguroasă). Căci este mai ușor să dai o demonstrație, dacă în prealabil ai căpătat prin metoda „mecanică" o noțiune despre chestiune decît dacă nu ai nici o cunoștință prealabilă de acest fel.

De aceea la descoperirea acelor teoreme despre con și piramidă (pentru care Eudoxos a găsit mai întîi demonstrația) — anume că piramida este a treia parte din prismă și conul a treia parte din cilindrul cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime — va trebui să atribuim lui Democrit o parte nu mică de merit, căci el este primul care a enunţat teoremele despre aceste figuri, chiar dacă nu a dat demonstraţia lor.

Urmează acum fragmentul din *Democrit* care se referă la determinarea volumului conului, precum şi unele consideraţii înrudite ale lui *Heron*, apoi propoziţiile 1 şi 2 din lucrarea despre metodică a lui *Arhimede*, propoziţii care se referă la segmentul de parabolă şi la sferă.

Democrit (*Fragment* B155, [Diels]):

Dacă un con este secţionat printr-un plan paralel cu baza, cum putem oare considera ariile secţiunilor obţinute, egale sau neegale? Dacă sînt neegale, atunci ele vor face conul un corp neuniform, căci el este susceptibil de a avea multe secţiuni în formă de trepte; dacă, dimpotrivă, sînt egale, atunci şi secţiunile sînt egale şi conul va prezenta aspect de cilindru, pentru că va consta din cercuri egale, nu neegale, ceea ce este cu totul absurd.

Heron, *Teoria măsurării*, II (din preambul, p. 94,7—96,11; Schöne):

... Şi, în general, orice corp, a cărui grosime este arbitrară şi a cărui muchie laterală cade perpendicular pe bază, este măsurat astfel: se stabileşte aria bazei şi se înmulţeşte cu muchia laterală. De pildă, fie baza corpului o elipsă, dar să ne imaginăm o dreaptă de o lungime dată ridicată perpendicular pe planul elipsei prin mijlocul ei. Acum să se mişte figura elipsei în direcţia dreptei amintite, astfel ca centrul ei să alunece de-a lungul dreptei, planul elipsei rămînînd însă mereu paralel cu poziţia iniţială. Astfel va lua naştere o figură cilindrică care are ca bază elipsa menţionată. Despre o astfel de figură eu spun că are axa perpendiculară pe bază şi *se măsoară* în modul indicat mai înainte. Chiar dacă baza are o altă formă, dar axa este perpendiculară pe bază, figura se va măsura în mod asemănător, de aceea şi cilindrul *se măsoară la fel*. Şi chiar dacă axa corpului nu este perpendiculară pe bază, ci este înclinată, dar corpul este de aşa natură, încît secţiunile prin plane paralele cu baza sînt egale cu baza, şi dacă se dă înălţimea dusă din vîrful său pe bază, atunci corpul este determinat în acelaşi mod. Anume trebuie să se determine aria bazei sale şi să fie înmulţită cu înălţimea menţionată şi astfel se indică mărimea corpului. Dacă toate secţiunile obţinute în acest corp prin plane paralele cu baza sînt egale cu ea, atunci volumul corpului se obţine în felul următor[1]. Dacă se ridică pe bază o dreaptă perpendiculară sau înclinată şi în timp ce dreapta rămîne nemişcată, dar baza se mişcă în direcţia dreptei astfel încît punctul de pe bază se mişcă de-a lungul dreptei dar baza rămîne tot timpul mişcării paralelă cu poziţia iniţială, atunci un astfel de corp, fiind tăiat cu un plan paralel cu baza, va avea tot atîtea secţiuni egale cu baza, pentru că mişcarea bazei s-a efectuat rămînînd paralelă cu ea însăşi...

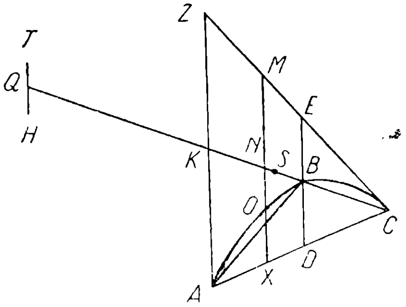


Fig. 30.

Arhimede, *In Eratosthenem methodus*, prop. 1 (fig. 30) :

Fie ABC segmentul mărginit de dreapta AC şi de un arc de parabolă ABC. Să tăiem AC în două părţi egale prin punctul D, să ducem DBE paralelă cu diametrul parabolei şi să unim A cu B şi B cu C.

Afirm că segmentul ABC este mai mare ca triunghiul ABC cu a treia parte din acelaşi triunghi.

(Demonstraţie:) Din punctele A, C să ducem dreapta AZ, paralelă cu DBE, şi tangenta CZ la parabolă, şi să prelungim CB pînă în K. Fie $KQ = CK$. Ne putem imagina dreapta CQ ca un braţ de pîrghie, cu mijlocul în K şi fie MX o paralelă arbitrară la DE.

---

[1] Vezi Observaţii (la sfîrşitul cărţii).

Pentru că CBA este o parabolă și CZ este tangentă, iar CD este semicoarda conjugată cu diametrul, atunci $EB = BD$, așa cum se arată în *Elemente* (adică în *Conicele* lui *Aristaios* și ale lui *Euclid*). Din această cauză și pentru că ZA, MX, ED sînt paralele, vom avea $MN = NX$ și $ZK = KA$. Pentru că $CA : AX = MX : XO$ și $CA : AX = CK : KN$ și $CK = KQ$ avem $QX : KN = MX : XO$.

Pentru că N este centrul de greutate al dreptei MX (deoarece $MN = NX$), dacă luăm segmentele de dreaptă TH și XO egale avînd punctul Q ca centru de greutate (deci $TQ = QH$), atunci dreapta TQH va fi în echilibru cu dreapta MX rămasă pe loc, pentru că dreapta QN este împărțită în raport invers cu greutățile TH și MX (în punctul K) și $OK : KN = MX : HT$. Așadar punctul K este centrul de greutate al sistemului format din ambele greutăți.

În mod asemănător, toate paralelele duse la ED în triunghiul ZAC, rămase pe loc, vor fi în echilibru stabil cu părțile lor, intersectate (de arcul de parabolă), dacă sînt deplasate către Q, astfel încît centrul de greutate al sistemului global să fie K. Și pentru că triunghiul CZA este constituit (συνέστηκεν) din paralelele duse în triunghiul CZA, iar segmentul ABC constă din dreptele luate în același mod ca XO, atunci triunghiul ZAC, rămas pe loc, va fi în echilibru față de punctul K cu segmentul de parabolă, al cărui centru de greutate va fi deplasat în punctul Q, astfel încît punctul K este centrul de greutate al sistemului global.

Acum să împărțim dreapta CK prin punctul S astfel încît $CK = 3SK$, deci S va fi centrul de greutate al triunghiului AZC (așa cum s-a demonstrat în altă parte). Pentru că, acum, triunghiul ZAC, rămas în poziția sa, este față de K în echilibru cu segmentul BAC al cărui centru de greutate este deplasat în punctul Q și pentru că S este centrul de greutate al triunghiului ZAC, triunghiul se comportă față de segment așa cum dreapta QK se comportă față de dreapta SK. Dar $QK = 3KS$, așadar triunghiul AZC va fi de trei ori mai mare decît segmentul ABC. Dar triunghiul AZC este de patru ori mai mare decît triunghiul ABC (pentru că $ZK = KA$ și $AD = DC$), așadar segmentul ABC este mai mare decît triunghiul ABC cu a treia parte din același triunghi.

Arhimede adaugă imediat, cu evident spirit autocritic:

„Ceea ce am expus mai înainte nu este demonstrat prin ceea ce am spus, dar pînă la un punct dă cel puțin ideea (ἔμφασις) că am ajuns la o concluzie adevărată. Deoarece ne dăm seama că propoziția nu este demonstrată, dar bănuim că este adevărată, noi vom prezenta la locul său demonstrația printr-o metodă geometrică (riguroasă), pe care noi înșine am găsit-o“ (cf. *Quadratura parabolae*, prop. 24).

Urmează acum deducerea „mecanică" a propoziției despre volumul sferei.

Arhimede, *In Eratosthenem methodus*, prop. 2 (prescurtat): Volumul sferei este egal cu două treimi din volumul cilindrului circumscris.

Să ne închipuim o pîrghie cu punctul de sprijin A și cu brațele de lungimi egale AB și AC. Cercul reprezintă o secțiune prin sfera al cărui volum îl vom determina. AEZ este secțiunea printr-un con, iar dreptunghiul construit pe ZE este secțiunea unui cilindru cu axa comună AC. Presupunem că $AC = CE = CZ$ (fig. 31).

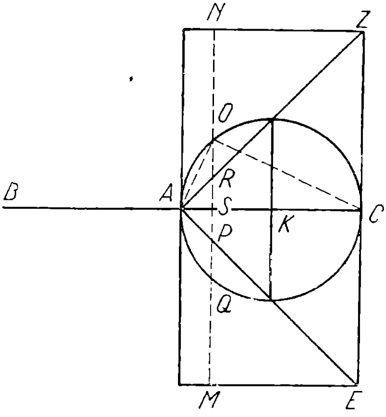


Fig. 31

Atunci, potrivit unor teoreme elementare, avem: $AS = SR = SP$; $AC = SN = BA$; $AO^2 = AS^2 + OS^2 = AS \cdot AC = AS \cdot SN$. Deoarece $BA = SN$, atunci $BA(AS^2 + OS^2) = AS \cdot SN^2$ și deci $BA \cdot (RS^2 + OS^2) = AS \cdot SN^2$.

Secțiunea sferei (proporțională cu OS^2, căci secțiunea este un cerc avînd OS ca rază) și secțiunea conului (proporțională cu SR^2) sînt împreună, deplasate și atîrnate în punctul B, în echilibru față de secțiunea cilindrului (proporțională cu SN^2), care „rămîne pe loc”, adică ne-o putem închipui adusă în punctul variabil S. Așadar conul și sfera deplasate și atîrnate în centrul lor de greutate B sînt în echilibru față de cilindru, care rămîne pe loc, adică acționează cu centrul său de greutate în K, unde avem $BA = 2AK$.

Volumul cilindrului este de trei ori mai mare decît al conului. Dacă deci volumul sferei este s, al conului k, al cilindrului z, atunci avem $k = \frac{1}{3}\ z$; $(k + s) : z = AK : BA = 1 : 2$. Deci $k + s = \frac{1}{2}\ z$; $\frac{1}{3} z + s = \frac{1}{2} z$, deci $s = \frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z = \frac{1}{6} z$.

Cilindrul z' circumscris sferei, deoarece raza lui este numai jumătate din raza cilindrului z (cu diametrul EZ), este egal cu $\frac{1}{4} z$, deci $z = 4z'$. Avem în consecință $s = \frac{1}{6} \cdot 4z' = \frac{2}{3} z'$. Volumul sferei este deci egal cu două treimi din cilindrul circumscris.

Arhimede, într-o altă scriere, *Cvadratura parabolei*, a determinat aria segmentului de parabolă bazîndu-se pe considerații statice, însă totodată dă o demonstrație riguroasă prin metoda exhaustiunii a lui *Eudoxos*. Merită să fie subliniată autocritica exprimată de marele geometru în preambulul acestei scrieri în legătură cu o supoziție pe care a folosit-o. Este vorba de axioma „arhimedică” a măsurii, care a fost utilizată și de *Eudoxos*.

Arhimede, *Cvadratura parabolei*, preambulul

Arhimede salută pe Dositheos

Auzind că a murit *Conon*, care mi-a arătat totdeauna o prietenie din inimă, și aflînd că ai fost prieten apropiat al lui *Conon* și că ești un matematician versat, am deplîns pe cel mort ca pe un prieten și admirabil matematician și m-am hotărît să-ți supun ție studiul asupra unei probleme, pe care voiam să-l trimit de fapt lui *Conon*, anume asupra unei probleme care pînă acum n-a fost încă atacată și de care eu m-am ocupat. Eu am găsit soluția problemei mai întîi prin metodele mecanicii, apoi prin metodele geometriei pure. Dintre cercetătorii care s-au ocupat mai mult cu geometria, unii au încercat să arate că ar fi posibil să construim o suprafață cu contur rectiliniu, care să fie echivalentă cu un cerc dat sau cu un segment circular dat. Apoi au încercat să arate același lucru pentru un segment de elipsă, dar pentru aceasta au folosit leme, al căror adevăr nu este de loc sigur. De aceea cei mai mulți au recunoscut că n-au rezolvat aceste probleme. Nu știu însă ca vreun matematician să fi încercat să efectueze cvadratura unui segment de parabolă, așa cum am reușit eu. Eu arăt că aria oricărui segment de parabolă este mai mare cu a treia parte din aria sa decît aria triunghiului care are aceeași înălțime și aceeași bază. Pentru demonstrație m-am servit de următoarea lemă: este posibil să găsim, pentru diferența dintre două arii date, un multiplu mai mare decît o arie oarecare dată. Și geometrii anteriori s-au servit de această lemă; căci ei s-au folosit tocmai de ea ca să demonstreze că aria cercului este proporțională cu pătratul razei, că volumul sferei este proporțional cu puterea a treia a razei și că volumul piramidei este a treia parte din prisma care are aceeași bază și înălțime cu piramida. Utilizînd o lemă asemănătoare, ei au arătat că volumul conului este egal cu a treia parte a cilindrului care are aceeași bază și aceeași înălțime. S-a văzut însă că fiecare dintre teoremele menționate prezintă tot atîta certitudine ca și teoremele care au fost demonstrate fără această lemă. Îmi este de ajuns dacă teoremele găsite de mine posedă același grad de certitudine. Acum am scris demonstrațiile și îți trimet mai întîi demonstrațiile construite pe bază mecanică, apoi pe cele construite pe bază geometrică. Ele sînt precedate de anumite propoziții elementare din geometria secțiunilor conice, necesare pentru demonstrație. Îți doresc sănătate!

Un al doilea document despre felul cum *Arhimede* apreciază natura matematicii, poate fi considerat următorul pasaj din preambulul la scrierea *Despre sferă și cilindru.* Aici marele geometru subliniază calitatea obiectivă a proprietăților geometrice de a aparține unei figuri independent de faptul că ele sînt sau nu cunoscute.

Mai înainte ți-am scris ție (*Dositheos*) ceea ce examinasem, împreună cu demonstrații... După aceea eu am ajuns la teoreme încă nedemonstrate și am efectuat demonstrațiile lor. Ele sînt următoarele: ... (urmează enumerare).

Aceste proprietăți aparțineau însă figurilor menționate datorită însăși naturii lor (αὐτῇ τῇ φύσει προυπῆρχεν); ele au rămas însă necunoscute acelora care s-au ocupat înaintea mea cu geometria. Dar pentru că mi-am dat seama că ele sînt specifice acelor figuri, n-am ezitat să le acord aceeaşi însemnătate ca acelora pe care le cunoscusem mai înainte şi ca acelora dintre teoremele demonstrate de Eudoxos despre corpuri, teoreme care contează ca fiind demonstrate cu cea mai mare certitudine... (urmează enumerare).

Căci şi aceste proprietăţi aparţineau de la natură figurilor dintotdeauna, şi, deşi au existat mulţi geometri remarcabili înainte de *Eudoxos*, totuşi ele au rămas toate necunoscute şi nici măcar nu au fost observate de vreunul dintre ei.

De aceea oricine poate este liber să examineze descoperirile mele ...

Urmează acum cvadratura unui segment de parabolă rezolvată de *Arhimede* în cazul că segmentul este delimitat de o dreaptă perpendiculară pe axă. Pentru aceasta se foloseşte metoda statică, dar se dă totodată şi o demonstraţie prin exhaustiune în sensul lui *Eudoxos*. Totuşi, după *Arhimede*, aceasta nu este o „demonstraţie geometrică" riguroasă; o astfel de demonstraţie găsim mai degrabă într-un pasaj ulterior din scrierea despre *Cvadratura parabolei* (prop. 24).

Arhimede, *Cvadratura parabolei*, prop. 14—17 (reprodusă în formă prescurtată după *B. L. van der Waerden*, *Ontwackende Wetenschap*, p. 242 şi urm.).

Trebuie să efectuăm cvadratura segmentului de parabolă *BC*, delimitat de dreapta *BC*, perpendiculară pe axă (fig. 32).

Fie *BD* paralelă cu axa parabolei şi fie *D* intersecţia cu tangenta la prabolă în punctul *C*. Să se împartă dreapta *BC* într-un număr arbitrar de părţi egale; prin punctele de diviziune *EZHI* se duc paralele la axă, care taie arcul parabolei în *F*, *Q*, *P*, *O*; aceste puncte se unesc cu punctul *C* prin drepte care taie paralelele în *K*, *L*, *M*, *N*, *X*.

Acum se demonstrează că triunghiul *BCD* este mai mic decît triplul sumei trapezelor *KE*, *LZ*, *MH*, *NI* şi a triunghiului *XIC* şi mai mare decît triplul sumei trapezelor *ZF*, *HQ*, *IP* şi a triunghiului *IOC*.

Pentru a demonstra acest lucru, se prelungeşte segmentul *BC* cu segmentul *BA* egal cu *BC* şi considerăm *AC* ca braţul unei pîrghii cu punct de sprijin în *B*. În *A* se pun ariile *R*, *U*, *V*, *W*, *D'* care sînt respectiv în echilibru cu trapezele *DE*, *ZS*, *TH*, *YI* şi cu triunghiul *XIC*. Ansamblul acestor arii va fi atunci în echilibru cu triunghiul *BCD* şi va constitui a treia parte din acest triunghi.

Există proporțiile:

$BA : BE = BC : BE = ES : EF =$ Trap. DE : Trap. KE
$BA : BZ =$ Trap. SZ : Trap. LZ
$BA : BH =$ Trap. TH : Trap. MH
$BA : BI =$ Trap. YI : Trap. NI

Atunci trapezele DE, SZ etc., dacă sînt atîrnate de vîrfurile lor din dreapta, vor fi în echilibru cu trapezele KE, LZ etc., atîrnate în A. Dacă însă nu sînt atîrnate de vîrfuri, ci de segmentele BE, EZ etc. atunci ele sînt în echilibru cu $RUVW$ etc. Prin urmare, ariile $RUVW$ etc. sînt mai mici decît trapezele KE, LZ etc. Așadar suma ariilor R, U, V, W, D' este mai mică decît suma trapezelor KE, LZ, MH, NI și a triunghiului IXC.

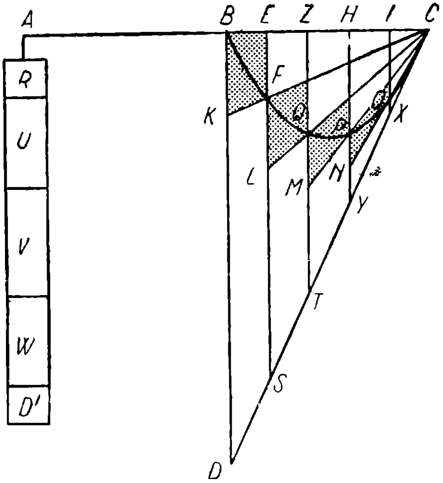


Fig. 32

Dar suma $R + U + V + W + D'$ era a treia parte din triunghiul BCD, deci a treia parte din acest triunghi este mai mică decît suma trapezelor KE, LZ etc. și a triunghiului IXC, care împreună se suprapun cu segmentul de parabolă.

Analog se demonstrează că a treia parte din triunghiul BCD este mai mare decît suma trapezelor FZ, QH, IP și a triunghiului ICO, care, toate, sînt situate în interiorul segmentului de parabolă.

Diferența între primul și al doilea șir de trapeze și triunghiuri este egală cu suma trapezelor mici BF, FQ, QP, PO și a triunghiului mic COX, prin care tocmai trece parabola. Această sumă este însă egală cu triunghiul BCK, care este o parte arbitrar de mică (în figură, o cincime) din triunghiul BCD.

Urmează demonstrația prin exhaustiune.

Să notăm segmentul de parabolă cu s și a treia parte din triunghiul BCD cu z; atunci avem de demonstrat că $s = z$. s este cuprins între două arii, s_1 și s_2, a căror diferență este o parte arbitrar de mică (ε) din triunghiul BCD, și s-a demonstrat „mecanic" că și z se află cuprins de asemenea între s_1 și s_2.

Așadar (1) $s_1 > s > s_2$, (2) $s_1 > z > s_2$, (3) $s_1 - s_2 = \varepsilon$. Să presupunem că avem $s > z$. Alegem: $\varepsilon < s - z$.
Atunci am avea: $s - z > \varepsilon = s_1 - s_2$; așadar: $s - z > s_1 - s_2$ și: $s > z + (s_1 - s_2) > s_2 + (s_1 - s_2) = s_1$, ceea ce contrazice (1).
Să presupunem că $s < z$. Alegem $\varepsilon < z - s$.
Atunci am avea $z - s > \varepsilon = s_1 - s_2$; așadar $z - s > s_1 - s_2$ și $z > s + (s_1 - s_2) > s_2 + (s_1 - s_2) = s_1$, ceea ce contrazice (2).
Așadar trebuie să avem $z = s$.

4. Analiza conceptului de infinitate și continuitate la Aristotel

a) *Infinitatea*

Considerațiile de mai sus asupra cvadraturii cercului și asupra integrării folosesc foarte mult conceptul de infinitate, fără a ne prezenta mai întîi o analiză principială a acestui concept care este fundamental pentru toată matematica superioară. Este meritul nepieritor al lui *Aristotel* de a fi dus pînă la capăt cercetarea — nedepășită în felul ei pînă astăzi — a caracterului logico-ontologic al infinității, încă în secolul al IV-lea e.n. Aceasta o face în Cartea a III-a din *Fizica* sa (cap. 4—8), din care prezentăm cîteva pasaje deosebit de caracteristice.

Teza decisivă a lui **Aristotel** este că infinitatea există numai în potențialitate, niciodată nu există în act.

III, 4 (p. 203 b 15—32)[1].

---

[1] A se consulta și traducerea în lb. română a lucrării lui Aristotel, *Fizica*, Editura Științifică, București, 1966, pp. 66—67 și următoarele. — *C. V.*

... Că există ceva infinit, aceasta rezultă din examinarea cel mult a cinci fapte: mai întîi din timp, căci este infinit; al doilea din diviziunea mărimilor, căci înșiși matematicienii folosesc infinitul; al treilea, deoarece devenirea și dispariția nu încetează niciodată din cauză că sursa din care provine ceea ce este în devenire este infinită; al patrulea, deoarece lucrul limitat are o limită numai în raport cu ceva, de unde rezultă, în mod necesar, că nu există limită propriu-zisă, dacă un lucru trebuie neapărat să fie totdeauna limitat de altul; al cincilea însă este faptul care în cea mai mare măsură și în sensul cel mai decisiv provoacă tuturor o dificultate comună: anume din cauză că în gîndire nu există sfîrșit, și numărul și mărimile matematice și ceea ce este dincolo de bolta cerului par să fie infinite; dacă și aceasta din urmă este infinită, atunci se pare că există și un corp infinit, precum și o pluralitate de lumi... Cercetările în legătură cu infinitul prezintă însă dificultăți, deoarece rezultă multe lucruri imposibile, fie spunînd că există infinitul, fie susținînd că nu există.

III, 6 (p. 206 a 9—207 a 10)

Este evident că dacă infinitul nu există absolut de loc rezultă multe lucruri imposibile; căci atunci ar exista și pentru timp un început și un sfîrșit, iar mărimile n-ar fi divizibile iarăși în mărimi și nici numărul n-ar fi infinit.

Dacă însă, după ce s-a stabilit că chestiunea stă astfel, se vede că nici una din cele două opinii nu pare acceptabilă, atunci este nevoie de un arbitru și este evident că infinitul într-un fel există și în alt fel nu există. Se spune că existența este în potențialitate și în act și că infinitul este posibil sau prin adăugare sau prin scădere. Am arătat însă că mărimea nu este infinită în act, dar că este infinită prin diviziune, căci nu este greu să respingi învățătura despre „liniile indivizibile”[1]. Așadar rămîne numai că infinitul există în potențialitate; nu este permis însă a lua existența potențială așa cum se face, de pildă, atunci cînd se consideră că un anumit material este o statuie în potențialitate pentru că va fi (odată și odată) statuie. Nu tot așa se va întîmpla cu ceva infinit în potențialitate: nu trebuie să presupunem că va fi infinit în act. Pentru că existența are multe înțelesuri, și noi spunem că infinitul ,,este'' în același sens în care spunem că ,,este ziuă'' sau ,,jocurile se desfășoară'', adică în sensul că ceva devine mereu altceva. Deosebirea între ,,a fi în potențialitate'' și ,,a fi în act'' se explică și aici: jocurile olimpice există în două sensuri, ca lupte care pot avea loc și ca lupte care au loc. Este evident că infinitul există atît în timp cît și relativ la (generațiile de) oameni și la diviziunea mărimilor, căci în genere infinitul constă în faptul că se ia mereu altceva și iarăși altceva, și în faptul că ceea ce se ia este totdeauna ceva limitat, totuși totdeauna altceva și mereu altceva. În consecință nu este permis să considerăm infinitul ca ceva concret determinat, cum este de exemplu un om sau o casă, ci așa cum se vorbește despre zi, despre sărbătoare, a căror existență nu are sensul de entitate, ci totdeauna sensul de ceva care apare și dispare și chiar dacă este de fiecare dată limitat, totuși este ceva diferit și mereu altfel; numai că la mărimi se întîmplă astfel încît ceea ce este luat de fiecare dată se conservă; dimpotrivă la timp și la oameni se întîmplă astfel încît dispar fără ca totuși să aibă loc o epuizare. Infinitul prin adăugare este oarecum același ca infinitul prin diviziune; anume la un lucru finit infinitul prin adăugare se realizează într-un mod invers (față de modul prin diviziune)[1]; căci întocmai așa cum vedem mărimea divizată la infinit, tot astfel părțile adăugate continuu una alteia par că tind spre o limită determinată. (Căci dacă la o mărime finită luăm din ea o parte și apoi adăugăm la această parte mereu în aceeași proporție[2], dar nu cuprindem de fiecare dată (în partea luată) aceeași cantitate a întregului inițial, atunci, negreșit, nu vom termina mărimea finită. Dacă, din contră, mărim proporția astfel încît să luăm totdeauna aceeași cantitate, atunci se va ajunge la sfîrșit, pentru că orice mărime finită va fi epuizată luînd din ea continuu orice cantitate finită oricît de mică). Aşadar nu în alt mod ci numai astfel infinitul există, anume în potenţialitate şi prin diminuare.

---

[1] Atribuită lui Platon și Xenocrate și, recent, lui Democrit (de către S. Luria). Subiectul este tratat mai pe larg de Aristotel în *Fizica*, VI, 1, 2 și *Metafizica*, A, 9, 992, a—22 (cf. T. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949, p. 107). — *N. T.*

---

[1] Pentru a înțelege raționamentul lui Aristotel, este suficient să ne gîndim la progresia geometrică descrescătoare $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ etc. și să considerăm progresia formată din numitori. (Nota lui H. Carteron la traducerea franceză, apărută în Les Belles Lettres, Paris, 1926, p. 104.) — *N. T.*

[2] Astfel încît fiecare parte este față de precedenta în același raport în care este partea luată prima oară față de întreg (cf. Heath, *Mathematics in Aristotle*, p. 106). — *N. T.*

Infinitul există în act numai în sensul în care spunem ,,există ziua" sau ,,jocurile au loc", şi în potenţialitate infinitul există în sensul în care vorbim despre materie şi nu ca lucru în sine şi pentru sine, aşa cum există un lucru definit. El există în potenţialitate şi prin adăugare (despre care tocmai spunem că într-un anumit fel este acelaşi cu infinitul prin diviziune); căci se poate lua totdeauna ceva în afară de el, totuşi nu se va depăşi toată cantitatea mărimii definite, aşa cum la diviziune se depăşeşte cantitatea întregului definit, şi devine din ce în ce mai mic. Dar în sensul că prin adăugare se depăşeşte totul, infinitul nu este posibil nici chiar în potenţialitate, afară de cazul că ar exista un infinit în act ca atribut în sensul în care filozofii naturii afirmă că este infinit corpul dinafara lumii, a cărui esenţă ar fi aerul sau ceva asemănător. Dar dacă un corp perceptibil prin simţuri nu este posibil să fie infinit în act, atunci este evident că nu va putea fi infinit potenţial nici prin adăugare, afară de cazul pe care l-am descris ca invers infinitului prin diviziune; căci şi Platon din această cauză a pus în evidenţă două infinituri, pentru că se pare că ajungem la infinit atît prin adăugare, cît şi prin diminuare; totuşi după ce a expus cele două infinituri, el nu le foloseşte, căci la numere infinitul nu există nici prin diminuare, deoarece unitatea este cea mai mică, nici prin adăugare, deoarece el merge numai pînă la decadă.

Rezultă însă că infinitul este tocmai contrariul a ceea ce se înţelege că este infinit; anume infinit nu este lucrul în afară de care nu mai există nimic, ci infinit este tocmai acel lucru care are totdeauna o parte din el în afară (de mărimea sa pentru moment); o dovadă despre aceasta este faptul că şi inelele care nu au nici o piatră se numesc infinite, căci se mai poate lua totdeauna un punct peste cel anterior. În acest caz se întrebuinţează, desigur prin analogie, o denumire improprie, căci pe de o parte trebuie să aibă loc tocmai ceea ce spuneam, iar pe de altă parte nu este permis să treci niciodată prin acelaşi loc încă o dată; la cerc însă nu se întîmplă aşa ceva, ci acolo succesorul este mereu altul. Aşadar infinit este acel lucru în afara căruia, dacă îl luăm ca o cantitate, totdeauna se mai poate lua o cantitate; însă acel lucru, în afara căruia nu există nimic, este complet și întreg, căci așa] definim noi întregul, anume ca lucrul căruia nimic nu-i lipsește...

III, 7 (p. 207, a 33—b 21; b 27—34)

Dimpotrivă rezultă că avem temeiuri să ne gîndim că prin adăugare se pare că nu există infinit care să depășească orice mărime, dar că prin diviziune există un astfel de infinit; căci infinitul, tocmai ca materia este cuprins înăuntru (a ceea ce îl cuprinde pe el), dar forma este cea care cuprinde. Un bun temei pentru aceasta este faptul că la număr există o limită în direcția celei mai mici cantități, în timp ce în direcția unei creșteri se poate depăși totdeauna orice cantitate. Dimpotrivă în ce privește mărimile, este posibil să se depășească orice mărime în direcția micimii, în timp ce în direcția creșterii nu există însă nici o mărime infinită. Cauza acestei situații se află în faptul că Unul este indivizibil, oricare ar fi el, așa cum, de exemplu, un om este un om și nu mai mulți oameni. Numărul însă este unul compus din mai multe unități sau o anumită cantitate de unități. În consecință, trebuie să ne oprim la indivizibil, căci doi și trei și la fel și celelalte numere sînt nume derivate: „mai multul" se poate concepe totdeauna, căci dihotomia continuă a mărimii este nelimitată, așa încît acest infinit există potențial, dar nu în act. Însă totdeauna numărul (de dihotomii) poate întrece orice număr determinat, dar el nu se poate separa de procesul de dihotomie continuă și infinitatea sa nu este staționară, ci este în devenire, ca timpul și număratul timpului. Cu mărimile se întîmplă însă contrariul; căci continuul se divide la infinit, dar în direcția creșterii nu există infinit, căci atît cît este posibil în potențialitate tot pe atît este posibil în act, așa încît, pentru că nu există nici o mărime preceptibilă infinită nici nu este posibil să existe o mărime care să depășească o mărime determinată căci, atunci, ar exista ceva care să fie mai mare decît bolta cerului... Acest raționament nu desființează concepția matematicienilor, întrucît ei neagă că infinitul există în act în sensul creșterii, înțelegînd prin aceasta ceva ce n-ar putea fi parcurs; căci și așa matematicienii nu au nevoie și nici nu întrebuințează infinitul astfel, ci ei cer ca linia dreaptă finită să fie oricît de lungă vor ei și ca atunci cînd se dă raportul în care se împarte cea mai mare mărime, orice altă mărime să poată fi împărțită în același raport. În consecință pentru demonstrație nu contează deosebirea între mărimi, existența însă este situată totuși numai în mărimile existente.

b) Problema continuității

A doua mare contribuție a lui **Aristotel**, cu influență asupra a tot ce a urmat, chiar dacă nu realizată în aceeași măsură ca analiza conceptului de infinitate, este în problema continuității, a analizei „continuului", care lui *Leibniz* încă i se părea ca „un labirint".

Aristotel a formulat concepția categorică după care infinitatea, ca și continuitatea, există numai „în potențialitate", deci ele nu posedă o actualitate propriu-zisă și de aceea rămîn totdeauna neterminate. Concepția fundamentală aristotelică despre infinitate și continuitate a rămas bunul obștesc, niciodată atacat, al tuturor matematicienilor (chiar dacă nu și al tuturor filozofilor), pînă cînd *Georg Cantor*, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, s-a opus acestei teze prin „teoria mulțimilor", în care el a luat în considerație multiplicități infinite în act.

Fizica, V, 3 (p. 226 b 18—227 b2)

După aceasta vrem însă să arătăm ce este „concomitent" și „separat" și ce este „în contact", „intermediar", „consecutiv", „contiguu" și „continuu", și căror lucruri li se pot atribui fiecare din acestea prin natura sa.

„Concomitent", se spune, după loc, despre lucrurile care se află într-un loc, în cel mai îngust sens al cuvîntului loc; „separat", însă, despre lucrurile care sînt ca atare într-un loc diferit; „în contact" se spune despre acele lucruri ale căror capete extreme sînt împreună; „intermediar", însă, este ceva la care ajunge în mod natural lucrul care se mișcă mai înainte de a ajunge la extrema la care în mod firesc tinde ceea ce se schimbă continuu. (Trebuie să existe însă cel puțin trei lucruri pentru ca să fie ceva „între"). În schimbare ultimul lucru este contrariul, continuu însă se mișcă lucrul care nu lasă loc, sau lasă numai foarte puțin o lacună în ceva, nu o lacună în timp (căci aici nimic nu împiedică o lacună, și nimic nu împiedică ca imediat după coarda cea mai joasă să sune coarda cea mai înaltă), ci tocmai în lucrul în care mișcarea are loc. Aceasta este evident atît în schimbările de loc cît și în celelalte. Pentru că însă orice schimbare are loc în opusul său, opusul constă atît în contrarii cît și în ceea ce se află în relație de afirmație și negație.

În relaţia de afirmaţie şi negaţie nu există însă nimic intermediar, astfel este evident că intermediarul va fi în contrarii. Contrariul din punctul de vedere al locului este lucrul care în linie dreaptă stă cel mai departe, deoarece linia cea mai scurtă este precis limitată, măsura însă este finitul determinat. Lucrul care, fiind îndată, după început, fie prin poziţie, fie prin formă, fie prin altceva, se numeşte ,,consecutiv'', dacă nu există nimic de aceeaşi specie între acesta şi acela căruia îi urmează imediat. Vreau să spun că, de pildă, unei linii îi succede iarăşi o linie sau linii, sau unei unităţi îi succede tot o unitate sau unităţi, sau unei case îi succede iarăşi o casă. Nimic nu împiedică însă ca ceva diferit să fie situat între acestea, căci consecutivul urmează imediat la o anumită distanţă şi oarecum mai tîrziu. (Căci unu nu este consecutiv lui doi, nici prima zi din lună nu succede celei de a doua zile, ci invers, acestea acelora.) ,,Contiguul'' este acel lucru care, fiind consecutiv altuia, este şi în contact cu antecedentul.

,,Continuul'' este desigur ceva ce este contiguu, dar eu folosesc termenul ,,continuu'' atunci cînd extremităţile fiecăruia din cele două lucruri, prin care ele vin în contact, devin unul şi acelaşi lucru, şi — după cum ne spune chiar cuvîntul (συνεχές, continuum) — ele se ţin împreună; ceea ce nu este însă posibil atîta vreme cît extremităţile sînt două. Aceasta fiind definiţia, este evident că aşa-zisul continuu există în acele lucruri care prin legare pot deveni unul singur în mod natural; şi oricare ar fi calea prin care ceea ce le ţine împreună există ca unitate, întregul va fi tot o unitate în acelaşi mod, fie că legătura se face cu ajutorul unui cui, prin lipire, prin ataşare sau prin creştere împreună. Este evident că după ordine mai întîi vine consecutivul; căci tot ce este în contact trebuie să fie cu necesitate consecutiv, nu însă orice consecutiv trebuie să fie cu necesitate în contact. (De aceea şi la lucrurile care noţional sînt anterioare, ca de pildă la numere, există mai degrabă consecutivul decît contactul). Şi dacă un lucru este continuu, atunci trebuie să existe contact; dimpotrivă, dacă există contact, aceasta nu este suficient pentru a garanta continuitatea. Căci extremităţile, deşi pot fi împreună din punctul de vedere al locului, nu sînt cu necesitate un singur lucru; dar dacă sînt un singur lucru ele trebuie în mod necesar să fie împreună. În consecinţă creşterea împreună se produce ulterior, căci extremităţile trebuie mai întîi să fie în contact, dacă urmează să crească împreună, dar nu tot ce este în contact crește împreună, în timp ce lucrurile care nu sînt în contact evident că nici nu cresc împreună. În consecință chiar dacă punctul și unitatea au, cum se spune, existențe separate, totuși nu este posibil ca punctul și unitatea să fie același lucru, căci punctele au contact, unitățile însă au numai succesiune și la primele poate exista intermediar, căci orice linie este între puncte, la celelalte însă aceasta nu este necesar, căci între doi și unitate nu este nimic. S-a spus deci ce este „concomitent" și „separat" și ce este „în contact", „intermediar", „consecutiv", „contiguu" și „continuu" și căror lucruri li se atribuie fiecare din acestea.

VI, 1 (p. 231 a 18–232 a 22)

Dacă însă continuul, contactul și consecutivul au înțelesul stabilit mai sus (continue sînt lucrurile ale căror extremități sînt una, iar în contact sînt lucrurile ale căror extremități sînt concomitente și consecutive sînt acelea între care nu există nimic la fel cu ele), atunci este imposibil ca din indivizibile să se constituie un continuu, de pildă, ca o linie să se constituie din puncte, de vreme ce linia este ceva continuu, punctul este însă un indivizibil. Extremitățile punctelor nu sînt una, căci la indivizibile nu poate exista extremitate distinctă de restul lucrului indivizibil, nici extremitățile nu sînt împreună, pentru că la ceva fără părți nu există părți extreme, de vreme ce o extremitate trebuie să fie distinctă de lucrul a cărui extremitate este. Mai departe, punctele, din care s-ar constitui continuul, ar trebui în mod necesar sau să fie continue, sau să fie în contact. (Același argument este valabil pentru toate indivizibilele.) Ele nu pot fi însă continue din motivul arătat mai înainte; dimpotrivă contactul se face între întreg și întreg, sau între parte și parte sau între o parte și un întreg. Deoarece însă indivizibilul este fără părți, întregul ar putea fi în contact, necesarmente, numai cu un întreg, dacă însă un întreg este în contact cu alt întreg, atunci nu se constituie un continuu, căci continuul conține părți diferite între ele și este divizat în părți diferite în acest sens și separate ca loc. De asemenea un punct nu poate fi consecutiv altui punct sau o clipă nu poate fi consecutivă altei clipe, în așa fel încît să constituie o lungime sau un timp; căci consecutive sînt acele lucruri între care nu există intermediar de aceeași natură cu ele. Dar între puncte este totdeauna o linie și între clipe este totdeauna un timp. Mai departe, admițînd că o linie și un timp pot fi divizate în părțile din care se compun, fiecare dintre acestea două ar fi apoi împărțite în indivizibile. Am văzut însă mai înainte că nici un lucru continuu nu era divizibil în lucruri fără părți componente ; iar punctele și clipele nu pot avea între ele ceva diferit de ele. Căci dacă ar exista un astfel de intermediar, atunci acesta ar trebui să fie iarăși ceva indivizibil sau divizibil și în cazul că ar fi și divizibil, ar trebui să poată fi împărțit sau în indivizibile sau în divizibile la infinit, și tocmai acest din urmă caz este continuul. Este evident că orice continuu este divizibil în divizibile la infinit ; dacă ar fi divizibil în indivizibile, atunci un indivizibil ar fi în contact cu un indivizibil, căci extremitățile continuului sînt una și sînt în contact.

Același raționament se aplică la mărime, timp și mișcare : sau toate sînt constituite din indivizibile și se pot divide în indivizibile, sau nici una din ele nu constă din indivizibile. Aceasta rezultă evident din cele ce urmează : dacă mărimea constă din indivizibile, atunci și mișcarea acestui lucru va consta din mișcări indivizibile egale, așa cum, spre pildă, dacă mărimea *ABC* constă din părțile indivizibile *A*, *B* și *C*, atunci mișcarea *DEF*, efectuată de *Z* pe distanța *ABC*, va conține în sine și fiecare parte corespunzătoare ca indivizibilă. Și dacă atunci cînd are loc o mișcare, este necesar ca ceva să se miște și dacă ceva se mișcă, va trebui să fie prezentă o mișcare, atunci și „mișcarea" va consta din indivizibile. Într-adevăr *Z* s-a mișcat pe distanța *A*, fiind mișcat cu mișcarea *D*, pe distanța *B* cu mișcarea *E* și pe distanța *C* cu mișcarea *F*. Dar un lucru care se mișcă de la un loc la altul nu poate în același timp pe de o parte să se miște, pe de altă parte să fi terminat deja mișcarea spre locul spre care se mișca în timpul mișcării (așa cum, spre pildă, dacă cineva merge la Teba, este imposibil ca, în același timp, să meargă la Teba și să fi și terminat de mers la Teba). Dar *Z* s-a mișcat pe distanța *A*, indivizibilă, pe cînd mișcarea *D* avea loc ; atunci dacă *Z* a terminat de străbătut distanța, după ce a străbătut-o, mișcarea trebuie să fie divizibilă. (Căci în momentul în care *Z* a parcurs-o, el nici nu a stat pe loc nici n-a ajuns acolo, ci a fost într-o situație intermediară.) Dacă, din contră, *Z* în același timp este încă în mers și a și ajuns, atunci omul care merge, de asemenea, în timp ce merge, a terminat de mers și va ajunge la țintă, adică va fi în situația de a se fi mișcat către locul spre care se mișca. Acum, dacă un lucru se mișcă pe toată distanța *ABC*, și dacă mișcarea prin care se mișcă constă din trei părți *D*, *E*, *F*, iar pe distanța *A* — care nu are părți — nu se mai mișcă, deoarece și-a terminat mișcarea, atunci mișcarea *DEF* va consta nu din mișcări (continue), ci din mișcări terminate (sau sosiri), adică va rezulta din a se fi mișcat fără a se mișca; pentru că după ipoteza noastră *Z* a parcurs distanța *A* fără a fi fost în mișcare. Cu alte cuvinte, ar fi posibil să fi terminat o călătorie fără a fi parcurs distanța. Dacă orice lucru trebuie să stea sau să se miște și pentru că *Z* stă în repaus la fiecare dintre cele trei porțiuni *A*, *B* și *C*, urmează că ar exista ceva care în mod continuu stă în repaus și în același timp este și în mișcare; căci *Z* era în mișcare pe întreaga mărime *ABC* și a fost în repaus în fiecare parte a acestei mărimi, și deci și pe întreaga mărime. Mai mult, dacă apoi părțile indivizibile *DEF* sînt ele înseși mișcări, atunci ar fi posibil ca, în timp ce mișcarea este prezentă într-un lucru, să nu se miște nimic, ci să fie repaus; dacă dimpotrivă părțile nu sînt mișcări, atunci ar fi posibil ca mișcarea să conste din alte lucruri decît mișcări.

În același mod ca la lungime și mișcări, există necesitatea ca și timpul să fie indivizibil sau să fie compus din clipe indivizibile; căci dacă fiecare distanță este divizibilă și dacă un lucru mișcîndu-se cu aceeași viteză străbate o distanță mai mică într-un timp mai mic, atunci și timpul va fi divizibil și, invers, dacă timpul, în care un lucru se mișcă pe distanța *A*, este divizibil, atunci și *A* va fi divizibilă.

VI, 2 (p. 232 b 14—233 a 12)

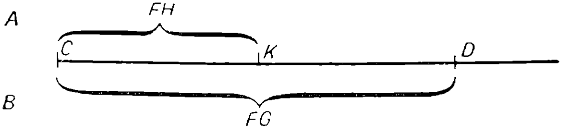
Și mai departe, dacă în mod necesar orice lucru trebuie să se miște sau într-un timp egal sau mai scurt sau mai lung, în comparație cu altul, și dacă cel care se mișcă într-un timp mai lung este mai încet și cel care se mișcă în timp egal are viteză egală, iar cel care se mișcă mai repede nu are nici viteză egală, nici mai înceată, atunci urmează că cel care se mișcă mai repede nu poate cheltui nici un timp egal, nici un timp mai lung; așadar rămîne că el trebuie să cheltuiască un timp mai scurt, de unde urmează că lucrul care se mișcă mai repede parcurge o distanță egală într-un timp mai scurt.

Deoarece însă fiecare mişcare se face într-un timp şi în orice timp este posibil ca ceva să se mişte, dar tot ce este în mişcare poate să se mişte şi mai repede şi mai încet, atunci mişcarea se va face, în orice timp, mai repede şi mai încet. Dacă este aşa, atunci este necesar ca şi timpul să fie continuu. Prin continuu eu înţeleg ceva ce este totdeauna divizibil în divizibile la infinit, şi dacă punem la bază acest continuu, atunci este necesar ca şi timpul să fie continuu.

Deoarece s-a dovedit că lucrul mai repede străbate o distanţă egală într-un timp mai scurt, atunci fie *A* lucrul mai repede şi *B* lucrul mai încet, şi să presupunem că cel mai încet se mişcă pe distanţa *CD* în timpul *FG*; în consecinţă este evident că lucrul mai repede se va mişca într-un timp mai scurt decît acesta pe aceeaşi distanţă; să fie aceasta în timpul *FH*; din contră, deoarece lucrul mai repede a parcurs în timpul *FH* întreaga distanţă *CD*, lucrul mai încet străbate în acelaşi timp distanţa mai mică, şi fie aceasta *CK*; deoarece însă *B*, care se mişcă mai încet, a parcurs distanţa *CK* chiar în timpul *FH*, lucrul mai repede a parcurs-o într-un timp mai scurt, astfel încît, iarăşi, timpul *FH* va fi împărţit; dacă însă acesta este împărţit, atunci şi mărimea *CK* va fi împărţită din nou, în acelaşi fel; dacă însă se împarte mărimea, atunci se împarte şi timpul; şi tot aşa merge mai departe dacă se ia alternativ după cel mai repede cel mai încet şi după cel mai încet cel mai repede şi dacă se procedează în felul arătat. Căci totdeauna timpul va fi împărţit de lucrul mai repede, iar mărimea va fi împărţită de lucrul mai încet; dacă este aşadar adevărat că se poate face mereu reciproca[1] şi că reciproca antre-

---

[1] Este vorba, aşadar, de un algoritm cinematic: dacă se ia, de pildă, raportul vitezelor de 1/2, atunci diviziunea mărimii se va face în acelaşi raport cu diviziunea timpului.



Mobilul *B* străbate distanţa *CD* în timpul *FG*. Mobilul *A* străbate aceeaşi distanţă *CD* în timpul *FG*, luat arbitrar 1/2 *FG*.

Atunci mobilul *B* va străbate în timpul *FH*, respectiv 1/2 *FG*, jumătate din distanţa *CD*, respectiv *CK*. Mobilul *A* însă va străbate distanţa *CK* în 1/2 *FH*. În acest timp, mobilul *B* ar străbate 1/2 *CK* şi aşa mai departe. — *C. V.*

nează mereu o divizare, atunci este evident că orice timp este continuu; căci timpul și distanța sînt divizate în aceleași diviziuni egale.

c) *Paradoxele lui Zenon*

Analiza pe care a făcut-o *Aristotel* conceptului de continuu se confirmă îndeosebi într-o problemă oarecum clasică pentru timpul său, problema paradoxelor, cu care *Zenon* din Eleea voia să reducă la absurd conceptul de mișcare, pentru ca astfel să apere teza dascălului său, *Parmenide*, despre unitatea întregii existențe împotriva obiecțiilor adversarilor care au declarat-o paradoxală (cf. *Platon*, *Parmenide*, 128 a-e).

Fizica, VI, 9 (p. 239 b 5—33)

Zenon însă comite un paralogism: dacă orice lucru, spune el, este totdeauna sau în repaus sau în mișcare, și este în repaus cînd se află într-un loc egal cu el însuși, cum pe de altă parte ceea ce este transportat se află totdeauna într-o anumită clipă, atunci săgeata în zbor este nemișcată. Dar aceasta este un neadevăr, căci timpul nu este compus din clipe indivizibile așa cum nici o altă mărime nu este compusă din indivizibile. În privința mișcării există patru argumente ale lui *Zenon*, care constituie o sursă de dificultăți pentru cine vrea să le combată. În primul argument imposibilitatea mișcării se deduce din faptul că mobilul trebuie să ajungă mai întîi la jumătatea drumului, înainte de a ajunge la capăt; despre aceasta am discutat mai înainte. Al doilea argument, acela numit *Ahile*, se bazează pe ideea că într-o alergare lucrul mai încet nu va fi niciodată ajuns din urmă de lucrul mai iute; căci cel care urmărește trebuie totdeauna să înceapă prin a atinge punctul de unde pornește cel care fuge, astfel încît cel care aleargă mai încet are totdeauna un avans. Este același argument ca la dihotomie: singura diferență este că nu împarte în jumătăți mărimea luată. Se ajunge la concluzia că lucrul mai încet nu va fi ajuns din urmă de lucrul mai iute; dar explicația este aceeași ca la dihotomie: în ambele cazuri, de fapt, se conchide că mărimea fiind divizată într-un anumit fel nu se poate ajunge la capăt; dar aici se adaugă că chiar acel erou din tragedie, foarte iute la picior, urmărind pe cel încet la mers, nu-l va putea ajunge. Prin urmare soluția paradoxului va fi aceeași.

Cît priveşte ideea că cel care este mai înainte nu va fi ajuns din urmă, ea este falsă; într-adevăr atîta vreme cît este înainte el nu este ajuns din urmă, totuşi el va fi ajuns din urmă dacă *Zenon* admite că cel care urmăreşte străbate complet distanţa finită. Acestea sînt două din argumente. Al treilea, pe care l-am menţionat mai înainte, susţine că săgeata în zbor este în stare de repaus. Aceasta este consecinţa supoziţiei că timpul este compus din clipe; dacă refuzăm această ipoteză, atunci raţionamentul nu mai este valabil...

VI, 2 (p. 233 a 21–31)

... De aceea argumentul lui *Zenon* afirmă în mod greşit că nu se poate parcurge un număr infinit de lucruri sau că nu poţi veni în contact cu un număr infinit de lucruri, în mod succesiv într-un timp finit. De fapt lungimea şi timpul, şi în general tot ce este continuu, se numesc infinite în două accepţii, fie prin diviziune, fie relativ la extremităţi. Fără îndoială, în ce priveşte lucrurile infinite după cantitate, nu este posibil de a veni în contact cu ele într-un timp finit; dar, pentru lucrurile infinite prin diviziune, este posibil, pentru că timpul însuşi este infinit din acest punct de vedere. Prin urmare infinitul se poate parcurge într-un timp infinit, nu într-un timp finit şi, dacă atingem lucrurile infinite o facem prin cele infinite nu prin cele finite.

VIII, 8 (p. 263 a 4–b9)

... În acelaşi mod trebuie ripostat celor care folosesc argumentul lui *Zenon* şi socotesc că, dacă trebuie totdeauna să străbatem jumătatea distanţei şi pentru că jumătăţile sînt în număr infinit, iar pe de altă parte este imposibil să parcurgem infinitul, atunci mişcarea este imposibilă. Sau, cum argumentează alţii, care socotesc că o dată cu mişcarea peste jumătăţile de distanţă, trebuie numărate mai înainte una cîte una jumătăţile care iau naştere; prin urmare, cînd toată distanţa a fost parcursă, trebuie să fi numărat deja un număr infinit; dar se ştie că acest lucru este imposibil. În primele expuneri asupra mişcării, noi am dat o soluţie bazată pe faptul că timpul cuprinde în sine elemente în număr infinit; nu este nimic absurd, într-adevăr, că se parcurge infinitul într-un timp infinit și că infinitul există, de asemenea, și în lungime și în timp. Dar dacă această soluție era suficientă contra acelora care veneau cu o astfel de întrebare (se punea întrebarea dacă într-un timp finit ar fi posibil să se parcurgă sau să se numere lucruri infinite), ea nu este suficientă atunci cînd este vorba de lucrul însuși și de realitate. Dacă, lăsînd la o parte chestiunea de a ști în ce măsură este posibil să se parcurgă infinitul într-un timp finit, se pun aceste chestiuni relative la timpul însuși (care este susceptibil de diviziuni infinite), această soluție n-ar mai fi suficientă; dar va trebui spus adevărul, cum arătam mai înainte. Într-adevăr, dacă se împarte dreapta continuă în două jumătăți, atunci un singur punct este utilizat ca un punct dublu căci se face din el un început și un sfîrșit; așa procedează și cel care numără și cel care împarte în jumătăți. Dacă însă împărțim astfel, atunci nici linia și nici mișcarea nu vor fi continue; căci mișcarea continuă este în raport cu continuul iar în continuu sînt conținute jumătăți în număr infinit, nu însă în act, ci în potențialitate. Dacă luăm jumătățile infinite în act, nu vom avea o mișcare continuă, ci cu pauze în ea. În cazul că numărăm jumătățile, este evident că așa se întîmplă; căci atunci un punct unic va fi numărat ca două: ca sfîrșitul unei jumătăți și începutul alteia, dacă se va număra nu linia continuă, ci două jumătăți de linii. Prin urmare, aceluia care întreabă dacă este posibil să se parcurgă infinitul fie în timp, fie în lungime, trebuie să-i răspundem: într-un sens da, în alt sens nu. Infinitul nu există în act, dar există în potențialitate; căci lucrul care se mișcă în mod continuu a parcurs infinitul accidental dar nu în mod absolut, căci este o întîmplare că linia este o infinitate de jumătăți, dar esența și natura sa sînt diferite.

C. Teoria proporțiilor

1. Începuturile teorie proporți lor

Proporțiile au fost luate în considerație încă în epoca preelenă a matematicii, de pildă, la triunghiurile asemenea. Pentru noțiunea de raport nu numai că egiptenii și babilonenii au avut denumiri speciale pentru cazul particular al înclinării

(*Ṡqt*, *Ša-gal*) dar babilonenii, cel puțin, posedau și un termen special pentru noțiunea de raport în general.

Pitagoreicii cunoșteau cel puțin din secolul al V-lea trei feluri de medii proporționale și, natural, și proporțiile corespunzătoare, așa cum dovedește următorul fragment al lui **Archytas** (B2).

> Există trei medii proporționale în muzică: mai întîi cea aritmetică, apoi cea geometrică, în al treilea rînd cea reciprocă, care se numește armonică. Media aritmetică este cea în care între cei trei termeni numerici din proporție există următoarea diferență: cu cît depășește primul termen pe al doilea cu atît depășește al doilea pe al treilea. Și la această proporție se întîmplă că raportul termenilor numerici mai mari este mai mic, iar al celor mai mici este mai mare. Medie geometrică avem atunci cînd primul termen este față de al doilea așa cum al doilea termen este față de al treilea. Termenii mai mari sînt în același raport ca cei mai mici. Proporție reciprocă (care se numește armonică) avem dacă termenii se comportă astfel: cu a cîtea parte a mărimii proprii depășește primul termen pe al doilea, cu aceeași parte din al treilea termen depășește termenul mediu pe al treilea. La această proporție raportul termenilor mai mari este mai mare, raportul termenilor mai mici este mai mic.

(Un pasaj corespunzător în *Platon*, *Timaios*, 35 a; *Epinomis*, 991, ab).

Istoria acestor feluri de medii proporționale datează probabil din epoca preelenă. Metoda babilonică, respectiv a vechilor hinduși, pentru aproximarea rădăcinilor pătrate (vezi sus p. 23), folosește din plin cele trei medii.

Dacă avem două numere a, b, atunci media lor geometrică este $\sqrt{ab}$, deci avem $\sqrt{b}$, dacă $a = 1$. Media lor aritmetică $\frac{1}{2}(a+b)$ este mai mare decît $\sqrt{ab}$, media lor armonică $2ab:(a+b)$ este mai mică decît $\sqrt{ab}$. Media armonică se obține, evident, dacă pătratul mediei geometrice, deci ab, se divide prin media aritmetică $\frac{1}{2}(a+b)$. Tocmai acesta este procedeul folosit la aproximarea rădăcinii pătrate. Căci media geometrică între a și b și media geometrică între media lor armonică și aritmetică este același număr și astfel prin repetarea continuă a procesului de inserare a celorlalte două medii se poate aproxima la infinit media geometrică, în particular rădăcina pătrată.

Această inserare dă proporția „muzicală" sau „perfectă":

$$a : \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b}{2} : b\text{; de exemplu, } 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2\ [a = 1,\ b = 2].$$

Cf. **Iamblichos**, *Comentariu la Aritmetica lui Nicomachos* (p. 118, 23 Pistelli).

Se spune că proporția perfectă ar aparține babilonenilor și ar fi ajuns la greci mai întîi prin *Pitagora*. Se mai știe că mulți pitagoreici au făcut uz de ea, ca *Aristaios* din Crotona, *Timaios* din Locra, *Philolaos*, *Archytas* din Tarent și mulți alții încă, apoi *Platon* în *Timaios* (36a,b).

B. L. van der Waerden (Hermes 78 și Ontwakende Wetenschap p. 171) a explicat pasajul despre teoria muzicii din dialogul *Epinomis* de Platon (991 ab) ca diviziune repetată a octavelor prin inserarea mediei armonice și aritmetice. Din octava (2 : 1) se obține cvinta (3 : 2) și cvarta (4 : 3), din cvintă terța mare și mică (5 : 4 și 6 : 5), din cvartă terța micșorată și tonul fundamental suprapus (7 : 6 și 8 : 7) ; din acestea se construiesc cele trei scări muzicale ale lui *Archytas*.

2. Teoria proporțiilor geometrice înainte de Eudoxos

Proporția geometrică, un instrument de cea mai mare importanță pentru matematica grecească — ea înlocuia totuși folosirea formulelor și a transformărilor lor la începuturile matematicii grecești — a fost aplicată naiv la orice ; teoria ei a fost fundamentată mai riguros în primul rînd numai pentru numere întregi (ἐν ἀριθμοῖς) (*Euclid, Elemente*, VII, 1—19).

Definiția 20 din cartea a VII-a a *Elementelor* lui **Euclid** este fundamentală:

„Numerele sînt proporționale dacă primul număr este față de-al doilea număr un multiplu de un număr egal de ori sau este aceeași parte sau aceeași mulțime de părți, așa cum al treilea număr este față de-al patrulea".

Chiar și **Hipocrat** din Chios întrebuințează această definiție atunci cînd spune:

„Așa cum sînt cercurile între ele, tot astfel segmentele lor asemenea (τμήματα). Segmentele asemenea sînt acelea care constituie aceeași parte din cerc, ca de pildă semicercul față de semicerc și a treia parte din cerc față de a treia parte din cerc".

Platon descrie ceea ce ține de „limită" (πέρας) în *Philebos* (25 ab) în felul următor:

„Oare nu vom socoti noi pe bună dreptate ca ținînd de *limită* lucrul care nu e un suport pentru infinit, ci închide în sine toate contrariile — mai întîi egalul și egalitatea, după egal dublul și tot ce se comportă ca număr față de număr sau măsură față de măsură?"

Infinitul a fost descris de el mai înainte (*Philebos*, 24 a—d) ca „mai mult sau mai puțin", adică ceva ce nu admite ca fiecare lucru particular să fie un „cît", deci ceva care lasă pe „cît" să devină invizibil. Căci infinitul este în continuă mișcare, „cît" este însă în repaus și a încetat să înainteze.

Acestea sînt referiri clare la domeniul rapoartelor raționale (în numere întregi) și contrariul său.

Mai clar este **Aristotel**, *Metafizica* (Δ15; 1020 b, 26—1021 a, 8).

„Relativ" („față de ceva" πρός τι) se spune într-un sens că este ca jumătatea față de dublu și triplul față de a treia parte și în genere multiplul față de cutare parte și ca ceea ce depășește față de depășit....

În acest prim sens avem în vedere relația (raportul) după număr, fie în mod nedeterminat („doar așa", ἁπλῶς) fie în mod determinat (ὡρισμένως), în raport cu numărul sau cu unitatea. Astfel raportul dintre dublu și unitate (2 : 1) reprezintă un anumit număr, raportul dintre un număr și unitate ($n : 1$) reprezintă un număr nedeterminat (cutare) (n). Raportul dintre unu și jumătate și două treimi din el $\left(\frac{3}{2} : 1\right)$ este un raport determinat între numere (3 : 2); raportul dintre $1 + \frac{1}{n}$ și 1 este un raport numeric nedeterminat ($n + 1 : n$), întocmai ca raportul dintre multiplu și unitate ($n : 1$). Relația dintre ceea ce depășește și ceea ce este depășit este complet nedeterminată ca număr; căci numerele sînt între ele comensurabile, dar acel raport este incomensurabil ca număr. Ceea ce prisosește este tot atît cît și lipsește și încă ceva mai mult; însă acest ceva nu este determinat.

Toate aceste relații sînt enunțate și ca valori numerice și ca proprietăți...

Din aceste pasaje reiese clar că inițial numai rapoartele raționale erau considerate determinate numeric și cantitativ. Descoperirea incomensurabilității laturii cu diagonala pătratului și pentagonului regulat (poate cel mai tîrziu la mijlocul secolului al V-lea) trebuie să fi provocat în matematică un fel de „criză a fundamentelor" — făcînd abstracție de zdruncinarea concepției pitagoreice despre lume. Căci numărul nu face „totul cognoscibil", cum afirmase *Philolaos*.

S-a încercat să se facă față dificultăților în două moduri. Mai întîi s-au evitat în genere proporțiile în considerațiile geometrice, înlocuindu-le prin egalități de arii. Căci orice proporție $a : b = c : d$ este echivalentă cu ecuația produselor $ad = bc$ și aceasta exprimă echivalența dreptunghiurilor cu laturile a, d respectiv b, c. Un exemplu caracteristic în această privință avem în demonstrația dată de *Euclid* teoremei lui Pitagora (*Elemente*, I, 47). Aceasta este, fără îndoială, o transpunere a unei demonstrații inițiale care folosea proporțiile stabilite în triunghiurile obținute prin ducerea înălțimii în triunghiul dreptunghic dat, triunghiuri care sînt asemenea între ele și asemenea cu triunghiul dat (vezi mai sus, p. 40).

Primele patru cărți ale *Elementelor* nu conțin absolut de loc proporții, iar axioma măsurii apare abia ca a patra definiție din cartea a V-a, la începutul teoriei proporțiilor a lui *Eudoxos*. Acest lucru s-a făcut, evident, cu premeditare.

În al doilea rînd s-a încercat să se elaboreze o teorie a proporțiilor, valabilă în general atît pentru rapoarte raționale, cît și pentru cele iraționale. Teoria clasică respectivă a fost creată de-abia în secolul al IV-lea de către *Eudoxos*; ea a fost însă precedată poate încă din secolul al V-lea de o altă teorie care caracterizează egalitatea a două rapoarte prin așa-numita *antanairesis* sau *anthyphairesis*[1].

Acest procedeu ne este astăzi bine cunoscut din teoria elementară a numerelor sub numele de „procedeul împărțirilor succesive" sau „algoritmul lui Euclid". El se găsește enunțat pentru numere în cartea a VII-a (1, 2) și pentru mărimi în cartea a X-a (2, 3) din *Elemente* (construcția celui mai mare divizor comun, respectiv, a celei mai mari măsuri comune). El corespunde dezvoltării unui raport în fracție continuă (cu numărătorii 1); raportul este rațional sau irațional, după cum dezvoltarea este finită sau infinită.

Matematicianul de azi va considera forma aritmetică a procedeului (VII; 1,2) ca fiind mai veche, căci după concepțiile noastre de astăzi ea este mai elementară. Totuși trebuie să ne gîndim că Theodoros din Cirene, pe la 430 î.e.n., a demonstrat iraționalitatea rădăcinilor pătrate din 3, 5, 7 ... 17 pentru fiecare caz în parte (*Platon*, *Theetet*, 147 d). Nu ar fi fost nevoie de aceasta, dacă el ar fi avut la dispoziție teoria numerelor din cartea a VII-a a *Elementelor*, care se bazează în întregime pe procedeul împărțirilor succesive. Demonstrațiile sale particulare pentru iraționalitatea rădăcinilor menționate trebuie să se fi bazat pe construcții geometrice[1], care (așa cum se întîmplă cu împărțirea în medie și extremă rație) permiteau să se recunoască posibilitatea de a aplica la infinit procedeul. (Atare construcții, pe care probabil *Theodoros* le-a folosit, sînt indicate de *H. G. Zeuthen* și alții).

---

[1] Termenul grecesc este redat în l. germană prin *Wechselwegnahme* sau *abwechselndes Wagnehmen* și în l. franceză prin *soustractions successives*: pentru a determina cea mai mare măsură comună a două mărimi comensurabile se scade cea mai mică din cea mai mare. Rămîn acum două mărimi; se scade acum cea care a rămas mai mică din cea mai mare și se continuă procedeul pînă rămîn 2 mărimi egale care sînt măsura comună. Așa se întîmplă în cazul că există o măsură comună. Cf. van der Waerden; *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart, 1956, pp. 208, 288; N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, 1960, p. 110. — *N. T.*

Tradiția nu ne-a lăsat nimic în această privință: totuși există referiri la o astfel de teorie a proporțiilor anterioare celei create de Eudoxos, teorie care includea și rapoarte iraționale, în următoarele locuri:

Aristotel, *Topica,* VIII, 3 (p. 158 b, 29—35):

Se pare însă că și în matematică există unele lucruri nu ușor de demonstrat din cauza absenței unei definiții, ca, spre pildă, faptul că o dreaptă care intersectează paralel cu o latură un paralelogram împarte în același raport linia și aria (adică laturile adiacente și aria paralelogramului).

Dacă însă definiția este enunțată, atunci ceea ce se spune devine evident. Căci aceeași *antanairesis* au și ariile și liniile. Aceasta este însă și definiția care se dă pentru „același raport".

Este vorba de teorema VI, 1 din *Elementele* lui Euclid.

Alexandru din Afrodisia spune asupra acestui pasaj (p. 545, 9—17 Wallies):

---

[1] Supoziția lui O. Becker este întemeiată. Problema a fost relevată de Zeller (*Die Philosophie der Griechen*, ed. 5, II,1, 1922, p. 797) și explicitată de Apelt (Platon, *Theätet*, 153) „Este vorba aici — zice Apelt — de problema comensurabilității suprafețelor și laturilor acelei serii de pătrate care, începînd de la pătratul cu o suprafață de un picior pătrat, face ca termenul următor să fie constant cu un picior pătrat mai mare decît precedentul. Construcția se completează înainte la fiecare termen și în chip simplu, după teorema lui Pitagora, așa ca diagonala primului pătrat să formeze o catetă a triunghiului dreptunghic, iar latura de un picior — cealaltă catetă; ipotenuza acestuia formează din nou altă catetă a unui alt triunghi dreptunghic — împreună cu latura de un picior drept cealaltă catetă — și așa mai departe, astfel ca în mod statornic să se formeze, din ipotenuza ultimului triunghi și din laturile de un picior, catetele unui nou triunghi dreptunghic. Deci ipotenuzele reprezintă constant laturile unui pătrat care crește mereu ca suprafață, cu un picior pătrat. De aici rezultă că numai pătratele de 4, 9, 16 picioare pătrate suprafață sînt comensurabile, pe cînd pătratele intermediare se pot măsura laolaltă ca suprafață, dar nu ca lungime a laturilor". De aici rezultă că $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ etc. sînt *raționale*, iar $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ sînt *iraționale*. [După traducerea lui C. Săndulescu, Platon, *Theetet*, Soc. rom. de filosofie, București, f.a. (1942 ?), p. 123] — Theodoros, așa cum remarcă Theetet în dialogul cu acest nume, a demonstrat în felul acesta iraționalitatea rădăcinilor pătrate pînă la lungimea de 17 picioare, oprindu-se aici. — *C. V.*

Cele spuse mai sus înseamnă că, dacă se dă un paralelogram și se duce în el o paralelă la una din laturi, această paralelă taie linia și aria în același mod, adică în același raport. Mai întîi acest „în același mod" nu este clar; dacă însă se enunță definiția proporționalității, se poate recunoaște că linia și aria sînt descompuse proporțional de paralela dusă.

Definiția mărimilor proporționale, de care se serveau cei vechi, este însă următoarea: mărimile care suferă aceeași *anthyphairesis* se află unele față de altele în aceeași proporție. *Aristotel* numea *anthyphairesis* cu numele de *antanairesis*.

Ultima propoziție a comentatorului dă de fapt explicația înțelesului; căci *Euclid* folosește (în X, 2 și 3, iar pentru numere în VII, 1 și 2) verbul *anthyphairein* care provine de la cuvîntul *anthyphairesis*, ca să denumească „procedeul său de împărțiri succesive" pentru determinarea celei mai mari măsuri comune (respectiv a celui mai mare divizor comun, la numere)[1]. Așa cum s-a observat, rapoartele iraționale sînt caracterizate printr-o dezvoltare infinită, iar rapoartele egale printr-o dezvoltare (infinită sau finită) egală.

În contrast cu definiția din *Elemente*, VII, def. 20, care se aplică numai la rapoarte raționale, definiția de mai sus este aplicabilă la rapoarte de orice fel.

Această interpretare a pasajului din *Aristotel* este confirmată de comentatorii arabi ai lui *Euclid*, anume *Al-Māhāni*, *An-Nairīzi* (Anaritius) și *Al-Chajjami*, lucru la care se referă *E. B. Plooij* în disertația sa intitulată *Euclid's conception of ratio... as critisized by Arabian commentators*, Leiden, 1950 (Rotterdam, W. J. van Hengel).

În cele ce urmează reproducem pasajul decisiv al celui mai vechi comentator **Al-Māhāni** (în jurul anului 820).

„Mărimile care au unul și același raport (irațional) sînt acelea care posedă următoarea proprietate: dacă prima și a treia este măsurată prin a doua și a patra sau invers, atunci numărul multiplilor este același la ambele măsurări. Și dacă din ambele mărimi rămîn resturi mai mici decît cele două mărimi mai mici și mărimile mai mici sînt măsurate prin ele (prin resturi), atunci (iarăși) numărul multiplilor este același la aceste măsurări și tot așa la infinit".

(Cf. explicațiile mult mai amănunțite ale lui *Anaritius, Commentarius in Euclidis Elementorum librum V*; pp. 157—160, Curtze.)

---

[1] cf. Observația de la p. 446.

3. Forma clasică a teoriei generale a proporțiilor la Eudoxos

Teoria antifairetică a proporțiilor era universal valabilă în măsura în care au fost considerate rapoarte de orice fel, raționale și iraționale, dar relativ la obiectele matematice între care au loc aceste rapoarte, ea suferea de o limitare : demonstrațiile trebuiau făcute separat pentru fiecare fel de mărime (numere, drepte, suprafețe, corpuri, timpuri, greutăți etc.). Noua teorie a proporțiilor, întemeiată în timpul lui Platon de către Eudoxos, se referă, din contră, la mărimi în genere, subordonate numai axiomei măsurii :

O mărturie istorică în acest sens este următoarea :

Aristotel, *Analitica secundă*[1], I, 5 (p. 74 a, 17—25) :

Mai înainte se obișnuia să se demonstreze permutabilitatea mezilor unei proporții separat pentru numere, drepte, solide și intervale de timp, deși acest lucru se poate dovedi printr-o singură demonstrație pentru toate. Însă pentru că toate acestea, adică numere, lungimi, intervale de timp și solide, nu aveau o denumire unitară iar după forma lor specifică se deosebesc unele de altele, ele au fost tratate fiecare separat. Acum însă demonstrația este efectuată în general ; căci ele nu posedă acea proprietate ca lungimi sau numere, ci întrucît ele posedă o determinare pe care noi o considerăm ca universală (Καϑόλου).

Antiteza dintre „mai înainte" și „acum" se referă evident la noua teorie a proporțiilor a lui *Eudoxos* care este conținută în cartea a V-a a *Elementelor*, desigur aproape ca în forma ei originală.

Fundamentarea de către Eudoxos a teoriei proporțiilor (rezumată după Heath, History of Greek Mathematics)

Eudoxos pune la baza teoriei sale două definiții dintre care prima are semnificația unei axiome.

1. **Euclid,** *Elemente,* V, def. 4 :

„Două mărimi au un raport (λόγος) între ele, dacă înmulțite una poate întrece în mărime pe cealaltă".

---

[1] În ediția germană figurează, de bună seamă eronat, *Analitica priora,* în loc de *Analitica posteriora,* din care este reprodus citatul. (N. T.) A se consulta și excelenta traducere a *Analiticilor* în limba română, datorită lui Mircea Florian : Aristotel, *Analitica secundă,* Editura Științifică, București, 1961. — *C. V.*

Să se compare cu formularea „aristotelică" (contemporană cu a lui Eudoxos) **Aristotel,** *Fizica,* VIII, 10, (p. 266 b 1–2):

Dacă eu adaug mereu ceva la o mărime finită, atunci voi obține (în cele din urmă) ceva ce întrece orice mărime determinată și, de asemenea, dacă scad mereu ceva, voi obține ceva mai mic decît orice mărime finită.

Deoarece această axiomă joacă și la *Arhimede* un mare rol, ea este numită astăzi adesea „Axioma *arhimedică* a măsurii".

Eudoxos avea clară în minte ideea că se pot concepe sisteme de mărimi care nu satisfac definiția sa, adică sisteme ale căror părți separate nu păstrează între ele totdeauna un raport. Exemplu clasic pentru aceasta sînt unghiurile cu laturi mixtilinii dintre circumferință și diametru pe de o parte („unghiul semicercului") și dintre circumferință și tangentă pe de altă parte („corniform" sau „unghiul de contingență"), dacă le considerăm împreună cu unghiurile rectilinii ascuțite (cf. cele expuse mai înainte, la p. 67 și urm., în legătură cu cvadratura cercului efectuată de Bryson).

2. **Euclid,** *Elemente* V, def. 5:

Mărimile se află în același raport, prima față de-a doua și a treia față de-a patra, dacă multiplii egali ai primei și ai celei de-a treia în același timp sau întrec în mărime respectiv multiplii egali ai celei de-a doua și ai celei de-a patra, pentru orice multiplu, sau sînt egali sau mai mici, luați în ordinea corespunzătoare.

Aceasta ar însemna: Dacă m, n sînt două numere naturale oarecare și a, b, c, d sînt patru mărimi de același fel care au același raport între ele (conform def. 4), atunci proporția $a : b = c : d$ este adevărată atunci și numai atunci cînd:

sau $ma > nb$ și, în același timp, $mc > nd$
sau $ma = nb$ și, în același timp, $mc = nd$
sau $ma < nb$ și, în același timp, $mc < nd$

și anume pentru orice numere m, n oarecare; adică pentru orice raport rațional $n : m$.

Pentru completare mai adăugăm:

3. **Euclid,** *Elemente,* V. def. 7:

„Dacă între multiplii egali (menționați în def. 5) multiplul primei mărimi întrece în mărime multiplul celei de-a doua și dacă multiplul mărimii a treia nu întrece în mărime multiplul celei de-a patra mărimi, atunci prima mărime către a doua are un raport mai mare decît a treia către a patra".

Avem deci $a : b > c : d$, dacă $ma > nb$ şi $mc \leqslant nd$ şi, de asemenea, ceea ce Euclid trece cu vederea, dacă $ma \geqslant nb$ şi $mc < nd$.

Aceste definiţii sînt folosite, ca şi în teoria modernă a numerelor iraţionale, mai întîi pentru ca să clarifice relaţiile de mărime dintre rapoarte, în al doilea rînd pentru ca, sprijinindu-se pe aceasta, să deducă transformările care pot fi efectuate asupra proporţiilor fără a le modifica valabilitatea. Aceasta din urmă este deosebit de importantă, întrucît pentru matematica greacă, care nu cunoaşte calculul cu formule, transformarea proporţiilor în legătură cu comparaţiile ariilor era singurul mijloc pentru efectuarea demonstraţiilor mai abstracte, care nu depind direct de figura în discuţie.

În cartea a V-a a *Elementelor*, după ce mai înainte se expun şase propoziţii elementare, ca $ma + mb = m(a + b)$, $ma + na = (m + n)a$ etc., se demonstrează mai întîi următoarele propoziţii (7 – 15) asupra relaţiilor de mărime între rapoarte :

Propoziţia 7 şi 9: Dacă $a = b$, atunci $a : c = b : c$ şi $c : a = c : b$ şi reciproc.

Demonstraţie: Fie ma, mb, nc multiplii lui a, b, c. Atunci din cauză că $a = b$, ma este mai mare, mai mic sau egal cu nc, după cum mb este mai mare, mai mic sau egal cu nc, iar nc este mai mare, mai mic sau egal cu ma, după cum nc este mai mare, mai mic sau egal cu mb, pentru toate numerele m, n.

De unde rezultă imediat propoziţia, conf. def. 5.

Propoziţia 8 şi 10: Dacă $a > b$, atunci $a : c > b : c$ şi $a : b > c : a$ şi reciproc.

Demonstraţie: Distingem două cazuri, după cum $a - b$ sau b este mărimea mai mică.

Cazul I. $a - b$ mai mic decît b

m să fie astfel ales încît $m(a - b)$ este mai mare ca c; fie nc primul multiplu al lui c, care este mai mare decît mb. Avem atunci aşadar: mb mai mare sau egal cu $(n - 1)c$, $m(a - b)$ este mai mare ca c; deci ma este mai mare ca nc.

Cazul II, b este mai mic decît $a - b$.

Atunci se alege m astfel ca mb să fie mai mare ca c şi fie nc primul multiplu al lui c, care întrece în mărime pe $m(a - b)$. Atunci $m(a - b)$ nu este mai mic ca $(n - 1)c$ şi mb este mai mare ca c, aşadar ma este mai mare ca nc.

În ambele cazuri mb este mai mic decît nc, căci în al doilea caz $m(a - b)$ este mai mare ca mb. Aşadar avem totdeauna, conform def. 7, $a : c > b : c$, $c : b > c : a$, ceea ce era de demonstrat. Reciprocele se demonstrează indirect.

Propoziția 11. Dacă $a : b = c : d$ și $c : d = e : f$, atunci $a : b = e : f$.

Propoziția 12. Dacă $a : b = c : d = e : f = \ldots$, atunci $a : b = (a + c + e + \ldots) : (b + d + f + \ldots)$. Pentru demonstrații ne întoarcem la def. 5.

Propoziția 13. Dacă $a : b = c : d$ și $c : d > e : f$, atunci $a : b > e : f$.

Demonstrație: Se iau multiplii egali mc, me și nd, nf, astfel încît $mc > nd$, $md \leqslant nf$ (conf. def. 7). Apoi se aplică asupra acestor multipli succesiv def. 5 și def. 7.

Propoziția 14. Dacă $a : b = c : d$, atunci a este mai mare, mai mic sau egal cu b, după cum b este mai mare, mai mic sau egal cu d.

Demonstrația primului caz (celelalte se demonstrează în mod analog): Dacă $a > c$, atunci, după propoziția 8, $a : b > c : b$; avem însă $a : b = c : d$. În consecință, după propoziția 13, $c : d > c : b$, deci după propoziția 10, $b > d$.

Propoziția 15. $a : b = ma : mb$.

Demonstrație prin împărțirea multiplilor în unitățile lor și prin aplicarea propoziției 12.

Acum urmează a doua grupă de propoziții care se referă la transformările proporțiilor; ne limităm la o selecție.

Propoziția 16. Dacă $a : b = c : d$, atunci $a : c = b : d$ (permutarea mezilor; grecește ἐναλλάξ, *permutando*).

Demonstrație: După teorema 15 avem $ma : mb = nc : nd$, deci după propoziția 14, mb este mai mare, mai mic sau egal cu nd, după cum ma este mai mare, mai mic sau egal cu nc. Deci după def. 5, $a : c = b : d$.

Propoziția 17. Dacă $a : b = c : d$, atunci (διελόντι, *separando*) $(a - b) : b = (c - d) : d$.

Demonstrație: Din multiplii egali mb, md și nb, nd se formează multipli egali $(m + n)b$, $(m + n)d$. Atunci, deoarece $a : b = c : d$, avem ma mai mare, mai mic sau egal cu $(m + n)b$ (I), după cum mc este mai mare, mai mic sau egal cu $(m + n)d$ (II). Dacă scădem mb din ambele părți ale primei relații și md din ambele părți ale celei de-a doua relații, atunci obținem $m(a - b)$ mai mare, mai mic sau egal cu nb, după cum $m(c - d)$ este mai mare, mai mic sau egal cu nd. Deci avem, după def. 5, $(a - b) : b = (c - d) : d$.

Propoziția 18. Dacă $a : b = c : d$, atunci (συνθέντι, *componendo*) $(a + b) : b = (c + d) : d$.

Euclid, respectiv Eudoxos, demonstrează această propoziție indirect. El admite că $(a + b) : b = (c + d) : (d \pm x)$, dacă este posibil. Aceasta presupune existența celei de-a patra proporționale față de $a + b$, b, $c + d$, pur și simplu fără demonstrație! Eudoxos pare deci să fi considerat această ipoteză de existență ca de la sine înțeleasă. Demonstrația decurge acum astfel: *Separando* avem, după propoziția 17, $a : b (c \mp x) : (d \pm x)$, deci, după propoziția 11, $(c \mp x) : (d \pm x) = c : d$, ceea ce după propoziția 14 este imposibil.

În acest fel sînt demonstrate încă un număr de alte propoziții; mai dăm încă două forme de raționament „*ex aequali*" (*scil. distantia*)".

Propoziția 20. Dacă $a : b = d : e$ și $b : c = e : f$, atunci (δι' ἴσου, *ex aequali*) a este mai mare, mai mic sau egal cu c, după cum d este mai mare, mai mic sau egal cu f.

Demonstrație: După propoziția 7 și 8, $a : b$ este mai mare, mai mic sau egal cu $c : b$, după cum a este mai mare, mai mic sau egal cu c. Deci după propoziția 13 și 11, avem respectiv $d : e$ mai mare, mai mic sau egal cu $f : e$; în consecință d este respectiv mai mare, mai mic sau egal cu f.

Propoziția 22. Dacă $a : b = d : e$ și $b : c = e : f$, atunci (δι' ἴσου, *ex aequali*) avem $a : c = d : f$.

Demonstrație: Formăm multipli egali ma, $md : nb$, ne; pe, pf (unde m, n, p sînt numere naturale); atunci avem $ma : nb = md : ne$ și $nb : pc = ne : pf$ (conform propoziției 4, după care din $a : b = c : d$ urmează totdeauna $ma : nb = mc : nd$, ceea ce se poate ușor demonstra cu ajutorul def. 5). Așadar după propoziția 20, md este mai mare, mai mic sau egal cu pf, după cum ma este mai mare, mai mic sau egal cu pc; în consecință după def. 5 avem $a : c = d : f$.

D. Fundamentarea sistematică a matematicii grecești prin ea însăși

1. Fundamentarea logică prin axiomatică

Primele *Elemente*, adică prima expunere sistematică a propozițiilor fundamentale ale geometriei, și poate și ale aritmeticii, au fost scrise, după cum relatează *Eudemos*, de către *Hipocrat* din Chios, același care a efectuat cvadratura „lunulelor" și a adus problema dublării cubului la forma sa clasică. Nu se știe nimic mai precis despre aceste prime *Elemente*, și tot atît de puțin se știe despre operele ulterioare ale lui *Leon* și *Theudios*, care au alcătuit în epoca lui *Platon* astfel de scrieri. Se pare că opera lui *Theudios* a fost baza predării matematicii în Academie și apoi în școala peripatetică.

S-au păstrat numai *Elementele* lui Euclid pentru că această operă, considerată curînd clasică, a înlocuit complet pe predecesoarele sale; pe de altă parte însă niciodată în antichitate nu s-a făcut încercarea de a o depăși. **Euclid** pune la baza construcției matematicii sale definiții, axiome (numite de el „opinii generale", sau „idei", χοιναὶ ἔννοιαι) și postulate.

Definițiile, axiomele și postulatele primei cărți a *Elementelor* sînt următoarele:

Definiții

1. Punctul este ceea ce n-are părți...
2. Linia este o lungime fără lățime.
3. Extremitățile unei linii sînt puncte.
4. O linie dreaptă (o dreaptă) este aceea care față de punctele de pe ea este la fel situată.
5. O suprafață este ceea ce are numai lungime și lățime.
6. Extremitățile unei suprafețe sînt linii.
7. O suprafață plană este aceea care față de dreptele de pe ea este la fel situată.
8. Un unghi plan este înclinarea a două linii într-un plan una față de alta, care se întîlnesc fără să fie situate pe aceeași dreaptă.
9. Dacă liniile care cuprind între ele unghiul sînt drepte unghiul se numește unghi rectiliniu.
10. Dacă o linie dreaptă, ridicată pe altă linie dreaptă, formează împreună unghiuri alăturate egale, atunci fiecare din aceste unghiuri egale este un unghi drept;

și linia dreaptă ridicată se numește perpendiculară pe aceea pe care stă.

11. Obtuz se numește unghiul care este mai mare decît un unghi drept.
12. Ascuțit, dacă este mai mic decît un unghi drept.
13. Margine este ceva unde ceva se termină.
14. O figură este ceva ce este cuprins de una sau mai multe margini.
15. Cercul este o figură plană, cuprinsă de o singură linie numită circumferință (arc), care are proprietatea că toate drep-

tele duse de la un punct situat înăuntrul figurii pînă la linie (circumferința cercului) sînt egale între ele.

16. Și centrul cercului se numește acel punct.

17. Diametrul cercului este orice dreaptă dusă prin centru mărginită de ambele părți de circumferință; această dreaptă are proprietatea că împarte în două părți egale cercul.

18. Semicerc este figura mărginită de diametru și de arcul tăiat de diametru [și centrul la semicerc este același punct ca și la cerc].

19. (20—23) Figuri rectilinii sînt acelea care sînt mărginite de drepte;

trilatere, de trei drepte;

patrulatere, de patru drepte;

multilatere, de mai mult de patru drepte.

20. (24—26) Dintre figurile trilatere triunghiul echilateral este figura cu trei laturi egale;

triunghiul isoscel este figura cu numai două laturi egale;

triunghiul scalen este figura cu trei laturi neegale.

21. (27—29) Mai departe, dintre figurile trilatere triunghiul dreptunghic este figura cu un unghi drept;

triunghiul obtuzunghic are un unghi obtuz;

triunghiul acuțitunghic are trei unghiuri ascuțite.

22. (30—34) Dintre figurile patrulatere, patratul este figura care este echilateră și dreptunghică;

dreptunghiul este figura care are unghiurile drepte, dar nu este echilateră;

rombul este figura care este echilateră, dar nu are unghiuri drepte;

romboidul este figura în care laturile opuse, ca și unghiurile [opuse], sînt egale între ele și care nu este nici echilateră, nici dreptunghică.

Celelalte figuri patrulatere să se numească trapeze.

23. (35) Paralele sînt liniile drepte care sînt situate în același plan și care, dacă sînt prelungite în ambele părți la infinit, nu se întîlnesc în nici una.

Postulate

Se cere:

1. Să se poată duce de la orice punct o dreaptă la orice punct.
2. Să se poată prelungi în continuare orice linie dreaptă, limitată tot printr-o linie dreaptă.
3. Să se poată descrie un cerc din orice centru și cu orice distanță.
4. (Axioma 10) ca toate unghiurile drepte să fie egale între ele.
5. (Axioma 11) dacă o linie dreaptă tăind două linii drepte formează unghiuri interne de aceeași parte mai mici decît două unghiuri drepte, cele două linii drepte prelungite la infinit să se întîlnească de acea parte în care sînt situate unghiurile mai mici decît două unghiuri drepte.

Noțiuni acceptate în general (axiome)

1. Cele egale cu același sînt egale și între ele.
2. Dacă la egale se adună egale, sumele (întregi) sînt egale.
3. Dacă din egale se scad egale, resturile sînt egale.
4. Cele care coincid sînt egale.
5. Întregul este mai mare decît partea.

Aceste propoziții sînt enunțate în general, ele se referă însă mai întîi numai la mărimi geometrice, ca drepte, unghiuri, arii ș.a. Cel puțin axioma 4 pare că se referă la acesta.

2. Sensul tehnic al conceptului de existență matematică în antichitate

Potrivit cercetărilor fundamentale ale lui *H. G. Zeuthen*, existența entităților matematice în epoca clasică a matematicii grecești este definită aproape exclusiv prin construcție, și anume prin construcția de figuri, căci geometria este știința fundamentală a matematicii clasice. Construcțiile fundamentale cerute în postulatele euclidiene 1—3 (unirea a două puncte printr-o dreaptă, prelungirea acesteia, construcția unui cerc de centru și rază date) formează baza propriu-zisă. Pentru rezolvarea așa-numitelor „probleme solide" (acestea sînt problemele cubice și bipătrate) se adaugă mai întîi operațiile stereometrice și apoi folosirea secțiunilor conice ca mijloace de construcție, în timp ce problemele „liniare" particulare (adică transcendente) sînt rezolvate prin curbe transcendente speciale, generate prin mișcare, ca cvadratricea și spirala arhimedică.

Postulatul al cincilea al lui *Euclid* este de asemenea o cerință de existență; căci el asigură existența punctului de intersecție a două drepte convergente. Postulatul al patrulea care cere egalitatea tuturor unghiurilor drepte pregătește pe al cincilea.

Postulatele intersecției pentru dreaptă și cerc lipsesc, totuși ele se pot deduce din cele trei propoziții simple din *Elemente*, I, 1, 12, 22. Definiția cercului (I, def. 15) și a altor figuri ca figuri închise înlocuiește așa-numita axiomă de ordonare în plan de astăzi.

Originea istorică a demonstrației de existență prin construcție datează încă din secolul al V-lea. La Hipocrat din Chios sînt indicate precis construcțiile figurilor, deși se întrebuințează cu multă naivitate „alunecarea" (νεῦσις) chiar în cazurile în care este posibilă o construcție cu rigla și compasul. Dacă *Proclos* în comentariul său la *Elementele* lui *Euclid* (la I, 12, și I, 23) relatează că ducerea unei perpendiculare și construcția unui unghi ar fi fost efectuate constructiv mai întîi de *Oinopides* (secolul al V-lea), aceasta ar putea însemna numai că acest geometru a simțit mai întîi nevoia unei construcții exacte cu rigla și compasul în locul folosirii pur tehnice a unor instrumente oarecare, ca echerul și transportorul. În același sens *Proclos* relatează (p. 80, 15—20) că în școala lui *Oinopides* natura problemei era caracterizată prin aceea că ea trebuie să determine „ce trebuie să fie pentru ca ceva să existe" (τίνος ὄντος τί ἐστιν, *quo constituto aliquid est*). Dacă „alunecarea" și construcțiile „mecanice" asemănătoare (ca, de pildă, procedeul atribuit probabil în mod eronat lui *Platon* pentru rezolvarea problemei delice, procedeu despre care relatează *Eutokios* [în *Arhimedes*, *Opera*, III, pp. 66—70, Heiberg]), nu mai contează ca exacte în epoca clasică, aceasta se datorează faptului că în utilizarea riglei și compasului instrumentele posedă numai un grad de libertate, în timp ce la „alunecare" rigla se mișcă cu două grade de libertate, fără constrîngere.

Prima depășire a domeniului problemelor cvadratice a fost poate rezolvarea de către *Archytas*, a problemei dublării cubului (problema „delică") dacă facem abstracție de prima apariție a cvadratricei (*Hippias* din Elis în secolul al V-lea). *Hipocrat* redusese problema la inserarea a două medii proporționale între două segmente date. În această formă problema a fost rezolvată de către **Archytas** (A 14), după cum relatează *Eudemos*, în felul următor: [*Eutocius*, *In Arhimedis de sphaera et cylindro*, II (Arhimedes, ed. Heiberg, III², 84)]:

„Se caută două medii proporționale între două segmente date, *AD* și *c* (fig. 33 *a*, *b*).

Se construiește pe un plan de bază un cerc *ABDZ* cu diametrul *AD*, în el se duce coarda $AB = c$, a cărei prelungire taie în punctul *P* tangenta cercului în *D*. Ducem *BEZ* paralelă cu *PDO*. Să ne imaginăm un semicilindru drept construit pe semicercul *ABD* iar pe segmentul *AD* să ne imaginăm un semicerc în planul dreptunghiului acelui semicilindru.

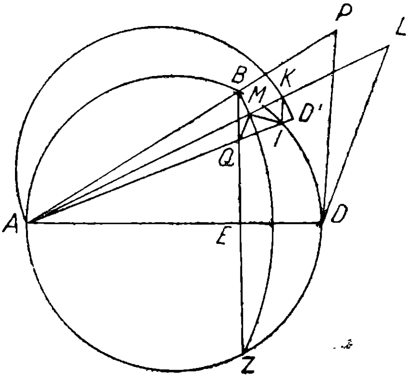


Fig. 33 a. (antică)

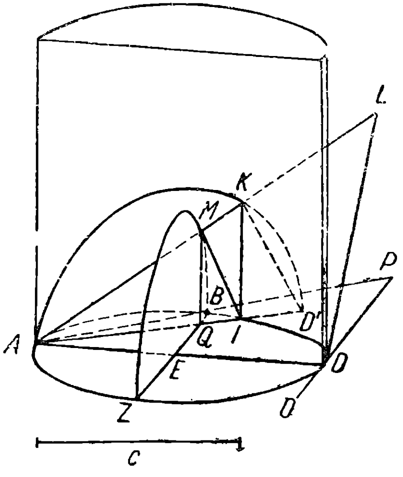


Fig. 33 b. (modernă)

Dacă acest semicerc se învîrtește în jurul punctului A (în jurul unei axe perpendiculare), și anume în direcția lui B, atunci el va descrie pe suprafața cilindrului o anumită curbă. Pe de altă parte dacă triunghiul APD se rotește în sens opus în jurul axei AD, atunci latura AP va descrie o suprafață conică și, în plus, va tăia într-un punct oarecare acea curbă de pe suprafața cilindrului. În momentul în care curba și latura triunghiului se intersectează, fie ca semicercul rotit să aibă poziția $D'KA$, triunghiul rotit în sens opus să aibă poziția ALK, punctul de intersecție să fie K.

Fie ca punctul B, care descrie pe suprafața conului un semicerc pe BZ într-un plan perpendicular pe planul de bază, să fie situat acum în M.

Din K să ducem pe planul de bază o perpendiculară care întîlnește linia circulară ABD (în I), căci cilindrul este drept. Fie Q punctul de intersecție al lui AI și BZ. În sfîrșit mai sînt de dus KD', MI și MQ. Pentru că ambele plane ale cercurilor BMZ și AKD' sînt perpendiculare pe planul de bază, linia lor de intersecție MQ cade de asemenea perpendicular pe toate dreptele planului de bază, care trec prin piciorul Q. Deci și MQ este perpendiculară pe BZ. În consecință dreptunghiul format din QB și QZ, sau (conform teoremei coardei) din QA și QI, este egal cu patratul cu latura MQ. Așadar AMI este unghi drept (după teorema înălțimii), ca și $D'KA$ (după teorema lui Tales). De aceea KD' este paralelă cu MI și din asemănarea triunghiurilor rezultă proporția $D'A : AK = AK : AI = AI : AM$. Acum avem $AM = AB = c$, $AD' = AD$; deci AK și AI sînt medii proporționale între AD și c."

Explicarea construcției lui *Archytas* pentru dublarea cubului (după *B. L. van Waerden*, [*Ontwackende Wetenschap*, p. 171]; cf. fig. 34):

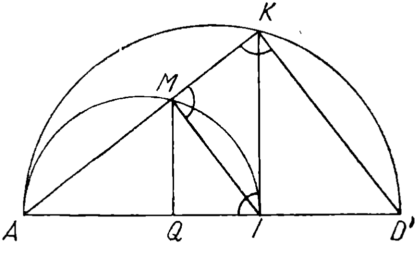


Fig. 34

Figura pe care o avea Archytas sub ochi este evident triunghiul dreptunghic AKD' cu cele două segmente perpendiculare KI și IM, unde AM, AI, AK și AD' formează o proporție continuă ($AM : AI = AI : AK = AK : AD'$) și în care AD' este egal cu segmentul dat AD. Archytas a observat că A fiind fixat prin alegerea lui I, punctele K și M sînt determinate. (Căci se poate totdeauna ridica o perpendiculară pe AD' care să taie semicercul construit pe AD'). El voia să aleagă I astfel ca AM să devină egal cu un anumit segment dat c.

Dacă AI descreşte faţă de AD' pînă ajunge de lungime nulă, atunci vine sigur un moment cînd $AM = c$. Pentru a determina acest moment, Archytas a avut următoarea idee: el a făcut să descrească AI prin faptul că el pune pe I să descrie un cerc cu diametrul AD într-un plan orizontal şi consideră planul semicercului AKD' perpendicular pe acesta. Atunci punctul K este situat totdeauna perpendicular asupra lui I, aşadar pe un cilindru drept care are cercul menţionat ca bază. Punctul K va descrie o curbă în spaţiu care va fi înscrisă pe suprafaţa laterală a cilindrului de către semicercul AKD' cu centrul în A. Semicercul AMI descrie în acelaşi timp o sferă cu diametrul AD. (Aceasta se observă uşor dacă plecăm de la o sferă cu diametrul AD şi tăiem această sferă cu planul perpendicular de rotaţie; se obţine atunci ca secţiune tocmai cercul cu diametrul AI.)

Deoarece AM are lungimea dată c, punctul M este situat pe un anumit cerc paralel pe sferă avînd ca pol punctul A; deci dreapta AMK este situată ca generatoare pe un anumit con cu vîrful în A. Punctul cerut K este situat acolo unde acest con taie curba în spaţiu, amintită mai sus.

Să se remarce că Archytas admite numai rotaţii simple de figuri deja cunoscute în jurul axelor în spaţiu sau numai translaţii ale unor astfel de figuri. Astfel sînt generate torul şi conul prin rotirea unui semicerc în jurul unei axe tangentă la el perpendiculară pe diametru, respectiv prin rotirea unui triunghi în jurul unei catete, iar cilindrul prin translaţia unui cerc de-a lungul unei perpendiculare pe planul său. Este vorba deci în general despre o transpunere în spaţiu a construcţiilor plane elementare cunoscute (cum este generarea unui cerc prin rotirea razei). Astfel Archytas a extins în mod sistematic definiţia existenţei entităţilor geometrice. Un efect în aceeaşi direcţie a avut introducerea secţiunilor conice, tot pentru rezolvarea problemei delice, de către *Menaichmos*.

În ultima parte a antichităţii găsim, în chip cu totul surprinzător, chiar distincţia dintre existenţa matematică „abstractă" şi cea „efectivă" (care trebuie demonstrată prin construcţie).

Joannes Philoponos relatează (*În Aristotelis Analyticam posteriorum,* p. 112, 27—29), că *Ammonios,* elevul lui *Proclos* şi-ar fi criticat dascălul, afirmînd că, după cum prezintă el lucrurile, *Bryson* nu a efectuat în realitate cvadratura cercului şi de aceea s-a făcut vinovat de *petitio principii.* El observă textual:

> Căci aceia care căutau cvadratura cercului nu au cercetat dacă este posibil să existe un patrat de arie egală cu a cercului, ci avînd părerea că acesta ar putea fi aşa, încercau să construiască (γεννᾶν, *a genera*) un pătrat egal cu cercul.

Avem aici, deci, o distincţie evidentă între existenţa „posibilă" (deci în orice caz necontradictorie) a unei entităţi matematice şi constructibilitatea ei.

E. Reflecția filozofică asupra fundamentării „elementare" și asupra esenței matematicii

I. PROBLEME LOGICE ȘI METODICE

1. Platon despre esența matematicii

Să reproducem mai întîi scurta dar clasica descriere platonică a metodei matematice ca metodă de deducție din supoziții (ipoteze). Firește că Platon nu cunoaștea *Elementele* lui Euclid, cunoștea totuși pe acelea ale lui *Leon* sau *Theudios*. (*Statul* VI, 510 c — 511 b).

Socrate... Cred că știi cum fac cei care au de-a face cu geometria, aritmetica și alte științe înrudite. Ei presupun în orice procedeu de demonstrație parul și imparul, figurile, cele trei feluri de unghiuri și alte lucruri de același gen și, tratîndu-le ca și cum ar fi înțelese perfect, le pun la baza demonstrațiilor lor fără a se simți în vreun fel obligați să dea o justificare despre aceasta pentru ei sau pentru alții, deoarece ar fi pentru fiecare evident; mai curînd ei trec de la aceste ipoteze imediat la o dezvoltare și ajung pînă la urmă pe calea consecințelor la acel punct, a cărui clarificare o intenționaseră[1].

Glaukon. Da, acest procedeu îmi este bine cunoscut.

Socrate. Și mai ales că ei se servesc de figuri vizibile și vorbesc mereu de ele, în timp ce nu acestea constituie obiectul propriu-zis al gîndirii lor, ci acele entități ale căror copii aceste figuri sînt. Căci lucrurile despre care ei discută sînt patratul în sine și diagonala în sine, nu ceea ce ei schițează prin desen, și tot așa și în celelalte cazuri; chiar figurile înseși, pe care le modelează sau le desenează, care au umbre și care produc imagini în apă, ei le folosesc tot ca imagini, cu ajutorul cărora caută să cunoască ceea ce nimeni nu poate cunoaște altfel decît prin rațiune.

---

[1] Este un caz interesant de aplicare a metodei cercetării prin analiză, și a demonstrației prin sinteză, metodă care — așa cum relatează Diogenes Laertios — a fost explicată, pentru prima oară matematicianului Leodamas din Tasos de către Platon. (Cf. Diogenes Laertios, *Viețile și doctrinele filozofilor*, III, 24. Editura Academiei, București, 1963, p. 210 — Cf. de asemenea și Proclus, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, Editura Friedlein, Teubner, Leipzig, 1873, p. 211).

Deși Oskar Becker menționează această „metodă de deducție din supoziții [ipoteze]", pare a nu fi sesizat că este vorba despre metoda analitică a vechilor geometri — în pofida faptului că va cita mai departe extrase ample din Proclos — metodă a cărei admirabilă punere în valoare o va face Descartes în *Regule*, fundamentînd prin ea, în secolul al XVII-lea, nu numai geometria analitică, dar și matematicile moderne. — *C. V.*

Glaukon. Ai dreptate.

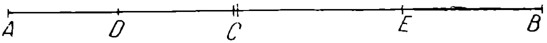
Socrate. Aceasta am denumit-o eu ca o clasă a lucrurilor inteligibile, dar așa încît sufletul este silit să pună la baza cercetării simple supoziții, nu ridicîndu-se[1] pînă la principii — căci dincolo de propriile sale premise nu poate trece — ci folosind ca imagini obiectele intuitive, ale căror copii sînt lucrurile inferioare și care pe de altă parte, după părerea generală, posedă, față de acele lucruri inferioare (de exemplu, față de umbre), avantajul de a putea fi mai bine cunoscute[2].

Glaukon. Înțeleg: te referi la domeniul geometriei și al specialităților înrudite.

---

[1] Cf. Observația de la p. 446.

[2] Platon disjunge obiectele cunoașterii în ὁρατὰ (vizibile) sau δοξαστά (aparențe) și νοητα (inteligibile), reprezentîndu-le liniar, sub forma unei drepte (*AB*), divizată în două părți inegale, fie secțiunile *AC* și *CB* din care *AC* corespunde domeniului celor vizibile (sensibile), iar *CB* celor inteligibile (unii comentatori moderni consideră că inegalitatea lor reprezintă însăși diferența de claritate sau de adevăr dintre domeniul sensibilului și cel al inteligibilului).



Acestea, la rîndul lor, se subdivid în două. Astfel *AC* se subdivide, după gradul de claritate sau obscuritate relativă a lucrurilor, în două: prima secțiune *AD* cuprinde εἰκόνες, imaginile obiectelor (umbre sau reflectări în apă, sau în oglinzi), — iar a doua, *DC*, cuprinde ζῶα, ființele vii (animale și plante) și obiectele fabricate de om. Domeniul sensibilului se divide deci între adevăr și fals, imaginea fiind în raport cu obiectul real, ca părerea față de cunoașterea propriu-zisă.

Domeniul inteligibilului, *CB*, se subdivide la rîndul său în două. În prima parte a acestei secțiuni, spiritul omenesc, servindu-se ca de niște imagini de obiectele cunoașterii sensibile, care în secțiunea precedentă (*DC*) erau niște originale, este obligat prin însuși acest fapt să-și instituie cercetările pornind de la niște supoziții de existență (ipoteze) și urmează o cale care îl duce nu la principiu ci la concluzie; în a doua parte, spiritul procedează de la ipoteză la principiul absolut, fără a face uz de imagini, ca în cazul precedent, și cercetează prin mediația ideilor singure. Între cele două părți există deci o diferență de grad. Inteligibilele din prima parte *CE* sînt inferioare celor din a doua parte *EB*, deoarece se cunosc fără raportare la principii, în timp ce secundele se cunosc tocmai prin raportare la principii, care dau certitudine și vigoare cunoașterii.

2. Aristotel despre structura unei științe „demonstrative"

Aristotel a analizat mult mai amănunțit și mai sistematic metoda „fundamentării elementare" în matematică și în alte științe „demonstrative" (apodictice). El a recunoscut clar importanța primordială a acestei metode pentru logică și epistemologie și dă problemei o turnură exclusiv principială, adică se ocupă de studiul principiilor. (*Analitica secundă I, 10*):

Numesc principiu în oricare gen ceea ce nu se poate demonstra că există.

Ce înseamnă, prin urmare, atît ceea ce există mai întîi cît și ceea ce este dedus de aci, se presupune. Trebuie să fie acceptat faptul că un principiu există, altfel trebuie demonstrat. Astfel, de exemplu, acceptăm ce înseamnă unitate, sau dreaptă sau triunghi. Faptul că există unitate și mărime geometrică trebuie acceptat, toate celelalte trebuie demonstrate.

Dintre principiile care se folosesc în științele demonstrative unele sînt proprii fiecărei științe, altele însă sînt comune, dar comune în sensul că sînt analoge sau în sensul de asemănare, fiecare principiu fiind folositor în genul cu care are de a face știința particulară respectivă.

Dintre principiile proprii cităm faptul că linia sau dreapta are o anumită proprietate esențială, dintre principiile comune dăm ca exemplu propoziția conform căreia cantități egale scăzute din cantități egale dau resturi egale. Dar fiecare din aceste propoziții este suficientă dacă rămîne în cadrul genului cu care se ocupă știința respectivă. Această propoziție va avea același efect chiar dacă nu este aplicată la toate lucrurile, ci numai pentru mărimi geometrice; aritmeticianul folosește propozițiile numai pentru numere.

Pe acestea rațiunea le sesizează prin forța sa dialectică, considerînd supozițiile (ipotezele)nu ca principii, ci ca simple ipoteze, care sînt ca niște trepte și puncte de sprijin, pentru a se ridica la principiu care nu mai admite ipoteză. O dată acest principiu atins, ea coboară, prin înlănțuirea consecvențelor care depind de el, pînă la concluzia finală, fără a se mai folosi de datele sensibile, ci procedînd din idee în idee, pentru a ajunge la o idee.

Ca o consecință a acestei delimitări a lumii sensibile de cea inteligibilă, Platon conchide că științele în genere ne oferă o cunoaștere inferioară cunoașterii dialectice, deoarece ele iau niște supoziții (ipoteze) drept principii. — *C. V.*

(Cf. Platon, *La République*, VI, 509 d, 510 ab.... 511 b, d, tome VII, Les Belles Lettres, Paris, 1934, p. 141 și sqv.)

Principii proprii şi acelea a căror existenţă este admisă sînt obiectele ale căror atribute ştiinţa le cercetează. Astfel de principii sînt, de exemplu, pentru aritmetică unităţile, pentru geometrie „semnele" sau punctele, şi liniile. Căci despre ele se admite fără demonstraţie că există şi că sînt ca atare. Dar în ce priveşte proprietăţile ce aparţin acestor obiecte, înţelesul lor se presupune; astfel, de pildă, aritmetica acceptă înţelesul numărului par şi numărului impar, al pătratului sau al cubului iar geometria acceptă înţelesul a ceea ce este iraţional (adică incomensurabil) sau frînt, sau incident. Însă existenţa lor se demonstrează din principii generale şi din ceea ce s-a demonstrat deja mai înainte. Tot astfel procedează astronomia. Căci orice ştiinţă demonstrativă are de-a face cu trei lucruri, a căror existenţă ea o presupune. Acestea sînt: genul, ale cărui atribute ea le cercetează, apoi aşa-numitele axiome generale, din care ca prime elemente ea deduce demonstraţiile şi în al treilea rînd proprietăţile, al căror înţeles particular ştiinţa îl admite.

Unele ştiinţe pot desigur să lase deoparte, fără grijă, unele lucruri dintre acestea; de pildă, existenţa genului poate să nu fie presupusă, dacă ea este evidentă — căci nu este la fel de evident că există un număr sau există recele şi caldul — şi tot aşa înţelesul proprietăţilor poate să nu fie luat ca admis dacă ele sînt cunoscute, aşa cum nu se presupune nici la principiile generale ce înseamnă a scădea cantităţi egale din cantităţi egale, deoarece este lucru ştiut. Dar este totuşi în firea lucrurilor să existe aceste trei părţi: obiectul general, despre care se face demonstraţie, propoziţiile care demonstrează, şi propoziţiile prin care se demonstrează.

Un principiu însă, atunci cînd este prin el însuşi adevărat cu necesitate şi pare necesarmente adevărat, nu este nici supoziţie (*hypothezis*) nici postulat (*aitēma*). Căci o dovadă pentru un astfel de principiu nu există în sensul unui temei dinafară, ci numai în sensul unui temei în suflet, deoarece aici nu există un raţionament avînd temei dinafară. Căci se poate ridica totdeauna o obiecţie contra temeiului dinafară, dar nu totdeauna contra temeiului din suflet.

Ceea ce deşi se poate demonstra se admite fără demonstraţie, se admite ca opinie a ascultătorului şi atunci nu este o ipoteză în genere, ci numai în ce priveşte pe ascultător. În caz că unul admite, pe cînd altul sau nu are nici o părere sau admite o părere opusă, atunci avem de-a face cu un postulat. Aceasta este distincţia dintre ipoteză şi postulat. Căci postulatul este ceea ce este contrar opiniei ascultătorului sau ceea ce se admite sau se foloseşte fără demonstraţie, deşi se poate demonstra.

Definiţiile nu sînt în consecinţă ipoteze — căci ele nu enunţă nimic asupra existenţei sau inexistenţei — ci ipotezele se află în premise. Pe concepte trebuie numai să le înţelegi, ceea ce nu este o ipoteză căci atunci ar trebui să se spună că şi auzirea ar fi o ipoteză. Dimpotrivă, ipoteza exprimă fapte din a căror existenţă rezultă concluzia.

Nu este adevărat că geometrul se bazează pe lucruri false, aşa cum spun anumiţi oameni. Căci ei pretind că nu trebuie folosit nimic fals, dar susţin că geometrul afirmă ceva fals spunînd că o linie, care nu este lungă de un picior, este lungă de un picior, şi că deşi nu este dreaptă, el o dă ca dreaptă. Dar geometrul nu conchide că o linie este ceea ce afirmă el că există, ci conchide că ea este ceea ce el înţelege că este.

3. Proclos despre conceptul şi metoda „Elementelor“ matematicii

În ultima perioadă a antichităţii *Proclos* (410—485), în lucrarea sa poate cea mai bine şi mai clar gîndită — comentariu filozofic, nu numai tehnic, la cartea I a *Elementelor* lui *Euclid* — recapitulează tot ceea ce au realizat înaintaşii săi în domeniul filozofiei matematicii. De aceea expunerea pe care o face el despre conceptul de elemente şi despre metoda *Elementelor* este de mare interes şi de importanţă esenţială.

Analiza principială întreprinsă de *Proclos* se găseşte în partea a II-a a Prologului la *Comentariul* său (Friedlein p. 71 şi urm.):

... Căci teoremele cele mai fundamentale şi mai simple, care sînt foarte strîns legate de primele ipoteze, alcătuiesc aici un sistem perfect, iar demonstraţiile altor propoziţii se bazează pe ele ca pe cele mai evidente şi pornesc de la ele ...

... Se obişnuieşte acum ca unele din teoreme să fie numite elemente, celelalte elementare. Din domeniul de valabilitate al acestora se separă o a treia grupă. Elemente se numesc acele propoziţii al căror studiu are efect asupra cunoaşterii celorlalte şi prin care se obţine rezolvarea dificultăţilor existente la acestea. Căci aşa cum limba scrisă cunoaşte elemente de bază, foarte simple şi indivizibile, pe care noi le numim litere, și așa cum fiecare cuvînt și fiecare propoziție constă din acestea, tot astfel există și în întregul domeniu al geometriei anumite propoziții de importanță preponderentă, care revendică rangul de principii față de consecințele care decurg din ele, au un domeniu de valabilitate cuprinzător și fac posibile demonstrarea multor proprietăți ; și tocmai pe acestea le numim elemente . . .

De asemenea, se vorbește de element în două sensuri, cum spune *Menaichmos*. Căci element este și ceea ce fundamentează față de ceea ce este fundamentat, așa cum, de exemplu, la *Euclid* Elementul I este fundament pentru Elementul al II-lea, și de asemenea, Elementul al IV-lea pentru al V-lea. Astfel multe se pot considera reciproc fundamentate (adică unele de către altele), căci relațiile fundamentale sînt reciproce . . . În acest sens elementul este un fel de propoziție ajutătoare. În alt sens se numește element ceea ce este mai simplu, adică partea în care se descompune complexul. În acest sens nu orice lucru se poate numi element al oricărui lucru, ci lucrul cel mai primitiv este element al lucrului care este apreciat ca o consecință. Astfel postulatele sînt elemente ale teoremelor . . .

. . . Deoarece noi afirmăm că această știință, geometria, se bazează pe ipoteze și demonstrează consecințele deduse din anumite principii — căci numai o știință este fără ipoteze, celelalte însă primesc principiile lor de la aceasta — atunci autorul unei cărți elementare de geometrie trebuie neapărat să expună separat principiile științei și separat consecințele deduse din principii ; el nu trebuie să justifice principiile, dar trebuie să justifice consecințele deduse din principii. Căci nici o știință nu-și demonstrează propriile sale principii și nu le pune în discuție, ci le consideră ca sigure în ele înseși ; ele sînt pentru acea știință mai clare decît deducțiile ; pe primele le cunoaște în propria lor lumină, deducțiile însă prin principii. Așa, de pildă, și cercetătorul naturii dezvoltă sistemul său pornind de la un anumit principiu, presupunînd existența mișcării, de asemenea medicul și orice reprezentant al altor arte și științe. Dacă însă cineva aruncă în aceeași oală și principiile și deducțiile din acestea, atunci produce numai dezordine în întregul domeniu al științei și amestecă lucruri care nu au nimic de a face între ele. Căci principiul și ceea ce se deduce din principiu sînt din capul locului separate între ele.

. . . *Euclid* împarte și principiile comune în definiții (ipoteze), postulate și axiome. Toate acestea sînt deosebite între ele și

— cum spune undeva slăvitul *Aristotel* — axioma, postulatul şi definiţia nu sînt acelaşi lucru; dacă ceea ce este admis ca principiu este simplu şi evident în sine pentru un învăţăcel, atunci este vorba de o axiomă, ca, de pildă, în propoziţia: dacă două mărimi sînt egale cu a treia, atunci sînt egale între ele. Dacă însă cel care ascultă o afirmaţie nu o înţelege ca ceva evident de la sine, şi totuşi afirmaţia este enunţată şi el o admite, atunci este vorba de o definiţie (ipoteză). Faptul, de pildă, că cercul este o figură cu anumite proprietăţi, nu se găseşte în mintea noastră dinainte (*a priori*) ca noţiune comună şi fără ca cineva să ne-o fi explicat; dacă însă o ascultăm, atunci o admitem fără demonstraţie. Dacă însă afirmaţia este încă necunoscută şi cu toate acestea este acceptată, deşi ascultătorul nu o admite, atunci, spune *Aristotel*, avem de-a face cu un postulat, ca de pildă, propoziţia că toate unghiurile drepte sînt egale între ele. Demonstraţia ne-o furnizează toţi aceia care şi-au dat multă osteneală cu rezolvarea unui postulat, pentru că erau convinşi că nimeni nu l-ar putea admite ca evident[1]...

Deducţiile din principii se împart, la rîndul lor, în probleme şi teoreme. Cele dintîi cuprind în ele construirea figurilor, împărţirile, scăderile sau adunările şi în genere toate modificările ce li se pot aduce; celelalte pun în evidenţă proprietăţile esenţiale. După cum ştiinţele practice nu pot s-o scoată la capăt fără teorie, tot astfel disciplinele teoretice şi-au asociat probleme care corespund activităţii productive. Chiar unii dintre cei vechi, ca de pildă şcoala lui *Speusip* şi *Amfinom* cereau ca toate să fie numite teoreme. Ei erau de părere că în ştiinţele teoretice s-ar potrivi mai degrabă numele de teoreme decît de probleme, mai ales pentru că ele s-ar ocupa cu un obiect etern. Căci în domeniul eternului nu există devenire, astfel încît aici nu s-ar găsi nici un loc pentru o problemă care ar conduce la crearea şi devenirea a ceva care nu exista mai înainte, ca, de pildă, construcţia unui triunghi echilateral sau descrierea unui pătrat de latură dată... După ei, este deci mai corect să spunem că toate aceste lucruri există şi că noi considerăm devenirea lor nu faptic, ci cognitiv, privind existentul etern ca ceva în devenire, aşa încît vom spune că totul ar trebui luat în sens de teoremă şi nu de problemă. Alţii ca cei din şcoala matematică a lui *Menaichmos*, dimpotrivă, voiau să denumească întregul complex probleme. Într-o problemă sarcina este însă dublă: pe de o parte este vorba de a găsi ceea ce cauţi, pe de altă parte de a lua un anumit obiect şi de a cerceta ce este sau de ce natură este sau ce se întîmplă cu el sau în ce relaţie se găseşte faţă de alt obiect. Ambele şcoli au dreptate. Şcoala lui *Speusip* are dreptate: căci problemele de geometrie sînt de altă natură decît cele de mecanică. Acestea din urmă sînt vizibile, au o devenire şi suferă diferite modificări. La fel şi şcoala lui *Menaichmos*: căci fără a pătrunde în materie nu este posibilă aflarea teoremelor; mă refer, bineînţeles, la materia inteligibilă. Se spune deci pe drept cuvînt că ideile, pătrunzînd în materie şi dîndu-i formă, s-ar asemăna cu devenirea. Căci activitatea spiritului nostru şi emanaţia ideilor sale o considerăm ca origine a figurilor în fantezia noastră şi ca origine a proceselor prin care ele trec. Căci aici este locul pentru construcţii şi împărţiri, poziţii şi aplicaţii ale ariilor, adăugiri şi scăderi; în spirit însă totul există fără devenire şi fără modificări.

---

[1] Este vorba de postulatul paralelelor. Proclos relatează mai departe încercarea lui Ptolemeu şi a lui însuşi de a demonstra acest postulat. Cf. *Eecke*, Proclus de Lycie, p. 69, notă. — *N. T.*

... Aceia care disting teorema de problemă spun că fiecare problemă admite dintre predicatele despre materia respectivă orice lucru specificat, precum şi pe contrariul său; fiecare teoremă admite însă numai predicatul în sine dar nu şi contrariul său.

... Dacă cineva formulează problema astfel: să se înscrie într-un cerc un triunghi echilateral, atunci el enunţă o problemă, căci este posibil să se înscrie în cerc şi un triunghi neechilateral. Şi, de asemenea, construirea unui triunghi echilateral pe un segment dat, precis determinat, este o problemă; căci este posibil să se construiască şi un triunghi neechilateral. Dacă însă cineva enunţă propoziţia că unghiurile de la baza triunghiului isoscel sînt egale, atunci spunem că avem aici o teoremă; căci este imposibil ca unghiurile de la baza triunghiului isoscel să nu fie egale. De aceea dacă cineva cerînd să se înscrie un unghi drept într-un semicerc s-ar exprima ca şi cum ar fi vorba de o problemă, acela ar căpăta reputaţia de profan în geometrie, deoarece orice unghi înscris într-un semicerc este drept.

Mai departe, în alt pasaj al comentariului său asupra lui *Euclid*, *Proclos* studiază mai amănunţit problemele speciale ale înrudirii şi deosebirii între postulate şi axiome. El îmbină această analiză cu o critică a înglobării unor propoziţii fundamentale și nedemonstrate în grupa postulatelor, respectiv axiomelor (Friedlein, p. 178 și urm.).

Principiile geometrice se împart în trei părți: definițiile, postulatele și axiomele. După ce am arătat mai înainte deosebirea dintre ele, acum avem datoria să ne ocupăm îndeosebi și mai precis de postulat și axiomă, căci mai ales despre ele avem de vorbit aici, de vreme ce ipotezele și așa-numitele definiții le-am tratat deja.

Axiomele și postulatele au comun faptul că nu au nevoie de nici o fundamentare și nici de demonstrații geometrice, ci sînt admise ca fiind cunoscute și ca principii pentru cele ce urmează. Ele se deosebesc între ele la fel cum se deosebesc teoremele de probleme. Așa cum la teoreme am cerut să vedem și să cunoaștem consecințele din ipoteze, iar la probleme ne-am propus să găsim și să efectuăm ceva[1], tot astfel și la axiome se admite ceva ce este evident dintr-o dată și nu prezintă dificultăți pentru gîn-

---

[1] Este surprinzător că, în acest capitol, intitulat „Probleme logice și metodice", O. Becker omite un element metodologic esențial pentru fundamentarea matematicilor eline, anume metoda *analitică* (resolutivă) și *sintetică* (compozitivă), deși deosebește teoremele de probleme în sensul analizei. Am arătat într-o notă anterioară (p. 118) că, potrivit relatării lui Diogene Laertiu, Platon este primul care a învățat pe matematicieni metoda analitică (a deducerii din ipoteze). Prima definiție a analizei, ca metodă matematică, o avem însă, lapidar formulată, de Euclid, în cartea a XIII-a a *Elementelor*: „Analiza este admiterea lucrului căutat, ca cunoscut, pentru a deduce din el consecințele care conduc la un anumit adevăr cunoscut" (cf. și J. M. C. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, Paris, Gauthier-Villars, 1875, chapitre X, p. 62; E. Kolman, *Istoria matematicii în antichitate*, Editura Științifică, București, 1963, p. 133). Cea mai completă prezentare a analizei ca metodă de cercetare matematică o deținem însă de la Pappus din Alexandria (secolul al III-lea e.n.), în cartea a VII-a a celebrelor sale *Collectiones Mathematicae*, carte deosebit de prețioasă prin faptul că în ea ni se desfășoară o descriere amănunțită a lucrurilor ce intrau în așa-numitul „tezaur al analizei", format din operele lui Euclid, Apollonios și Aristeu. (Cf. și Kolman, *op. cit.* p. 211). Iată definiția *analizei* și *sintezei* dată de Pappus: „Locul numit despre analiză (*analioumenos*) Hermodor, fiule, este, pentru a vorbi pe scurt, o anumită materie destinată acelora care, după perceperea elementelor comune, doresc să-și pregătească facultatea de a descoperi în geometrie soluțiile problemelor propuse; ea este utilă numai în acest unic scop. Ea a fost tratată de trei bărbați, anume de Euclid, autorul *Elementelor*, de Apollonios din Perga și de bătrînul Aristeu. Se procedează (în această materie) prin *resoluție* și prin *compoziție*.

Resoluția este metoda prin care, plecînd de la ceea ce se caută, ca și cum ar fi dat, sîntem conduși, prin cele ce urmează apoi din acestea, la o concluzie oarecare, prin puterea căreia se face compoziția. Căci în resoluție, presupunînd direa noastră neinstruită. La postulate însă noi căutăm să aflăm ceea ce este ușor de găsit și de stabilit, fără să obosească intelectul atunci cînd face eforturi pentru aceasta, fără să aibă nevoie de procedee complicate și de vreo construcție. Așadar ceea ce deosebește postulatele și axiomele sînt cunoașterea imediată fără demonstrații și aflarea facilă fără construcție, tot astfel cum ceea ce deosebește teoremele de probleme sînt cunoașterea care se sprijină pe demonstrație și rezolvarea problemei căutate cu ajutorul unei construcții. Căci în fiecare caz principiile trebuie să se deosebească de consecințele deduse din principii prin simplitate, prin înlăturarea demonstrațiilor și prin propria evidență. Căci în genere, observă *Speusip*, spiritul gînditor scoate clar în evidență unele din obiectele cercetării sale fără să folosească raționamente complicate, și le rînduiește din capul locului ca material pentru cercetările viitoare și are cu aceste obiecte un contact mai convingător decît are ochiul cu obiectul văzut. Pe alte obiecte însă, spiritul gînditor, neputîndu-le pricepe ime-

---

ca efectuat ceea ce se caută, cumpănim din ce antecedent rezultă acesta; și tot așa, care a fost antecedentul acestuia; și tot așa apoi, pînă ce, pe această cale regresivă, dăm peste ceva deja cunoscut sau considerat între principii. Și această cale se numește *analiză*, ca și cum ai zice soluție inversă.

În compoziție însă, dimpotrivă, admițînd ca deja efectuat acel lucru cunoscut la care ne-a condus resoluția, și dispunînd într-o ordine naturală cele ce acolo erau consecvențe, ca antecedențe aici, și comparîndu-le între ele, ajungem în cele din urmă la construcția celui căutat. Această cale o numim *sinteză*.

Analiza este de două feluri: căci sau urmărește demonstrarea adevărului, numindu-se atunci *teoretică*; sau execuția unui lucru propus și se numește *problematică*.

În analiza teoretică, presupunînd că este cunoscut ceea ce se caută, și demonstrînd apoi prin cele ce rezultă, ca și cum ar fi adevărate (după cum de altfel sînt prin ipoteză), ajungem la o propoziție evidentă. Dacă concluzia asta este adevărată, este adevărată, de asemenea, și propoziția de la care se pleacă; și demonstrația se face în sens invers analizei. Dacă însă ajungem la o concluzie falsă, va fi falsă, de asemenea, și propoziția de la care se pleacă.

În analiza problematică, considerînd drept cunoscut deja ceea ce este propus, sîntem conduși prin cele ce rezultă de aici la o concluzie oarecare; dacă concluzia asta este posibilă și operatorie (ποριστης), ceea ce matematicienii numesc *datum*, va fi posibil, de asemenea, și ceea ce este propus, și aici demonstrația se face, tot așa, în sens invers analizei. Dacă ajungem la o concluzie imposibilă, problema va fi de asemenea imposibilă. Diorismul sau determinația este operația prin care se discerne în ce condiții și în cîte moduri poate fi efectuată problema.

Acestea sînt de spus despre resoluție și compoziție. (Traducerea este făcută, după versiunea latină a *Colecțiilor*, de Halley și publicată de J. M. Duhamel, *op. cit.*, pp. 62–64 (cf. de asemenea și notele critice la traducerea română a lucrării lui Descartes, *Regule*, pp. 102–104). — *C. V.*

diat, caută să le înţeleagă ca decurgînd din acele principii, de care se apropie prin metode variate. De pildă, problema de a duce o dreaptă de la un punct la alt punct este pentru spirit ceva uşor şi de la sine înţeles. Căci dreapta angajată în mişcarea uniformă a punctului ajunge la celălalt punct, excluzînd orice abatere mai mare sau mai mică (la dreapta sau la stînga). De asemenea, dacă unul din puncte rămîne extremitatea liniei, iar celălalt se învîrteşte în jurul său, atunci el descrie fără nici un efort un cerc. Dacă însă vrem să desenăm o singură spirală, este nevoie de un aranjament mai complicat: căci pentru aceasta sînt necesare mişcări complicate; iar dacă cineva vrea să construiască un triunghi echilateral, atunci are nevoie şi în acest caz de un procedeu metodic pentru construirea triunghiului. Căci spiritul geometric va spune că am desenat spirala dacă îmi imaginez o dreaptă care are un punct fix la un capăt, iar celălalt capăt se învîrteşte în jurul acestuia, în plus îmi imaginez un alt punct care se mişcă pe dreaptă, începînd de la capătul fix. Căci, în acelaşi timp, capătul dreptei care descrie un cerc şi punctul care se mişcă pe dreaptă vor forma prin întîlnirea şi suprapunerea lor o astfel de spirală...

Aşadar, mai trebuie mult ca aceste probleme să fie rezolvate de noi de la prima vedere printr-un procedeu simplu. Trebuie să ne mulţumim a urmări procesul lor de devenire. Faptul că astfel de soluţii sînt mai uşoare sau mai grele şi se demonstrează prin mai multe sau mai puţine verigi, depinde de abilitatea celui ce se ocupă cu ele; însă necesitatea unei demonstraţii şi a unei construcţii în genere depinde de specificul problemelor care sînt lipsite de claritatea postulatelor şi axiomelor. Aşadar susţin că ambele, postulatul şi axioma, trebuie să aibă un caracter simplu şi uşor de înţeles; însă postulatul ne pretinde ca, pentru explicarea unei proprietăţi, să ne procurăm un obiect oarecare şi să-l facem disponibil, obiect care să fie simplu şi uşor de găsit; dimpotrivă, axioma ne pretinde numai să numim o proprietate esenţială, care bineînţeles este cunoscută ascultătorilor...

După cum problema şi teorema se deosebesc între ele, tot astfel postulatul şi axioma, chiar dacă ambele sînt fără demonstraţie: postulatul se ia în sens de ceva uşor de efectuat, iar în cazul axiomei există consens în ce priveşte caracterul înţelegerii uşoare.

Geminos distinge, deci, în acest mod postulatele de axiome; alţii ar putea să spună că postulatele sînt specifice materiei geometrice, pe cînd axiomele, din contră, sînt comune teoriei generale a cantității (numerice) și a mărimii (geometrice) ...

Aristotel afirmă însă, așa cum am arătat mai înainte, că postulatul este demonstrabil și că de aceea nu este acceptat de ascultător (ca de la sine înțeles), este totuși admis ca principiu; că axioma însă este în sine indemonstrabilă și că toți ar accepta-o datorită unei predispoziții sufletești, chiar dacă unii și-ar exprima împotriva ei îndoiala, de dragul disputei.

Acum, că avem aceste trei definiții, este evident ca după prima, care distinge postulatul de axiomă numai prin aflare și recunoaștere, propoziția despre egalitatea tuturor unghiurilor drepte nu este un postulat și tot așa nici a cincea propoziție care spune că dacă o dreaptă întîlnește alte două drepte și unghiurile interne de aceeași parte a primei drepte sînt mai mici decît două unghiuri drepte, atunci dreptele prelungite se întîlnesc de acea parte unde sînt situate unghiurile mai mici decît două unghiuri drepte.

Căci această propoziție nu este întrebuințată la o construcție nici nu cere să se găsească ceva, ci lămurește o proprietate comună unghiurilor drepte și dreptelor care formează unghiuri mai mici decît două unghiuri drepte. După a doua definiție propoziția conform căreia două drepte nu închid o suprafață nu conține nici o axiomă, deși unii chiar și azi o socotesc axiomă. Căci această propoziție, ca și aceea despre egalitatea tuturor unghiurilor drepte, aparține materiei geometrice. După a treia definiție, a lui *Aristotel*, toate propozițiile întemeiate pe un procedeu de demonstrație sînt postulate; propozițiile care nu sînt susceptibile de demonstrație sînt axiome. A fost deci o încercare zadarnică din partea lui *Apollonios* de a da demonstrații pentru axiome. *Geminos* a arătat foarte bine cum unii ar voi să născocească demonstrații și pentru propozițiile nedemonstrabile și s-au apucat să demonstreze adevăruri cunoscute de toți cu ajutorul unor verigi intermediare mai puțin cunoscute: acestui pericol i-a căzut victimă *Apollonios* cînd s-a străduit să demonstreze adevărul axiomei care afirmă că mărimile egale cu a treia sînt egale între ele, în timp ce alții au înglobat între propozițiile nedemonstrabile chiar și pe acelea care au nevoie de o demonstrație, cum a făcut *Euclid* însuși cu postulatul al patrulea[1] și al cincilea[1]. Căci despre al patrulea unii afirmă că

.[1] Postulatul egalității unghiurilor drepte și postulatul paralelelor. — *N. T* ar avea nevoie de o demonstrație din cauza incertitudinii sale. De altfel cum să nu fie ridicol a socoti nedemonstrabile propoziții ale căror reciproce sînt teoreme demonstrabile? Căci faptul că unghiurile interne a două drepte concurente sînt mai mici decît două unghiuri drepte, însuși *Euclid* îl demonstrează în acea teoremă conform căreia în orice triunghi două dintre unghiurile interne oricum le-am lua sînt împreună mai mici decît două unghiuri drepte. De asemenea faptul că nu în orice caz un unghi, care este egal cu un unghi drept, este unghi drept, se poate ușor demonstra. De aceea, spune *Geminos*, nu trebuie să admitem că propozițiile care formează reciprocele acestora sînt nedemonstrabile. Așadar, după clasificarea acestuia, se pare că trei dintre propoziții sînt postulate, celelalte două însă au nevoie de demonstrație prin știință, atît ele cît și reciprocele lor; însă admiterea ca axiomă a propoziției că două drepte nu închid o suprafață apare inutilă, dacă ea devine convingătoare de-abia printr-o demonstrație. Atît despre distincția între postulate și axiome.

II. PROBLEMA EXISTENȚEI OBIECTELOR MATEMATICE

1. Primele idei asupra ontologiei obiectului matematic la pitagoreici

Speculația filozofică s-a îndreptat încă de timpuriu spre specificul modului de cunoaștere matematică și al obiectelor ei. Primii care au reflectat asupra acestor lucruri au fost pitagoreicii.

Fragmentele următoare dintr-o operă pitagoreică de la sfîrșitul secolului al V-lea, transmise sub numele lui **Philolaos**, ne dau o idee asupra modului cum pitagoreicii concep în principiu relația dintre număr și natură.

(*Fragment* B1 [Diels]). Natura în univers a fost însă alcătuită din bucăți nelimitate și delimitante, atît întregul univers cît și toate lucrurile care există în el.

(B 3). De la bun început nu va putea exista nici măcar un singur obiect al cunoașterii, dacă totul ar fi nelimitat.

(B 4). Și de fapt tot ce se poate recunoaște are număr. Căci fără număr nu este posibil să cuprinzi ceva cu gîndul sau să recunoști.

(B 11). Trebuie să judecăm natura şi lucrarea numărului după forţa care zace în numărul decadic. Căci forţa numărului şi în special a numărului decadic, este mare, capabilă de perfecţiune, atotfăcătoare, este începutul şi conducătorul vieţii zeeşti şi cereşti ca şi al vieţii omeneşti participînd la toate. Fără această forţă totul este însă nelimitat, fără sens şi confuz. Căci natura numărului este răspînditoare de cunoştinţe, îndrumătoare şi învăţătoare pentru orice om în orice chestiune care îi este îndoielnică sau necunoscută. Căci lucrurile nu ne-ar fi clare, nici în raport cu noi nici în raporturile reciproce dintre ele, dacă n-ar exista numărul şi esenţa sa. El aduce în suflet armonie între lucruri şi percepţie şi face lucrurile cognoscibile şi corespunzînd între ele conform naturii gnomonului, făcîndu-le concrete şi separînd relaţiile între lucruri, fiecare pentru sine, atît între cele nelimitate cît şi între cele delimitante...

Natura numărului şi armonia nu admit falsitatea, care le este cu totul străină. Falsitatea şi pizma aparţin naturii nelimitatului, iraţionalului şi absurdului... Adevărul este specific şi înnăscut genului numărului.

O generaţie mai tîrziu, aproximativ, trăieşte prietenul lui *Platon*, **Archytas** din Tarent, un distins matematician şi om de stat, persoană centrală a cercurilor pitagoreice cu preocupări ştiinţifice în perioada de trecere de la secolul al 5-lea la al 4-lea.

Urmează cîteva din fragmentele sale păstrate textual, în care se vorbeşte despre diferite *mathemata* (învăţături matematice).

(*Fragment* B1 [Diels]). Mi se pare că matematicienii au dobîndit cunoştinţe excelente şi nu este de mirare că ei gîndesc corect despre natura lucrurilor particulare. Căci întrucît ei au dobîndit cunoştinţe excelente asupra naturii universului trebuie să fi căpătat şi asupra naturii lucrurilor particulare o privire excelentă. Astfel ei ne-au transmis o idee clară despre viteza constelaţiilor şi despre răsăritul şi apusul lor, precum şi asupra geometriei, asupra numerelor (aritmetică) şi asupra ştiinţei, despre sferă, şi nu în cea mai mică măsură şi despre muzică. Aceste ştiinţe par să fie înfrăţite căci se ocupă de cele două forme originare gemene ale existentului...

(B 4). Arta calculului are, se pare, un rol predominant faţă de alte arte în raport cu ştiinţa; îndeosebi chiar faţă de geometrie, pentru că poate trata mai clar decît aceasta ceea ce vrea. (Căci geometria demonstrează, acolo unde celelalte arte nu sînt de nici un ajutor), și acolo unde geometria este de asemenea incapabilă, arta calculului realizează atît demonstrații, cît și explicarea formelor, în cazul că există în genere o mînuire efectivă a formelor...

În prima carte a *Metafizicii*, **Aristotel** expune rezumativ filozofia *pitagoreicilor* și a lui *Platon*, care, după părerea sa, au nutrit idei foarte asemănătoare asupra naturii numerelor.

Metafizica A 5 (p. 985 b 23—986 a 3; 986 a 15—21; 987 a 15—27):

În același timp, și în parte chiar mai înainte, s-au ocupat cu matematica așa-numiții pitagoreici și ei au fost primii care au promovat-o. Și pentru că se ocupau așa de mult cu ea, ei au crezut că fundamentele sale ar fi fundamentele lucrurilor în genere. Deoarece în matematică numerele ocupă, în mod firesc, primul loc și pentru că ei credeau că recunosc în numere analogii pentru toate lucrurile existente și lucrurile în devenire mai mult decît în foc, pămînt și apă, în măsura în care cutare proprietate a numerelor înseamnă dreptate, cutare suflet și rațiune, cutare momentul exact, și așa mai departe cu toate lucrurile. Observînd, de asemenea, că natura și rapoartele armoniei muzicale se exprimă prin numere și deoarece lor li se părea că toate lucrurile s-ar asemăna, în ce privește natura lor, cu numerele, ca și cum numerele ar fi deci mai întîi în esența oricărui lucru — de aceea ei au formulat opinia că elementele numerelor ar fi și elementele tuturor celorlalte lucruri și deci întregul cer ar fi armonie de sunete și număr... Se pare deci că și ei văd în numere un fel de principiu, și anume atît ca materie a lucrurilor cît și ca proprietăți și stări ale lor, elementele constitutive ale numărului fiind iarăși parul și imparul, respectiv în fine infinitul și finitul; potrivit învățăturii lor unitatea s-ar deduce din ambele (căci ea ar fi atît pară cît și impară), numerele s-ar deduce iarăși din unitate și numerele formează cerul întreg, așa cum afirmă ei...

Pitagoreicii adăugau că finit-infinit și unitate nu ar trebui considerate ca fiind de naturi diferite ca focul sau pămîntul sau altele asemenea, ci că infinitul și unitatea însăși alcătuiesc esența acelui lucru căruia îi sînt atribuite, și că din această cauză însăși esența tuturor lucrurilor ar fi numărul. Astfel a fost învățătura lor despre aceste lucruri și ei au și început să vorbească despre concepte și să determine concepte, desigur încă în mod copilăresc: Ei defineau foarte superficial un concept și acolo unde se potrivea mai întîi, ei îl luau drept esență a lucrului, procedînd ca cineva care ar crede că dublul și doi ar fi același lucru pentru că doi este mai întîi și întîi un dublu. Dar chiar din punct de vedere conceptual a fi dublu și a fi doi, nu este același lucru, căci atunci și unu ar deveni multiplu, ceea ce lor li s-a și întîmplat.

Metafizica A 6 (p. 987 b 11—988 a 7):

Pitagoreicii arătaseră că realul ar exista datorită „imitării" numerelor. Iar *Platon* numea aceasta „participare". În ce constă însă această imitare sau participare, în general, ei au neglijat să cerceteze. El mai afirmă că, alături de lumea simțurilor și de idei, s-ar afla ca intermediare formele matematice ale lucrurilor, forme care se deosebesc de lumea sensibilă prin faptul că sînt eterne și imuabile, iar de idei prin faptul că ele ar exista în mai multe copii asemănătoare între ele, în timp ce ideea este totdeauna numai una singură.

Deoarece el considera că ideile ar trebui să fie cauze pentru toate celelalte, elementele lor constitutive ar fi elementele tuturor lucrurilor în genere. Baza oarecum materială ar forma-o marele și micul, baza esențială ar forma-o unitatea: căci ideile ar proveni din acelea, conform participării lor la unitate, din care cauză numerele ar fi idei. Desigur el susținea, ca și pitagoreicii, că unitatea ar constitui nemijlocit esența și că nu s-ar atribui numai existentului, după cum el este de acord cu învățătura pitagoreicilor și în părerea că numerele formează baza esenței pentru toate lucrurile. Specific învățăturii sale este faptul că el face din infinit o diadă și lasă să se formeze infinitul din mare și mic; de asemenea, faptul că el pune numerele alături de lumea simțurilor, în timp ce pitagoreicii susțineau că numerele ar fi lucrurile înseși și nu dădeau formelor matematice o poziție intermediară (între lumea simțurilor și idei). Faptul că el a rînduit unitatea și numerele lîngă lucruri, și nu ca pitagoreicii, precum și introducerea ideilor, toate acestea provin din cercetarea sa asupra gîndirii (înaintea lui nu se știa încă nimic despre dialectică). Faptul că el a considerat cealaltă bază, „infinitul", ca fiind diada, provine din părerea că numerele (exceptînd pe primele [1, 2]) se pot plăsmui din ea ușor ca dintr-o masă de ceară. Și totuși în realitate se întîmplă invers, din care cauză el nici nu este consecvent : la *Platon* numerele produc pluralitatea din propria lor bază materială, în timp ce unitatea plăsmuieşte numai o dată ; dar, evident, dintr-un material se produce numai o masă, în timp ce persoana care are modelul face multe mese. Tot aşa stau lucrurile cu partea masculină faţă de cea feminină : în timp ce femeia rămîne însărcinată după o împreunare, masculul, dimpotrivă, lasă multe însărcinate ; şi aceste exemple ar trebui să fie copii ale acelor forme originare.

2. Platon despre sensul existenţial al obiectului matematic

Urmează două pasaje din *Republica* lui **Platon.** În primul matematica este caracterizată ca o cunoaştere a imuabilului — în ciuda cuvintelor cu sens de acţiune, pe care le întrebuinţează geometrii în descrierea ,,construcţiilor" lor. (Să ne amintim discuţia dintre *Speusip*, succesorul lui *Platon*, şi *Menaichmos*, matematicianul pur, elevul lui *Eudoxos*, asupra chestiunii privind esenţa teoremei şi problemei, discuţie relatată de *Proclos* (cf. p. 124 şi urm.)

Statul, VII, 526 a, — 527 a:

Socrate. Aşadar dacă geometria ne sileşte să considerăm ceea ce există, ea ne este de folos ; dacă însă ne obligă să considerăm ceea ce este în devenire, atunci ea n-are nici un folos.

Glaukon. Aşa susţinem noi cel puţin.

Socrate. Acum, aceia care sînt versaţi numai într-o oarecare măsură în geometrie nu ne vor combate afirmaţia că esenţa acestei ştiinţe stă în contradicţie directă cu modul de exprimare de care se servesc cei care o practică.

Glaukon. Cum aşa ?

Socrate. Expresiile lor sînt ridicole şi forţate ; căci ei aleg toate expresiile lor, cum sînt : a face un pătrat, a alungi, a adăuga şi alte cuvinte care le vin la gură, ca şi cum ei ar voi să pună ceva în acţiune şi să obţină un efect real ; de fapt însă toată această ştiinţă nu are drept scop decît cunoaşterea pură.

Dăm mai jos scena clasică cu sclavul din *Menon* (82 b—85 e) în care Platon nu ne dă numai un tablou viu al învăţămîntului elementar de geometrie din acea epocă, ci el elucidează în modul cel mai clar şi caracterul ,,aprioric" al cunoaşterii matematice, pe care este nevoie numai s-o gîndim, pentru ca să ne-o ,,a-mintim" din nou (fig. 35).

Socrate (către sclav). Spune-mi băiete, observi tu la această suprafață cu patru colțuri că este o figură cu patru vîrfuri?

Sclavul. Da.

Socrate. Totuși această figură cu patru colțuri nu are patru laturi egale — astea de aici — patru la număr?

Sclavul. Da, sigur.

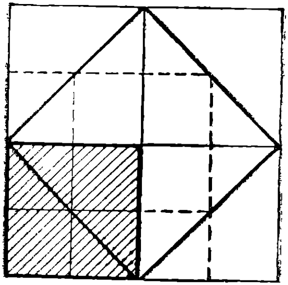


Fig. 35

Socrate. Nu sînt oare egale aceste linii trase prin mijloc (paralel cu laturile)?

Sclavul. Da.

Socrate. Totuși am putea să considerăm o astfel de figură și mai mare sau mai mică?

Sclavul. Desigur.

Socrate. Dacă, acum, această latură ar măsura două picioare și aceasta tot două picioare, cîte picioare ar avea totul? Înțelege aceasta în felul următor: dacă această latură ar măsura două picioare, iar cealaltă numai un picior, oare n-ar avea figura atunci dintr-o dată două picioare?

Sclavul. Da.

Socrate. Pentru că însă pe această latură sînt două picioare, nu rezultă atunci de două ori cîte două picioare?

Sclavul. Așa este!

Socrate. Figura conține așadar de două ori cîte două picioare.

Sclavul. Da.

Socrate. Cît face însă de două ori cîte două picioare? Socotește și spune-mi!

Sclavul. Patru, Socrate.

Socrate. Nu s-ar putea face o a doua suprafață de două ori mai mare, și anume asemenea, avînd laturile egale ca și aceasta?

Sclavul. Da.

Socrate. Cîte picioare va avea?

Sclavul. Opt.

Socrate. Ei bine, atunci încearcă să-mi spui cît va fi de lungă fiecare latură a acelei suprafețe? Latura suprafeței noastre este lungă de două picioare; cît de lungă va fi însă latura suprafeței duble?

Sclavul. Este, evident, Socrate, că va fi de lungime dublă.

Socrate (către Menon). Vezi, Menon, că eu nu-l învăț nimic, ci numai îl întreb. Și cum el crede că știe cît de mare este latura care trebuie să ne dea suprafața de opt picioare. Sau nu ți se pare că este așa?

Menon. Desigur.

Socrate. Știe el într-adevăr?

Menon. Nu, desigur!

Socrate. El crede însă că este latura dublă.

Menon. Da.

Socrate. Privește acum, deci, cum el reflectează pas cu pas, așa cum se petrece cu reamintirea.

(Către sclav) Spune-mi: latura dublă trebuie să dea, după cum susții tu, o suprafață de două ori mai mare? Prin aceasta nu înțeleg ca figura să fie lungă într-o direcție și scurtă în altă direcție, ci să aibă toate laturile egale întocmai ca suprafața aceasta, dar să fie de două ori mai mare, și anume de opt picioare. Vezi, acum, dacă mai ești de părere că o latură de două ori mai lungă va da o astfel de suprafață.

Sclavul. Fără îndoială.

Socrate. Oare nu se dublează lungimea acestei laturi dacă îi adăugăm din acest punct încolo o lungime egală?

Sclavul. Desigur.

Socrate. Această latură (dublată) trebuie să dea deci, după părerea ta, o suprafață de opt picioare, dacă formăm patru laturi egale în lungime cu ea?

Sclavul. Da.

Socrate. Să construim deci pe ea o suprafață cu patru laturi egale. Atunci trebuie să obținem suprafața pe care tu o consideri de opt picioare?

Sclavul. Negreșit.

Socrate. Nu sînt cuprinse în ea aceste patru pătrate care sînt, fiecare, egale cu cel de patru picioare?

Sclavul. Da.

Socrate. Așadar cît de mare va fi? Nu oare de patru ori mai mare.

Sclavul. Fără îndoială.

Socrate. Este oare dublu ceea ce este de patru ori mai mare?

Sclavul. Nu, pe Zeus!

Socrate. Atunci de cîte ori este mai mare?

Sclavul. De patru ori.

Socrate. Așadar, băiete, latura dublată nu dă un pătrat dublu, ci un pătrat de patru ori mai mare.

Sclavul. Ai dreptate.

Socrate. Pentru că de patru ori patru face șaisprezece. Nu-i așa?

Sclavul. Da.

Socrate. Care e atunci latu care dă pătratul de 8 picioare? Aceasta dă pe cel de patru ori mai mare.

Sclavul. Da.

Socrate. Jumătate din ea nu ne dă pătratul de patru picioare?

Sclavul. Da.

Socrate. Bun. Suprafața de opt picioare nu este dublul acesteia și jumătate din aceea?

Sclavul. Da.

Socrate. Așadar latura aceleia nu trebuie să fie mai mare decît aceea, ci dimpotrivă, mai mică decît aceasta? Sau nu ești de aceeași părere?

Sclavul. După părerea mea, da!

Socrate. Bine; nu trebuie să exprimi decît propria ta părere. Spune-mi atunci: n-a fost aceea de două picioare și aceasta de patru picioare?

Sclavul. Da.

Socrate. Așadar trebuie ca latura pătratului de opt picioare să fie mai mare decît aceea de două picioare și mai mică decît aceea de patru picioare?

Sclavul. Trebuie.

Socrate. Încearcă să spui cît de lungă trebuie să fie după părerea ta.

Sclavul. Să aibă trei picioare.

Socrate. Dacă trebuie să aibă lungimea de trei picioare, atunci trebuie să adăugăm jumătate din ea, pentru a o face de trei picioare? Căci această latură are două picioare, aceasta un picior. Și la fel la latura aceasta. Acestea de aici sînt de două picioare, acesta este de un picior. Și astfel se obține pătratul de care ai vorbit.

Sclavul. Da.

Socrate. Dacă acum această latură are trei picioare și cealaltă latură tot trei picioare, atunci întreaga suprafață trebuie să aibă de trei ori trei picioare.

Sclavul. Desigur.

Socrate. Cît face de trei ori trei?

Sclavul. Nouă.

Socrate. Dar dublul cîte picioare trebuie să aibă?

Sclavul. Opt.

Socrate. Așadar, nici latura de trei picioare nu ne dă pătratul de opt picioare.

Sclavul. Încă nu.

Socrate. Atunci cît de mare trebuie să fie? Încearcă să ne spui precis; și dacă nu vrei să calculezi, atunci arată-ne pe figură linia respectivă.

Sclavul. Dar, pe Zeus, Socrate, nu știu.

Socrate (către Menon). Observi tu, Menon, pe ce treaptă a amintirii se află el? La început nu știa care este latura pătratului de opt picioare, așa cum nici acum nu știe, dar atunci credea că știe și răspundea cu siguranță ca un știutor și nu se simțea încurcat. Acum se știe încurcat și cum de fapt nu știe, nici nu crede că știe.

Menon. Ai dreptate.

Socrate. Nu este el deci acum într-o situație mai bună în ce privește chestiunea pe care n-a știut-o?

Menon. Așa cred.

Socrate. Punîndu-l în încurcătură și amorțindu-l așa cum ar face torpila, i-am provocat vreo pagubă?

Menon. Nu, așa mi se pare.

Socrate. L-am adus, deci, cîțiva pași mai aproape de găsirea adevărului. Căci acum el va înainta cu plăcere chiar ca neștiutor în cercetare, pe atunci el credea că poate afirma cu ușurință față de mulți că pătratul dublu trebuie să aibă o latură de lungime dublă.

Menon. Desigur.

Socrate. Crezi tu că el ar fi făcut vreodată încercarea de a cerceta sau învăța ceea ce credea că știe, fără a ști totuși, dacă n-ar fi fost adus mai înainte în încurcătură prin trezirea simțămîntului ignoranței sale și dacă n-ar fi fost cuprins de dorința de a ști?

Menon. Nu, Socrate, nu cred.

Socrate. Încurcătura i-a fost deci de folos.

Menon. Așa cred.

Socrate. Acum fii atent să vezi ce va găsi el din cauza acestei stări de încurcătură, cercetînd cu mine împreună, eu întrebîndu-l numai, nu învățîndu-l. Bagă de seamă ca să mă prinzi dacă eu îl învăț și îi dau lămuriri și dacă nu mă limitez la a-i cere părerea.

(Către sclav): Spune-mi, nu este acesta pătratul nostru de patru picioare? Înțelegi?

Sclavul. Da.

Socrate. Putem totuși să-i adăugăm aici unul egal cu el.

Sclavul. Da.

Socrate. Și mai putem adăuga acestora încă unul?

Sclavul. Da.

Socrate. Și, în sfîrșit, putem adăuga încă pentru completare și pe acesta în colțul care a apărut?

Sclavul. Desigur.

Socrate. Am avea atunci deci patru pătrate egale?

Sclavul. Da.

Socrate. De cîte ori este mai mare atunci acest întreg decît pătratul dat la început?

Sclavul. De patru ori mai mare.

Socrate. Trebuie însă să fie numai de două ori mai mare; sau nu-ți amintești?

Sclavul. Da, desigur.

Socrate. Nu este așa că o linie de acest fel dusă dintr-un colț împarte fiecare pătrat în două părți egale?[1]

Sclavul. Da.

Socrate. Apar astfel patru linii egale care închid acest pătrat?

Sclavul. Așa este.

Socrate. Gîndește-te bine: cît de mare este acest pătrat?

Sclavul. Nu pot să-mi dau seama.

Socrate. Nu sînt aici patru pătrate și nu a fost tăiat fiecare pe jumătate de fiecare linie? Sau nu este așa?

Sclavul. Da.

Socrate. Cîte astfel de jumătăți (triunghiuri) se află cuprinse în acest pătrat?

Sclavul. Patru.

Socrate. Cîte însă în acesta?

---

[1] Vezi Observația de la p. 446

Sclavul. Două.

Socrate. Cele patru, cum sînt în raport cu cele două?

Sclavul. Sînt de două ori mai mari.

Socrate. Cîte picioare are acest pătrat?

Sclavul. Patru picioare.

Socrate. Care este latura?

Sclavul. Aceasta.

Socrate. Este latura dusă dintr-un vîrf al pătratului de patru picioare la celălalt?

Sclavul. Da.

Socrate. Această linie este numită de învățați „diagonală". Dacă așa este, atunci, după părerea ta, sclav al lui Menon, diagonala va forma latura pătratului dublu.

Sclavul. Fără îndoială, Socrate.

Socrate (către Menon). Ce mai zici acum, Menon? A spus oare el vreo părere care să nu fie a sa proprie?

Menon. Nu, a spus numai propria sa părere.

Socrate. Și totuși, el nu știa nimic din astea, așa cum am vorbit noi puțin mai înainte.

Menon. Ai dreptate.

Socrate. Aceste păreri sînt ale minții lui! Sau nu este adevărat?

Menon. Da.

Socrate. Așadar, în mintea neștiutorului există păreri adevărate asupra lucrurilor pe care el nu le știe, oricare ar fi acestea.

Menon. Așa mi se pare.

Socrate. Și totuși acum i-au apărut aceste păreri ca în vis. Dacă îl întrebăm însă des și în diferite feluri despre același lucru, atunci el va ajunge pînă la urmă să posede cunoștințe temeinice despre aceasta.

Menon. Se poate admite.

Socrate. Așadar nu învățîndu-l, ci numai prin întrebări el va ajunge la știință, dobîndind din sine însuși cunoștințe.

Menon. Da.

Socrate. Dar oare dobîndirea cunoștinței din mintea sa proprie nu se numește „amintire"?

Menon. Negreșit.

Socrate. Ne întrebăm atunci dacă nu cumva știința pe care acest sclav o are a primit-o într-un anumit moment sau a avut-o totdeauna?

Menon. Da.

Socrate. Dacă el a posedat-o totdeauna, atunci a fost totdeauna știutor; dacă însă a primit-o la un moment dat, atunci el n-a primit-o totuși în viața de aici. Sau l-a instruit cineva în geometrie? Căci el va face în tot domeniul geometriei același lucru și tot așa în toate celelalte domenii ale științei. L-a instruit oare cineva în toate? Tu trebuie să știi mai bine decît oricine, căci el s-a născut și a crescut chiar în casa ta.

Menon. Eu știu că nimeni nu l-a instruit vreodată.

Socrate. Totuși, el are aceste păreri. Sau nu este adevărat?

Menon. Aceasta pare neîndoielnic, Socrate.

Cel de-al doilea pasaj este din *Statul* (VII, 529 c—e) lui **Platon** și conține o foarte interesantă caracterizare a astronomiei ca știință matematică ideală, care trebuie să descopere ,,adevăratele'' mișcări cerești, de la care mișcările observate se pot abate. Astronomul, deci, idealizează procesele cerești. Pe de altă parte, *Platon* a impus, fără îndoială, matematicienilor din cercul său (după cum spune *Simplicius* în comentariul său la opera lui Aristotel *Despre cer,* [pp. 488, 18—24.493, 4—506,18, Heiberg], bazîndu-se pe astronomul peripatetic *Sosigene* din secolul I î.e.n.) ca printr-o combinație de mișcări circulare uniforme ,,să păstrăm aparențele cerești''. Aceasta a dus la teoria sferelor concentrice ale lui *Eudoxos* și la sistemul lui *Herakleides Pontikos.*

Din pasajul următor reiese totuși foarte clar autonomia ontologică a obiectelor matematice, care nu se identifică cu ideile — căci constelațiile arată pluralitate și mișcare —, dar de care totuși se apropie prin comportarea lor regulată, totdeauna aceeași. A pune în evidență această comportare, cu ,,păstrarea aparențelor'', este chiar scopul diferitelor teorii astronomice ale epocii.

Statul, VII, 529 c—e.

Socrate. Iată cum putem considera constelațiile, acele podoabe ale cerului, ca cele mai frumoase și cele mai perfecte dintre lucrurile vizibile, dar totodată, întrucît sînt formate în lumea celor vizibile, trebuie să admitem că ele rămîn mult în urma celor adevărate, adică în urma mișcărilor în care se mișcă, una în raport cu alta, adevărata iuțeală și adevărata încetineală, conform adevăratului număr și potrivit tuturor figurilor adevărate și punînd în mișcare în același timp ceea ce ține de ele. Acestea sînt lucruri care se pot înțelege numai prin gîndire și rațiune, dar nu cu ajutorul vederii. Sau crezi altfel?

Glaukon. Cîtuși de puțin.

Socrate. Nu este așa că acest covor ceresc de stele trebuie folosit numai ca sursă de exemple pentru a ajunge prin ele la cunoașterea acelui domeniu superior, oarecum în același fel în care cineva ar vedea figuri și modele geometrice schițate și lucrate cu talent de către Daidalos sau de alt artist sau pictor cu pensula sau dalta? Căci dacă unul care se pricepe la geometrie ar privi astfel de lucruri, le-ar găsi din punct de vedere artistic foarte frumoase; dar ar fi cu adevărat ridicol dacă cineva ar vrea să le studieze serios cu intenția de a putea găsi în ele adevărata esență a raportului de egalitate sau a dublului sau a altui raport corespunzător.

Glaukon. Fără îndoială că ar fi ridicol.

Socrate. Un adevărat astronom nu ar fi oare în aceeași situație atunci cînd contemplă mișcările corpurilor cerești? Desigur, el va recunoaște că cerul, cu tot ce cuprinde în el, a fost creat așa de perfect de cel care l-a făcut, așa cum este posibil numai atunci cînd se creează astfel de lucruri. Dar în ce privește raportul de mărime dintre noapte și ziuă, raportul dintre acestea și durata unei luni, raportul dintre lună și an și raportul celorlalte stele față de acestea și al uneia față de celelalte nu l-ar socoti el oare drept prostănac pe acela care ar crede că aceste lucruri se întîmplă totdeauna la fel și că nu se întîmplă nici o abatere, cu toate că sînt lucruri materiale și vizibile, și ar crede că trebuie să caute pe orice cale să înțeleagă adevărul din ele?

Glaukon. Da, mie mi se pare că este așa cum aud de la tine.

Socrate. Așadar, ca și geometria, studiul astronomiei are pentru noi utilitatea că ne oferă probleme. Nu vrem să ne ocupăm însă numai cu ceea ce se petrece în cer, dacă avem intenția ca prin studiul astronomiei să facem folositoare facultatea sufletească naturală a rațiunii în loc de a o lăsa să devină nefolosită.

3. Caracterul „abstract" al obiectului matematic după Aristotel

Ne vom ocupa acum cu învățătura lui Aristotel asupra naturii obiectelor matematice.

În opoziție cu *Platon*, pentru care obiectul matematic, îndeosebi figurile geometrice, formează un domeniu intermediar între idei și lucrurile sensibile — înrudite cu ideile prin imuabilitatea lor (superioritate temporală) și cu lucrurile sensibile prin pluralitatea lor existențială (de pildă, mai multe cercuri într-o figură „ideală") —, *Aristotel* contestă entităților matematice autonomia (substanțialitatea); după el, ele iau naștere numai datorită abstracției (*aphairesis*).

Spre deosebire de fizician şi chiar de metafizician, matematicianul studiază ceea ce în sine este neseparat ca fiind separat în cursul realizării activităţii sale de abstractizare. (Fizicianul studiază ceea ce este legat de materie ca un întreg neseparat, metafizicianul — ceea ce este separat de materie).

Toate acestea le-a susţinut deseori Aristotel în diferite scrieri; dăm mai jos cîteva pasaje principale:

Fizica, II, 2 [pp. 193 b 22—194 a 12]:

După ce am stabilit în cîte sensuri se spune „natură", trebuie să vedem acum prin ce se deosebeşte matematicianul de fizician; căci corpurile fizice au suprafeţe, volume, lungimi şi puncte, lucruri pe care matematicianul le examinează. Trecînd mai departe, de asemenea astronomia sau este diferită de fizică sau este o ramură a ei, căci dacă fizicianul ar trebui numai să ştie ce este soarele sau luna, dar nu şi ce se petrece cu ele, ar fi absurd, mai ales că vedem cum cei care vorbesc despre natură discută şi despre forma lunii şi a soarelui, precum şi despre problema dacă pămîntul şi lumea întreagă sînt sau nu sînt sferice. Cu aceste forme se ocupă şi matematicianul, dar nu le studiază, ca şi cum ar fi un corp fizic, pe care ele îl delimitează, şi el nu cercetează atributele lor ca atribute ale unor astfel de corpuri. De aceea, el separă obiectele matematice, căci în gîndire ele sînt separabile faţă de mişcare, nu sînt afectate prin separare şi separaţia nu implică vreo eroare. (Acest lucru îl fac şi cei care vorbesc despre „idei", căci ei separă şi lucrurile fizice, care sînt însă mult mai puţin separabile decît cele matematice.)

Lucrul acesta ar deveni mai clar, dacă s-ar încerca să se delimiteze atît domeniul lucrurilor înseşi cît şi al accidentelor. Astfel pereche şi nepereche (la numere), drept şi curb, linie şi figură sînt lucruri independente de mişcare, dar carnea, osul şi omul nu; despre ele se spune ca despre nas că este cîrn, nu curb.

Aceasta o arată şi ramurile mai fizice ale matematicii, ca de pildă optica, armonia şi astronomia; căci ele sînt într-o anumită măsură inverse geometriei. Pe de o parte, geometria examinează o linie fizică, numai că nu în măsura în care este fizică, şi pe de altă parte optica examinează o linie matematică, numai că nu în măsura în care este matematică, ci în măsura în care este fizică . . .

Despre suflet, I, 1 (p. 403 b 11—16):

Cercetătorul naturii, dimpotrivă, se ocupă de toate proprietățile active și de atributele pasive ale corpului de un anumit fel și ale materiei corespunzătoare. Ceea ce nu este de acest fel, este cercetat de altul (unele de tehnician, de la caz la caz, fie de tîmplar, fie de medic) ; de asemenea, atributele inseparabile, care însă nu sînt privite ca proprietăți ale unui anumit corp, ci sînt cercetate prin abstracție, constituie obiectul de studiu al matematicianului ; în timp ce atributele privite ca existînd separat constituie obiectul metafizicianului.

III, 7 (p. 431 b 13—16) :

Așa-numitele abstracții ale matematicii sînt gîndite așa cum este gîndită însușirea de a fi cîrn, care n-ar putea fi concepută separat de carne, însă a fi curb, dacă ne gîndim numai la faptul în sine, îl concepem fără carnea la care se găsește calitatea de curb. Așa concepem și obiectele matematice, care de fapt nu sînt separate, dar în gîndire sînt separate.

Etica nicomahică, VI, 9 (p. 1142 a 11—20) :

O dovadă pentru ceea ce am spus este faptul că chiar în tinerețe poți fi geometru, matematician și, în genere, versat în astfel de lucruri, dar nu înțelept. Cauza este că înțelepciunea practică se aplică la ceea ce este particular, și aceasta se capătă numai prin experiență. Un om tînăr nu poate însă avea această experiență, căci ea apare numai după o lungă perioadă de timp.

Negreșit, ne-am putea întreba de ce un copil poate deveni chiar matematician, dar nu filozof sau fizician. Desigur, pentru că una ia naștere prin abstracție, pe cînd principiile filozofiei naturii provin din experiență. Și aici tinerii nu pot avea convingeri, ci pot numai să vorbească despre ele ; în matematică însă, din contră, esența nu este necunoscută.

În fragmentul următor Aristotel ridică problema „științei matematice generale", corelată cu problema unei ontologii generale.

Metafizica, K 4 (1061 b 17—33) :

Pentru că matematicianul folosește, de asemenea, principiile generale numai în forma de aplicație convenabilă lui, metafizica trebuie să fie de folos și la cercetarea fundamentelor acestora. Propoziția că mărimile egale scăzute din mărimi egale dau resturi egale este o lege fundamentală comună pentru toate mărimile; matematica își ia de aici în considerațiile ei un caz particular, potrivit pentru materia ei, aplicîndu-l la linii sau unghiuri sau numere sau alte mărimi nu întrucît acestea „sînt", ci întrucît ele sînt un continuu cu una, două sau trei dimensiuni. Filozofia, din contră, nu se preocupă de cazuri particulare, după care fiecăruia din aceste obiecte i se atribuie ceva, ci ea studiază felul în care fiecare din aceste obiecte „există". Același joc, ca la matematică, se repetă cu fizica, care studiază fundamentele și proprietățile derivate ale existentului, întrucît este mișcat, nu întrucît „există". Prima filozofie tratează însă, după părerea noastră, numai despre ceea ce este dat, întrucît „există", dar nu întrucît el este altceva. De aceea, atît fizica cît și matematica pot fi considerate cel mult ca domenii parțiale ale înțelepciunii.

Mai departe, se arată relația dintre filozofie și matematică. Din acest punct de vedere matematica apare ca „parte a științei", în timp ce filozofia cuprinde totalitatea științei.

Metafizica, E 1 (1026 a, 7—32):

Dar și matematica este o știință teoretică. Chestiunea dacă ea tratează despre lucrurile nemișcate și separabile rămîne pentru moment nelămurită; este sigur însă că unele din domeniile ei consideră lucrurile ca nemișcate și separabile. Dacă există însă ceva etern, nemișcat, separabil, atunci aceasta intră sigur în domeniul unei științe teoretice, dar în nici un caz în domeniul fizicii[1] — pentru că aceasta tratează despre anumite obiecte în mișcare — și nici în domeniul matematicii, ci în acela al unei științe anterioare lor.

Fizica tratează despre lucruri neseparabile, dar nu nemișcate; matematica, cel puțin în unele domenii, despre obiecte nemișcate, dar poate nu separabile, ca existînd într-o anumită materie; pe cînd știința primă are ca obiect lucruri care sînt și separabile, și nemișcate.

Negreșit, toate cauzele trebuie să fie eterne, mai ales acestea, pentru că ele sînt cauza acelor lucruri pe care noi putem să le vedem provenind de la divinitate, așa încît există trei științe teoretice: matematica, fizica și teologia...

---

[1] *Id est*: științelor naturii. — *C. V.*

S-ar mai putea pune întrebarea dacă cea mai înaltă știință nu este și generală și dacă nu cumva și ea tratează despre un anumit gen și o anumită esență. Dar nici în matematică nu este peste tot la fel, geometria și astronomia studiind fiecare mai degrabă cîte un domeniu special, dar matematica generală este fundamentul comun al tuturor. Dacă n-ar exista nici o altă substanță decît aceea pe care o întîlnim în natură, atunci fizica ar fi cea mai înaltă știință. Dacă există însă o substanță nemișcată, atunci aceasta are prioritate, și există o știință primă despre ea, și *aceasta este generală tocmai pentru că este cea mai înaltă.* Și ei îi revine să trateze despre existent ca atare, despre natura sa și despre ceea ce decurge din faptul că „există" (cf. Met., M 3, pp. 1 077 b 12—1 078 b 6).

4. Filozofia neoplatonică a matematicii în Comentariul lui Proclos asupra lui Euclid

În partea I a prologului la *Comentariul asupra lui Euclid*, **Proclos** a dat o privire de ansamblu în stil mare asupra filozofiei matematicii, în care sînt prelucrate ideile esențiale cel puțin ale tradiției academice și peripatetice și apoi dezvoltate și finisate într-un tablou de ansamblu neoplatoniciano-pitagoreic.

Cu aceasta, seria de documente antice asupra fundamentelor matematicii își găsește un final potrivit.

Existența matematică nu aparține, din punct de vedere al necesității, nici celor mai înalte genuri de existență, nici celor mai joase genuri care sînt supuse împărțirii, în opoziție cu existența simplă. Dimpotrivă, existența matematică ocupă locul de mijloc între entitățile nedivizate, simple, necompuse și neseparabile, pe de o parte, și entitățile divizate, caracterizate prin compoziții variate și multiple separări. Caracterul de invariabilitate, permanență și irefutabilitate a propozițiilor care se ocupă de ea dovedește superioritatea sa față de genurile de existență materială; dar discursivitatea metodelor sale de cunoaștere, utilizarea obiectelor extensive de cercetare și trecerea progresivă de la supoziții din ce în ce mai noi la consecințe tot mereu mai noi, toate acestea îi asigură ei un rol mai mic decît i se acordă lumii existențiale nedivizate și perfect fundamentate în sine însăși. De aceea, eu cred că și Platon a distribuit speciile de cunoaștere a existentului la entități superioare, intermediare și inferioare. El atribuia specia intelectuală lumii nedivizatului; specia intelectuală de cunoaștere distinge dintr-o privire în chip simplu inteligibilul și depășește celelalte moduri de cunoaștere prin caracterul său imaterial și pur, ca și prin faptul că își însușește prin intuiție obiectele existenței. Lumii divizatului, care are cel mai coborît grad de existență și aparține în întregime domeniului simțurilor, el îi atribuie opinia*, care prinde numai o rază slabă a adevărului. În sfîrșit, lumii de mijloc, deci genurilor existenței matematice, care nu posedă esență nedivizibilă și sînt superioare lumii divizibile, Platon îi atribuia gîndirea mediantă (discursivă)**... După cum genurile de cunoaștere se deosebesc între ele, tot astfel se deosebesc prin natura lor și obiectele cunoașterii, și anume lumea inteligibilă depășește pe toate celelalte prin imuabilitatea substanțelor sale; lumea simțurilor rămîne însă, în toate, în urma existenței celei mai înalte. Obiectele matematice, fiind pînă la urmă și în genere obiectele gîndirii mediante, își susțin situația lor intermediară. Față de cele ce sînt inteligibile, datorită separării lor unele de altele, sînt superioare din punct de vedere numeric; față de lumea simțurilor, ele au avantajul imaterialității. Față de primele, sînt inferioare din punctul de vedere al simplității, față de celelalte, sînt superioare prin exactitatea lor și prin faptul că oferă imagini mai clare ale existentului inteligibil decît lucrurile sensibile. Totuși, ele sînt numai imagini și reproduc într-un mod divizat nedivizatul și în forme variate imaginile originare în formă unică ale existentului. Pentru a conchide, spunem că obiectele matematice sînt expuse în anticamera formelor existențiale cele mai înalte și dezvăluie existența unitară, nedivizată și creatoare a acelor forme; ele n-au trecut însă dincolo de separația și compoziția conceptelor și nici deasupra realității care aparține simplelor imagini, nu au depășit încă procesele de gîndire variate și prolixe ale sufletului și n-au găsit încă acea încadrare nemijlocită în cunoștințele simple și independente față de tot ce este material.

... Pentru că acum studiem principiile întregului domeniu al existenței matematice, ne ridicăm direct la principiile care guvernează tot domeniul existenței și creează din sine toate lucrurile, adică finitul și infinitul (πὸ πέρας καὶ τὸ ἄπειρον). Căci din aceste prime două principii, care vin după cauza activă de necercetat și de necuprins de nimeni a Unului, sînt constituite toate celelalte, precum și existența matematică, aceste principii creînd totul împreună și separat. Însă ceea ce se naște a apărut în măsura corespunzătoare și în ordinea cuvenită și a căpătat existență concretă fie în primul loc, fie în al doilea, fie în ultimul. Căci genurile de existență inteligibilă participă prin simplitatea lor mai întîi de toate la finit și la infinit: datorită unității și identității lor, capacității lor de permanentizare și durabilitate, ele sînt impregnate cu finit; datorită distribuirii pe o mulțime întinsă, datorită puterii generative, alterității divine și procesului de generare, ele sînt subordonate și acțiunii infinitului. Existența matematică provine și din finit și din infinit, dar nu numai din primele cauze active, inteligibile și ascunse, ci și din acelea care purced de la acestea în al doilea rînd și sînt capabile ca împreună să genereze diferite ordine existențiale intermediare și variata lor diversitate. Din această cauză, chiar și în domeniul lor esențele se revarsă în infinit, dar sînt dominate de cauza limitativă. Căci numărul, începînd cu unitatea, are posibilitatea să crească fără încetare, dar numărul ales este totdeauna finit; și tot așa divizarea mărimilor spațiale merge la infinit; dar mărimile divizate sînt toate finite, și în realitate părțile fiecărui întreg sînt finite. Dacă n-ar exista infinitul, atunci toate mărimile ar fi comensurabile și n-ar exista nici o valoare neexprimabilă și irațională; conceptele care condiționează o distincție în geometrie și aritmetică, precum și numerele n-ar putea să arate capacitatea creatoare a unității și n-ar închide în sine toate rapoartele existentului, precum raportul multiplului sau al fracțiilor. Căci fiecare număr își schimbă raportul său, dacă este comparat cu unitatea și cu numărul care îl precede. Dacă s-ar desființa finitul, atunci n-ar mai rămîne în matematică nimic din comensurabilitate, din elementul comun al rapoartelor, din imuabilitatea (identitatea) formelor existențiale, din egalitate și din tot ce ține de o mai bună ordine; și nici n-ar exista vreo știință despre aceste lucruri, nici concepte exacte și invariabile. Așadar, matematica, ca și celelalte genuri de existență, nu se poate dispensa de cele două principii. În sfîrșit, cît despre genurile materiale, inferioare, care sînt întru totul opera naturii creatoare, este evident că ele participă la ambele principii, la infinit, prin substratul formelor lor existențiale, la finit însă, prin esența, figura și forma lor.

---

* δόζα — *N. T.*

** δίανοια, redat în l. germană prin *vermittelndes Denken* și în l. franceză prin *entendement ou connaissance raisonnée*. Cf. Ver Eecke, *op. cit.*, p. 2. — *N. T.*

Este așadar evident că matematica este subordonată acelorași principii, ca orice altă existență. Așa cum am studiat principiile ei generale care se extind asupra tuturor genurilor ei, tot astfel vrem acum să trecem în revistă și teoremele ei generale și simple provenite dintr-o stiință care concepe toate cunoștințele matematice într-un tot și vrem să cercetăm cum se aplică aceste teoreme la toate cunoștințele și cum pot fi considerate ele în mărimi numerice, geometrice și în mișcări. Astfel sînt teoremele privind teoria proporțiilor, transformările lor prin adunare și scădere, cu răsturnarea rapoartelor, permutarea termenilor, apoi teoria tuturor rapoartelor, ca multiplul, fracțiile, în cazul că numărătorii sau numitorii diferă prin 1 sau prin mai mult decît 1, teoria despre inversele lor și, în sfîrșit, teoremele privind teoria egalităților și inegalităților în partea lor generală și comună, nu atît în ce privește figurile sau numerele, sau mișcările, cît în ce privește faptul că fiecare din ele posedă în sine ceva comun și dă despre sine o cunoștință încă primitivă...

Nu trebuie să credem însă că aceste adevăruri comune există mai întîi în multele și distinctele forme existențiale, nici că ele își trag sorgintea ulterior din pluralitate, ci trebuie să le considerăm că ele există înaintea acestora, deosebindu-se prin simplitate și precizie. De aceea, și cunoașterea lor precede multe alte cunoștințe, le oferă acestora principii, și multe cunoștințe se constituie în jurul acestei cunoașteri și se raportează la ea. De pildă, geometrul afirmă că dacă patru mărimi în spațiu sînt proporționale între ele, acest raport este valabil și în cazul substituirii lor reciproce și face demonstrația întemeindu-se pe principii proprii, de care aritmeticianul nu s-ar servi niciodată; și, la rîndul său, aritmeticianul afirmă că dacă patru numere sînt proporționale, aceasta este valabil și în cazul substituirii lor reciproce, și demonstrează și acest lucru tot cu principiile propriei sale științe. Cine ar cunoaște acum în chip spontan permutarea, fie la mărimi geometrice, fie la numere, și diviziunea suprafețelor sau numerelor compuse, și de asemenea compunerea lucrurilor separate? Totuși, nu există o cunoaștere științifică despre lucrurile divizate și în același timp nu posedăm o știință despre existența imaterială, care este corelată mai strîns cu contemplația intelectuală. Nu, mai degrabă cunoștința acelei existențe este o știință, și de la această știință își primesc celelalte fundamentarea lor generală. Ridicarea cunoştinţelor de la cele particulare la cele mai generale se desăvîrşeşte pînă cînd ajungem nemijlocit la ştiinţa existentului ca existent. Căci această ştiinţă nu vrea să cerceteze legile esenţiale, valabile pentru toate numerele, și nici ceea ce este comun tuturor cantităților, ci contemplă esența unică și existența a tot ce ființează: și de aceea ea este cea mai cuprinzătoare dintre ştiinţe şi toate primesc de la ea principiile lor. Căci disciplinele superioare oferă totdeauna disciplinelor subordonate cele mai înalte ipoteze pentru demonstraţii, ştiinţa cea mai perfectă însă oferă de la sine tuturor principii, universale pentru unele, mai particulare pentru altele...

După aceea, avem de cercetat de ce fel este existența pe care trebuie să o recunoaștem speciilor și genurilor matematice; de asemenea, avem de cercetat dacă trebuie să recunoaștem că ființarea sa provine de la lucrurile sensibile, fie prin abstracţie, cum se spune de obicei, fie prin însumarea trăsăturilor particulare într-o idee generală, sau dacă trebuie să-i recunoaștem ființarea înainte de acestea, așa cum pretinde Platon și cum dovedeşte emanaţia Totului. Dacă afirmăm că formele existenţiale matematice își derivă ființa lor din lumea sensibilă, prin faptul că sufletul își plăsmuiește *a posteriori* în sine ideea de cerc sau de triunghi din triunghiuri sau cercuri materiale, atunci se pune întîi întrebarea de unde au propozițiile (matematice) caracterul lor exact și incontestabil. Fără îndoială că aceste forme provin sau din lumea sensibilă sau din suflet. Dar proveniența din lumea sensibilă este imposibil de admis, căci atunci lumea sensibilă ar trebui să posede mult mai multă exactitate. Așadar, rămîne sufletul care conferă desăvîrșire imperfecțiunii și exactitate impreciziei. Căci unde ar putea exista în domeniul simțurilor nedivizatul, lucrul lipsit de suprafață și volum, unde s-ar putea afla atunci egalitatea razelor (cercului), rapoartele totdeauna constante ale laturilor, unde s-ar găsi unghiurile drepte? Nu vedem oare că toate lucrurile sensibile sînt amestecate unele cu altele, așa încît la ele nu există nici puritate şi nici absența opusului, ci totul este divizat, dimensionat și în mişcare? Cum am putea deci să deducem existența permanentă a ideilor nemișcate din ceea ce este totdeauna în mișcare şi se comportă cînd într-un fel, cînd în altul? Căci faptul că tot ce există în chip concret din mişcare are şi un mod schimbător de existenţă nu este contestat de reprezentanţii acestei opinii.

Cum am putea transpune caracterul celei mai înalte perfecţiuni de la ceea ce este imperfect la formele perfecte şi absolute de existenţă? Căci tot ce este cauză a cunoştinţei invariabile este cu atît mai mult de aceeaşi natură. Aşadar, sufletul trebuie admis ca creator al conceptelor şi formelor existenţiale matematice. Dacă însă sufletul concepe în sine imaginile iniţiale — conform esenţei sale —, conferindu-le existenţă concretă, şi dacă produsele sînt emanaţii ale formelor existenţiale care se găsesc deja în suflet, atunci printr-o astfel de atitudine noi ne aflăm de partea lui Platon şi am fi putut găsi adevărata existenţă a ştiinţei matematice. Dacă însă sufletul, fără a poseda şi a-şi însuşi mai dinainte concepte, nu produce decît o ţesătură imaterială şi extrem de subtilă şi creează o ştiinţă aşa de însemnată*, cum mai poate el apoi să cunoască dacă lucrurile create sînt din nou capabile să creeze sau sînt ca un ou sterp şi umbre goale în loc de realitate; după ce norme măsoară el adevărul care zace în ele? Şi, mai departe, dacă sufletul nu are existenţa acestora în sine, cum poate atunci crea o multiplicitate aşa de complexă de concepte? În acest mod** vom atribui existenţa lor întîmplării, fără a le raporta la o origine oarecare. Aşadar, dacă formele existenţiale matematice îşi au provenienţa în suflet şi acesta nu posedă ideile creaţiilor lui din lucrurile sensibile, atunci el le lasă şi pe acestea să ia naştere din idei, şi durerile zămislirii sale creatoare sînt emanaţii ale formelor existenţiale durabile şi eterne.

În al doilea rînd, pentru cazul cînd culegem conceptele matematice de jos, din domeniul lumii sensibile, se pune problema dacă noi nu sîntem nevoiţi să declarăm mai bune demonstraţiile care se întemeiază pe lucruri sensibile decît pe cele care se întemeiază pe formele existenţiale, care sînt de fiecare dată mai simple şi mai cuprinzătoare? Căci noi susţinem că în urmărirea adevărului principiile, în orice caz, trebuie să corespundă procedeului de demonstraţie. Acum, dacă particularul este principiu al universalului şi dacă lucrurile sensibile sînt principiul obiectelor gîndirii mediante, cum este atunci posibil să deducem consecinţa demonstraţiei mai mult din general decît din particular şi să declarăm ca fiind mai corespunzătoare pentru demonstraţie existența obiectelor intelectuale intermediare înaintea aceleia a lucrurilor sensibile? Căci chiar dacă cineva ar demonstra propoziția că suma unghiurilor triunghiului isoscel este egală cu două unghiuri drepte, ca și la triunghiul echilateral, totuși el n-ar ști încă ceva adevărat referitor la triunghiul neechilateral, ci numai acela care dă demonstrația pentru un triunghi oarecare posedă cunoștința naturii sale și, de asemenea, știe că pentru o demonstrație propozițiile generale se potrivesc mai bine decît cele particulare și că, prin urmare, demonstrațiile se întemeiază mai mult pe propoziții generale. Fundamentele demonstrațiilor pretind însă prioritatea și superioritatea esențială față de propozițiile particulare și sînt principiile rezultatelor demonstrațiilor. Științele demonstrative sînt deci departe de a specula asupra naturii secundare și mai obscure a lumii sensibile și de a nu contempla mai degrabă obiectele gîndirii mediante, care sînt mai perfecte decît cunoștințele dobîndite prin percepția simțurilor și prin credință.

---

* Aceasta este opinia lui Aristotel, pe care Proklos o combate. Cf. Ver Eecke, *op. cit.* p. 9. — *N. T.*

** Adică în ipoteza aristotelică. *Ibidem.* — *N. T.*

În sfîrșit, în al treilea rînd, spunem că printr-o astfel de afirmație[1] spiritul este prețuit mai puțin decît materia. Căci dacă materia primește de la natură esențialul, căruia i se potrivește de preferință caracterul de existență și de determinare, iar spiritul își întipărește în sine, conform acelui (esențial), reproducerile secundare și copiile ulterioare, care după natura lor sînt mai puțin valoroase, abstrăgînd din materie ceea ce este, după natura sa, inseparabil de materie, oare prin aceasta nu se face atunci spiritul mai slab și mai imperfect decît materia? Căci atunci materia este sediul ideilor materializate, așa cum spiritul este sediul conceptelor; dar ea este sediul ideilor originare, pe cînd el este al conceptelor derivate; ea este sediul existentului primordial, el este al existentului care conține de acolo existența; ea este sediul existenței esențiale, el al existenței gîndite. Dar atunci cum este spiritul, care participă în primul rînd la rațiune (*nous*) și la existența intelectuală, și a cărui cunoștință este alimentată din acest izvor și din întregul domeniu al vieții, cum este el receptacul al formelor esențiale, care sînt mai slabe decît cel ce ocupă ultimul loc în domeniul existenței și care este cel mai imperfect dintre toate în raport cu existența? Totuși, se pare superfluu să luăm poziție împotriva acestei iluzii, care a fost deja cercetată de mulți și adeseori critic. Dacă însă conceptele matematice nu trebuie înțelese ca abstracții ale lucrurilor materiale, nici ca niște concepte colective a ceea ce este comun în lucrurile individuale și dacă ele nu sînt în genere de gen secundar, nici nu provin din lucruri sensibile, atunci trebuie neapărat ca sufletul să le primească fie de la sine, fie de la *nous* (spirit), sau atît de la sine, cît și de la *nous*. Dacă le primește numai de la sine, atunci cum pot fi simple copii ale formelor intelectuale de existență?... Rămîne deci numai ipoteza că sufletul primește aceste concepte de la sine și de la *nous* și că el este totalitatea formelor existențiale care primesc esența lor de la modele intelectuale, dar realizează accesul lor în existență după un impuls propriu...

---

[1] Adică susținînd ipotezele aristotelice combătute în alineatul precedent. Cf. Ver Eecke, *op. cit.*, p. 11. — *N. T.*

Utilitatea științei matematice generale pentru filozofie nemijlocit și pentru celelalte arte și științe ar putea deveni astfel evidentă pentru cercetători. Însă unele spirite contradictorii îndrăznesc să facă praf reputația acestei științe, unii care, contestîndu-i aureola frumosului și binelui, afirmă că expunerile ei nu sînt valabile pentru acest scop; alții însă declară că științele experimentale orientate spre lumea sensibilă ar fi mai folositoare decît teoremele ei generale. Astfel, de pildă, măsurarea pămîntului (geodezia) ar fi mai utilă decît geometria, aritmetica vulgară mai folositoare decît aceea bazată pe teoreme (abstracte) și astrologia nautică mai utilă decît astronomia generală...

Vom veni în întîmpinarea unor astfel de afirmații cu argumentul frumuseții matematicii, pornind de la puncte de vedere de la care pleacă și *Aristotel* în eforturile sale de a cîștiga pentru ea simpatia noastră. Următoarele trei calități dau naștere de preferință frumuseții, atît la corp cît și la suflet: ordinea, simetria (proporționalitatea), determinarea clară. Căci urîțenia corporală derivă din lipsa, condiționată material, de ordine, formă, simetrie și determinare, lipsă care se manifestă în tot ceea ce este compus; urîțenia sufletească se bazează însă pe lipsa de rațiune, care în mișcările sale nu cunoaște nici regulă, nici ordine, nu se supune cerințelor rațiunii și de aceea nu vrea să accepte o delimitare precisă. Tot astfel, ar putea și frumusețea să-și bazeze existența ei pe calitățile opuse, adică tocmai pe ordine, simetrie și determinare. Pe acestea le observăm însă mai întîi în știința matematică: ordinea se constată în geneza secundarului și multiplului din ceea ce este primordial și simplu; căci totdeauna următorul depinde de antecedent și unul are valoarea de principiu, celălalt are valoarea de consecințe din cele mai înalte supoziții ; simetria se observă în concordanța reciprocă a demonstrațiilor și în raportarea tuturor la *nous*, căci măsura generală a întregii științe este *nous*, de la care ea primește și principiile și spre care ea dirijează pe cei care studiază ; în fine, determinarea se observă în ideile invariabile și durabile, căci cunoștințele sale nu sînt în continuă schimbare, cum se întîmplă cu simplele opinii şi cu percepţiile simţurilor, ci ea expune totdeauna aceleași propoziții și este determinată prin forme de existenţă intelectuală. Dacă, aşadar, frumuseţea se sprijină în special pe aceste puncte, iar matematica își capătă profilul său tocmai prin aceasta, atunci este evident că și matematicii i se poate atribui frumosul . . .

CAPITOLUL III

FUNDAMENTAREA MATEMATICII OCCIDENTALE MODERNE ÎN SECOLUL AL XVII-LEA

DESCOPERIREA ANALIZEI INFINITULUI

Dacă am căuta o caracteristică generală prin care se poate distinge matematica occidentală modernă de cea antică şi de cea arabă intermediară, aceasta ar putea fi calculul infinitezimal, care în cursul secolului al XVII-lea exprimă în modul cel mai evident ruptura metodică cu tradiţia antică[1] şi devine totodată cel mai puternic instrument al noii ştiinţe a naturii, menţinîndu-se astfel pînă la sfîrşitul secolului al XIX-lea, pentru ca, probabil, în secolul al XX-lea să cedeze — cine poate şti dinainte? — în faţa unei matematici complet abstracte a „structurii matematice" oarecum nude.

„Calculul", cum este numit pe scurt în secolul al XVII-lea, presupune mai multe lucruri. Mai întîi presupune formula matematică, pe care antichitatea şi evul mediu nici n-o cunoscuseră, chiar dacă anumite scheme de calcul se străduiau s-o înlocuiască oarecum. Apariţia calculului literal[2], care începe cu ezitări încă din evul mediu, se datorează lui *Viète*[3], dar se desăvîrşeşte propriu-zis de-abia în cursul secolului al XVII-lea. Acum propoziții matematice întregi pot fi exprimate simbolic, fără ajutorul limbajului cuvintelor.

---

[1] Matematica secolului al XVII-lea preia creator elementele calculului diferenţial şi integral precum şi ale geometriei analitice, care subzistau în matematica teoretică antică, datorită lucrărilor lui Arhimede, Apoloniu, Pappus şi Diofant. Este, incontestabil, meritul lui Descartes de a fi intuit valoarea metodei analitice şi de a o fi aplicat în geometrie, lui Newton şi Leibniz revenindu-le paternitatea calculului infinitezimal. — *C. V.*

[2] De fapt, notaţia prin litere a fost introdusă încă din antichitate de Aristotel şi utilizată apoi de Euclid pentru desemnarea numerelor-segmente cu litere majuscule, iar Diofant (secolul al III-lea e.n.) a introdus-o ca sistem pentru rezolvarea ecuaţiilor. Cf. şi Kolman, *Istoria matematicii în antichitate*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1963, pp. 213 şi sqv. De asemenea, şi Descartes, *Regule*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1964, reg. IV, p. 20. — *C. V.*

[3] François Viète nota mărimile cunoscute cu ajutorul consoanelor A, B, C, D etc., iar pe cele necunoscute cu ajutorul vocalelor A, E, I etc. O ecuaţie de tipul $3BA^2 - DA + A^3 = Z$ era scrisă de Viète în sistemul său de notaţie: B^3 in A quadratum minus D plano in A plus A cubo aequatur Z solido Cf. şi Descartes, *Regule*, note, p. 105; idem, *Oeuvres*, ed. A.T., vol. X, p. 50 şi sqv. — *C. V.*

În al doilea rînd, el presupune geometria analitică, care se datorează în esență lui *Descartes*, după lucrările preliminare ale lui *Fermat*.

În al treilea rînd, teoria funcțiilor, a ,,diferențierii" și ,,integrării" lor, probleme fundamentale ale noii analize care apar sub forme intuitive diferite (viteză, panta unei curbe, unghiul de înclinare a tangentei sale, determinarea suprafeței, volumului și a centrului de greutate etc.) a căror natură comună este recunoscută de-abia mai tîrziu (ca, de pildă, identitatea ,,problemei inverse a tangentei" și a cvadraturii, stabilită de Barrow).

Succesiunea menționată de probleme care conduc spre ,,calcul" pare să aibă stringență logică. Dar evoluția istorică a decurs totuși altfel.

A. Etapele premergătoare calculului infinitezimal

Unele idei fundamentale ale teoriei funcțiilor, îndeosebi reprezentarea grafică a funcțiilor, pînă la un anumit grad, au fost elaborate încă de la sfîrșitul evului mediu, negreșit fără formule și, în consecință, fără geometrie analitică. Aceasta s-a datorat mai ales lui *Nicole Oresme*, episcop de Lisieux (în jurul anului 1380), din ale cărui scrieri dăm cîteva fragmente caracteristice.

Nicolaus Oresmus, *Quaestiones disputatae de Euclidis elementis.*

Din capitolul I:

Fiecare intensitate (*intensio*), la care se ajunge succesiv, este reprezentată printr-un segment de dreaptă, ridicat perpendicular într-un punct oarecare al spațiului sau al suportului (*subjecti*) lucrului susceptibil de intensificare (de pildă, al unei calități). Căci raportul găsit între intensități de același fel se întîlnește, de asemenea, între segmente și reciproc.

... Astfel, intensități egale sînt reprezentate prin segmente egale, o intensitate dublă printr-un segment dublu și la fel, progresînd proporțional ...

Din capitolul IV:

Cantitatea unei calități oarecare se reprezintă printr-o suprafață, a cărei lungime este o linie dusă în obiectul calificat luat ca bază ... şi a cărei lăţime sau înălţime este indicată printr-o linie ridicată perpendicular pe lungime ... Este evident că trebuie să reprezentăm calitatea astfel încît distribuţia (*dispositio*) ei să fie mai uşor de recunoscut; pentru că uniformitatea şi neuniformitatea ei pot fi recunoscute şi apreciate mai repede, mai uşor şi mai clar dacă ele sînt reprezentate în mod asemănător într-o figură şi sînt descrise într-un exemplu vizibil.

Din *Questio* VIII:

Mai întîi, trebuie să se ştie că înălţimea unei suprafeţe este privită ca fiind corespunzătoare unei linii perpendiculare ridicată pe bază ... În al doilea rînd, este de observat că o suprafaţă este numită uniform (*uniformiter*) şi egal de înaltă, dacă toate liniile prin care se măsoară înălţimea sînt egale. Ea se numeşte neuniform (*difformiter*) înaltă, dacă liniile nu sînt egale şi ajung la o linie care nu este în mod egal distanţată de bază. În al treilea rînd, este de observat că înălţimea se numeşte neuniformă în mod uniform (*uniformiter difformis*), dacă trei sau mai multe linii arbitrare, care sînt între ele egal distanţate, se depăşesc reciproc în proporţie aritmetică, astfel că prima întrece pe a doua cu cît a treia, care urmează imediat, întrece pe a doua. De aici rezultă că linia cea mai înaltă (curba vîrfurilor) ... este o dreaptă situată la distanţe neegale de bază. În al patrulea rînd este de observat că înălţimea se numeşte neuniformă în mod neuniform (*difformiter difformis*), dacă liniile nu se depăşesc unele pe altele în acest fel şi curba vîrfurilor nu este o dreaptă. Şi după cum variază această curbă a vîrfurilor variază şi neuniformitatea în înălţime.

A patra consecinţă este că trebuie să reprezentăm calitatea uniformă liniară oarecum printr-o suprafaţă dreptunghiulară de înălţime uniformă, aşa încît întinderea (*extensio*) este reprezentată prin bază, intensitatea (*intensio*) printr-o linie egal distanţată. Calitatea uniform neuniformă trebuie însă reprezentată printr-o suprafaţă cu înălţime uniform neuniformă, astfel încît linia vîrfurilor nu este egal distanţată de bază.

Penultima consecinţă, care poate fi demonstrată din ceea ce premerge este că o calitate uniform neuniformă este egală cu gradul de mijloc. Adică: ea este pe atît de mare pe cît ar trebui să fie dacă ea ar fi uniformă cu gradul de mijloc.

Ultima consecinţă este că o calitate neuniformă în mod neuniform trebuie să fie reprezentată printr-o suprafaţă a cărei... margine superioară este o linie oblică situată la distanțe neegale. Astfel poate fi reprezentată o neuniformitate într-un mod oarecum infinit, prin faptul că acea linie a vîrfurilor poate varia în modul cel mai felurit.

Urmează acum mai întîi un exemplu de însumare sau integrare a unei calități și a unei iuțeli (care este concepută de Oresme în totul analogă unei calități).

N. Oresmus, *Tractat. De configuratione intensionum*, partea a treia, cap. VIII

Fie ca prima parte proporțională (a obiectului) la o împărțire în raportul 2 : 1 să fie corespunzătoare liniei *ab*, care să fie pînă la capăt într-un anumit grad albă (sau caldă). Și fie ca a doua parte (proporțională) să fie de două ori mai albă, a treia de trei ori, a patra de patru ori și tot așa pînă la infinit, peste tot conform șirului de numere. Atunci rezultă din tot ce precede că *albul total* (*albedo totalis*) al liniei *ab* însumează împătritul primei părți a albului . . .

În același mod, dacă un mobil s-ar mișca cu o viteză oarecare în prima parte proporțională dintr-o oră (h) . . . și de două

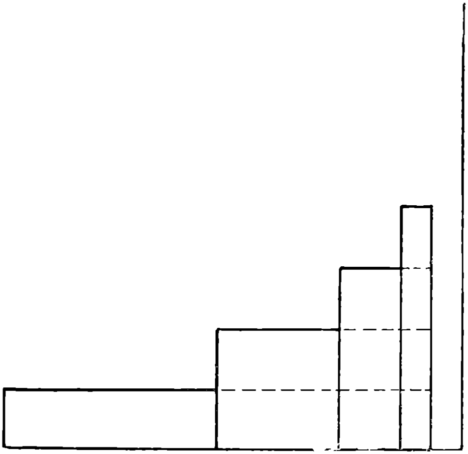


Fig. 36

ori mai repede în a doua parte proporțională și de trei ori în a treia parte și de patru ori în a patra ș.a.m.d., crescînd pînă la infinit, *viteza totală* ar însuma o viteză de patru ori mai mare decît aceea din prima parte. Astfel încît acel mobil ar parcurge într-o oră întreagă exact de patru ori mai mult (adică împătritul drumului) pe care l-a străbătut în prima jumătate de oră.

Figura respectivă (36) trebuie imaginată astfel:

Rezultă de aici că Oresme însumează o serie infinită convergentă de dreptunghiuri:

$$\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}2h + \frac{1}{8}3h + \frac{1}{16}4h + \ldots = 4 \cdot \frac{1}{2}h = 2h$$

Să citām acum considerațiile amănunțite ale lui Oresme, (*De configuratione intensionum*, partea a treia cap. VII) care corespund celei de-a patra consecințe din *Quaestio* VIII și totodată anticipează o celebră demonstrație a lui Galilei.

Fiecare calitate uniform neuniformă are aceeași cantitate (adică aceeași integrală), ca și cum ea s-ar atribui aceluiași obiect uniform cu gradul punctului mijlociu.

Vrem să demonstrăm această propoziție pentru o calitate extinsă de-a lungul unei linii (cf. fig. 37).

Demonstrație: Fie dată o calitate care poate fi reprezentată prin triunghiul *ABC*. Este o calitate uniform neuniformă, care în punctul *B* se termină cu zero. Fie punctul *D* mijlocul liniei care reprezintă obiectul; gradul de intensitate dominant în acest punct este reprezentat de linia *DE*.

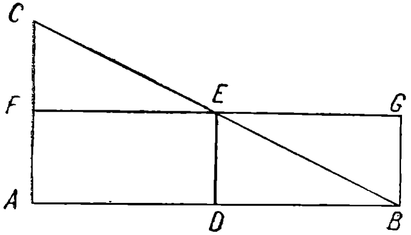


Fig. 37

Calitatea care are pretutindeni gradul astfel desemnat poate fi reprezentată prin patrulaterul *AFGB*...

Dar după Euclid, *Elem.*, I, 26, cele două triunghiuri *EFG* și *EGB* sînt egale. Triunghiul *ABC*, care reprezintă calitatea uniform neuniformă, și patrulaterul *AFGB*, care reprezintă calitatea uniformă, conform gradului punctului mijlociu, sînt de asemenea egale. Cele două calități, dintre care una poate fi reprezentată prin triunghi, alta prin patrulater, sînt așadar de asemenea (cantitativ) egale între ele. Ceea ce era de demonstrat...

Despre viteză se poate spune exact același lucru ca despre o calitate extinsă liniar; numai că în loc de „punct mijlociu" trebuie pus „momentul mijlociu de timp, în care se menține viteza".

Această demonstrație a lui *Oresme* trebuie comparată imediat cu reflecțiile corespunzătoare ale lui **Galilei** (pasajul următor din *Discorsi*, ziua a treia, teorema I, prop. I) (cf. fig. 38):

Timpul în care un drum drept oarecare este parcurs de către un corp pornind din starea de repaus printr-o mișcare uniform accelerată este egal cu timpul în care același drum este parcurs de același corp printr-o mișcare uniformă, a cărei viteză ar fi egală cu jumătatea sumei formată din valoarea maximă și valoarea ultimă a vitezelor din prima mișcare uniform accelerată.

AB să reprezinte timpul în care corpul parcurge distanța rectilinie *CD* din poziția de repaus *C* în mișcare uniform accelerată; se înseamnă cantitățile de viteză care în timpul *AB*

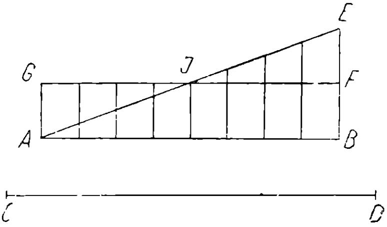


Fig. 38

cresc treptat în intervale mici de timp, apoi în fine *EB* (perpendicular pe *AB*): se duce *AE* precum și mai multe linii paralele echidistante față de *EB*; astfel, acestea vor reprezenta valorile crescătoare ale vitezelor. Să împărțim *EB* pe jumătate în *F*, să ducem paralelele *FG* la *BA* și *GA* la *FB*. Paralelogramul *AGFB* va fi egal cu triunghiul *AEB*, pentru că latura *GF* împarte pe jumătate linia *AE* în punctul *J* : căci dacă paralelele în triunghiul *AEB* sînt prelungite pînă la *GJF*, atunci suma tuturor paralelelor conținute în patrulater va fi egală cu acelea din triunghiul *AEB* ; căci ceea ce este situat în *JEF* este egal cu ceea ce este conținut în *GJA* ; trapezul *AJFB* este comun însă ambelor. Deoarece, mai departe, fiecărui interval de timp din *AB* îi corespunde o linie și toate punctele paralelogramului din care s-au dus paralele sînt imaginea *a tot atîtea* valori de viteză uniformă, atunci este clar că toate momentele vitezei în mișcarea accelerată sînt reprezentate prin liniile paralele crescătoare ale lui *AEB*, și în mișcarea uniformă sînt reprezentate prin acelea ale paralelogramului *BG*. Căci ceea ce lipsește momentelor mișcării în primul timp al mișcării (adică valorile lui *AGJ*) se înlocuiește prin paralelele din *JEF*. În consecință, două corpuri vor parcurge două distanțe rectilinii în unul și același timp, dacă unul se mișcă uniform accelerat, pornind din repaus, iar celălalt se mișcă cu viteză uniformă egală cu jumătate din valoarea maximă atinsă la mișcarea accelerată, q.e.d.

La *Oresme* și *Galilei* se găsesc, așa cum am arătat, integrări de același gen naiv cum întîlnim și în antichitate la *Democrit, Heron* și în scrierea despre metodă a lui *Arhimede*. Un alt exemplu foarte interesant ni-l oferă **Johannes Kepler** (1571—1630) în *Astronomia Nova* (1606), căreia i-au urmat numeroasele cubaturi ale corpurilor de rotație în *Stereometria Doliorum Vinariorum* (Stereometria butoaielor de vin) din 1615. Urmează exemplul astronomic (*Noua astronomie*, cap. 40) :

Pentru că timpii de care are nevoie planeta pentru a parcurge porțiuni egale din cercul excentric sînt unii față de alții în același raport ca distanțele acestor porțiuni, iar fiecare punct își schimbă distanța sa pe întregul semicerc, eu a trebuit să-mi dau nu puțină osteneală pentru a cerceta cum s-ar putea obține sumele acestor distanțe. Căci dacă nu avem suma tuturor — și sînt o infinitate —, nu se poate indica nici durata de timp care corespunde unei singure distanțe ; așadar, nu se cunoaște ecuația. Căci așa cum se comportă întreaga sumă a distanțelor față de toată durata parcurgerii, tot astfel se comportă și o parte oarecare a sumei distanțelor față de timpul respectiv.

De aceea, am început cu împărțirea cercului excentric în 360 de părți, ca și cum acestea ar fi cele mai mici părticele și admițînd că în domeniul unei părticele distanța nu variază.

Apoi am căutat distanțele la începutul fiecărei părți sau fiecărui grad și le-am însumat...

Deoarece însă acest calcul era mecanic și incomod și cu el nu se putea determina ecuația pentru un grad oarecare fără a recurge la celelalte, am început să caut alte mijloace. Deoarece mi-am dat seama că pe cercul excentric există infinit de multe puncte și, respectiv, infinit de multe distanțe, mi-a venit ideea că în aria cercului excentric sînt conținute toate aceste distanțe. Căci mi-am amintit că odinioară, în același fel, și Arhimede a descompus cercul în infinit de multe triunghiuri cînd căuta să determine raportul dintre circumferință și diametru. Acesta este sensul ascuns al demonstrației sale indirecte. Așadar, în loc să descompun, ca mai înainte, circumferința în 360 de părți, am descompus aria cercului excentric în acest număr de părți, ducînd raze din punctul de unde se socotește excentricitatea.

Fie *AB* linia apsidelor (fig. 39), *A* Soarele (sau, după Ptolemeu, Pămîntul), *B* centrul cercului excentric *CD*...

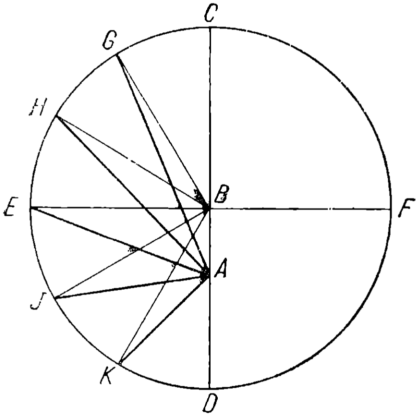


Fig. 39

După cum dreptele duse din *B* la părțile infinit de multe ale circumferinței *CDE* sînt conținute în aria semicercului *CDE*, iar dreptele duse din *B* la părțile infinit de multe ale arcului *CH* sînt conținute în aria *CBH*, tot așa se întîmplă cu dreptele care sînt duse din *A* la aceleași părți ale circumferinței sau arcului. Pentru că, în sfîrșit, atît dreptele care pleacă din

A cît și cele din *B* umplu același semicerc *CED*, dreptele duse din *A* fiind tocmai distanțele a căror sumă se caută, am crezut că din calculul ariei *CAH* sau *CAE* pot deduce suma distanțelor infinit de multe duse la *CH* sau *CE*, nu pentru că infinitul ar putea fi parcurs, ci deoarece eu credeam că această arie ar conține o măsură pentru totalitatea cantității pe care o dau distanțele la însumarea duratei de timp, așa încît am putea obține această măsură din cunoașterea ariei fără enumerarea celor mai mici părți.

Și totuși, în procedeul meu se află ascunsă o eroare de raționament, care nu este desigur de mare importanță. Originea sa este următoarea: Arhimede a descompus cercul în infinit de multe triunghiuri care fac unghi drept cu circumferința, vîrfurile lor fiind în centrul cercului *B*. Însă triunghiurile cu vîrful în *A*, care se sprijină pe circumferință, nu au aceeași poziție, căci circumferința este tăiată oblic de toate dreptele duse din *A*, cu excepția punctelor *C* și *D*.

Greșeala se poate explica în felul următor: să se ducă prin *B* o dreaptă oarecare (nu însă *CD*) care taie circumferința, să zicem *EF*, și să se unească punctele de intersecție *E* și *F* cu *A*. Acum, pentru că punctul *A* nu este situat pe segmentul *EF*, atunci *EAF* formează o figură, anume un triunghi. De aceea, *EA* și *AF* sînt împreună mai mari decît *EF*. Aria cercului conține însă suma tuturor segmentelor *EF*, așadar o sumă care este mai mică decît toate *EA* și *EF* împreună, pentru că totdeauna se formează un triunghi din punctul *A* și din două puncte opuse pe cercul excentric, cu excepția punctelor *C*, *D* și *A*, care în loc de triunghi generează o dreaptă.

Deoarece epoca noastră are geometri atît de distinși, care cîteodată asudă așa de mult din cauza unor lucruri de o valoare mai puțin recunoscută, eu îi invit pe toți să mă ajute să găsesc o arie care să fie egală cu totalitatea distanțelor. Din punct de vedere geometric (în sensul larg al cuvîntului), eu am rezolvat această problemă; însă ei trebuie să mă învețe cum se poate determina numeric ceea ce am dobîndit printr-o figură geometrică; mai mult, ei trebuie să-mi arate cum se calculează aria figurii găsite de mine. Să se desfășoare semicircumferința *CED* de-a lungul unei drepte și să se împartă aceasta prin punctele *G*, *H*, *E*, *J*, *K* în tot atîtea părți ca mai înainte. În punctele de diviziune să se ridice perpendiculare egale cu raza *CB* și să se închidă dreptunghiul (fig. 40). Acesta este de două ori mai mare decît triunghiul prin care Arhimede măsoară aria semicercului. Așadar, dacă în acest mod se formează dreptunghiuri din sectoare, atunci întregul dreptunghi constituit din acele dreptunghiuri va fi echivalent cu întregul cerc; avem în general raportul doi la unu.

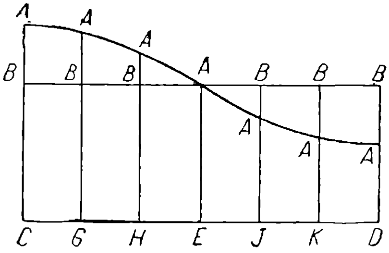


Fig. 40

În același mod să se stabilească distanțele CA, GA etc. și să se unească punctele A (care în ce privește posibilitatea sînt infinit de multe) prin „concoida" $AAAA$; figura $AACD$ va fi egală cu totalitatea distanțelor punctelor A. Căci în mod analog s-a format din segmentele AG și AH o figură, care este aproape un dreptunghi, însă „concoida" nu este paralelă cu CD, ci este înclinată față de razele GA, HA, EA tot așa cum sînt înclinate în cerc distanțele față de circumferință. De aceea, nu ne deranjează faptul că această „concoidă" AA este mai lungă decît semicercul CD.

B. Descoperirea geometriei analitice de către Descartes

Cel dintîi pilon al geometriei analitice a fost înălțat de *Pierre de Fermat* (1601—1665) cu tratatul său *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducere la locurile geometrice plane și solide) în 1636. Totuși, această mică lucrare conținea numai tratarea problemelor elementare, fără ca să se încerce în ea o prezentare sistematică care să ajungă la principii. **Descartes,** dimpotrivă, dă în *Geometria* sa din 1637 mult mai mult: împreună cu altele, ca de pildă *Dioptrica*, *Geometria* sa este ca un exemplu al noii sale metode ştiinţifice, care este explicată la începutul întregii cărţi în celebrul *Discours sur la Méthode*[1].

Deşi din cauza formei literare nu este un manual sistematic şi în unele privinţe este intenţionat obscură sau se rezumă la indicaţii vagi, pentru cititorul cu pregătire matematică lucrarea reprezintă cu toată claritatea, descoperirea decisivă a geometriei analitice şi de aceea a exercitat o enormă influenţă, deschizătoare de drumuri, în ciuda unor dificultăţi de înţelegere de care se plîng contemporanii.

În cele ce urmează se reproduc unele pasaje caracteristice din *Geometria*.

CARTEA I

Probleme pe care le putem construi întrebuinţînd numai cercuri şi drepte

Toate problemele de geometrie se pot reduce cu uşurinţă la astfel de termeni, încît să nu mai fie nevoie după aceea pentru construcţia lor decît de cunoaşterea lungimii unor linii drepte[2].

---

[1] Invenţia geometriei analitice, este anterioară publicării *Geometriei* din 1637 În tratatul intitulat *Olimpica*, Descartes nota: ,,X Novembris 1619, cum plenus forem Enthousiasmo et mirabilis scientiae fundamenta reperirem", consemnînd, printr-o adnotare marginală şi data descoperirii, pare-se, a unora din aplicaţiile ,,metodei": ,,XI Novembris 1620, coepi intelligere fundamentum inventi mirabilis". Aşadar ,,metoda" *fundamenta mirabilis scientiae* este descoperită la 10 noi. 1619, iar aplicaţia ei particulară, ,,inventum mirabile", în Geometrie — aşa cum opina matematicianul Lipstorpius [*Specimina Philosophiae Cartesii*, part. I, p. 8 — apud A. Baillet, *La vie de M. Descartes*, tom. I, Paris, 1691, p. 281] la distanţă de un an, la 11 noi. 1620. *Discursul* din 1637 referă expres aceeaşi epocă, a tinereţii [Cf. Descartes, *Discursul asupra metodei*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1957, pp. 47—48; idem, *Oevres*, vol. VI, 17^{11} Ed. A.T., Paris, 1908]. De altfel, în pofida titlului său promiţător, *Discursul* nu este în fond decît o disertaţie *despre* metodă, un comentariu exterior, a cărui valoare strict metodologică constă în indicarea originilor doctrinale ale metodei. Discursul nu desfăşoară însă ,,*metoda*" carteziană, enunţînd doar, cu titlu general, posibilitatea aplicării sale în geometrie, fizică etc. Superior din punct de vedere metodologic propriu-zis rămîne tratatul cartezian al *Regulelor* (redactat între 1625 şi 1628), conceput ca adevărate ,,prolegomene" care fundamentează ontologic, epistemologic şi metodologic geometria analitică şi, în general, ştiinţele fizico-matematice. [A se consulta Descartes, *Regule*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965]. — *C. V.*

[2] Cf. Descartes, *Regule*, reg. XVIII, p. 91. ,,Cît priveşte celelalte operaţii, ele pot fi efectuate foarte uşor în modul în care am spus că trebuie concepute. Rămîne totuşi să arătăm cum anume trebuie transformaţi termenii lor; căci

Cum se raportă calculul aritmetic la operațiile geometrice

După cum toată aritmetica nu se compune decît din patru sau cinci operații, care sînt: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și extragerea rădăcinii, ultima putînd fi considerată ca un fel de împărțire, tot astfel și în geometrie, căutînd să aflăm anumite linii, nu avem altceva de făcut decît să adăugăm sau să scădem alte linii; sau avînd o linie pe care o voi numi unitate spre a o raporta mai ușor la numere și care de obicei poate fi luată arbitrar, avînd apoi încă alte două linii, să găsim a patra linie care să fie față de una din cele două așa cum cealaltă este față de unitate (ceea ce înseamnă înmulțire); sau să găsim a patra linie care să fie față de una din celelalte două așa cum unitatea este față de cealaltă linie (ceea ce înseamnă împărțire); sau, în sfîrșit, să găsim una, două sau mai multe medii proporționale între unitate și altă linie (ceea ce înseamnă rădăcina pătrată sau cubică etc.). Eu nu mă voi sfii să introduc acești termeni de aritmetică în geometrie pentru a mă face mai ușor înțeles[1].

Înmulțirea

Fie, de exemplu, *AB* luată ca unitate (fig. 41). Dacă trebuie să înmulțesc *BD* prin *BC*, nu am decît să unesc punctele *A* și *C*, apoi să duc *DE*, paralelă la *CA*, și *BE* este produsul acestei înmulțiri ...

---

deși avem libertatea, atunci cînd abordăm o dificultate, să concepem termenii ei ca linii sau ca dreptunghiuri, fără a fi nevoiți să recurgem și la alte figuri, așa cum am indicat în leg. XIV, totuși se întîmplă frecvent în cursul operației ca un dreptunghi, după ce a fost produs prin înmulțirea a două linii, să trebuiască apoi conceput ca o linie pentru a efectua altă operație ...". — *C. V.*

[1] Cf. *Regule*, reg. XVIII, p. 90: „În celelalte împărțiri însă, în care împărțitorul nu este dat, fiind indicat numai printr-o relație, ca în cazul extragerii rădăcinii pătratice sau cubice etc., trebuie notat că termenul de împărțit și toți ceilalți termeni trebuie concepuți ca linii existente într-o serie de mărimi continuu proporționale, prima din acestea fiind unitatea, iar ultima mărimea de împărțit. Cum anume trebuie găsite însă, între aceasta și unitate, toate mediile proporționale se va arăta la locul potrivit; pentru moment, ne mulțumim să arătăm că nu efectuăm aici asemenea operații, deoarece ele trebuie efectuate printr-o mișcare indirectă și în sens invers a imaginației; acum vom trata numai despre chestiunile care trebuie parcurse direct". — *C. V.*

Adesea nu e nevoie să trasăm pe hîrtie aceste linii, ci e de ajuns să le notăm prin cîteva litere, pe fiecare linie printr-o singură literă[1]. Pentru a adăuga linia *BD* la *GH*, numesc pe una a, pe cealaltă b și scriu $a + b$; pentru a scădea b din a, scriu $a - b$; pentru a le înmulți scriu ab; pentru a împărți a prin b scriu $\frac{a}{b}$; pentru a înmulți a prin el însuși scriu aa sau a^2 și a^3 pentru a-l înmulți încă o dată prin a, și astfel la infinit...

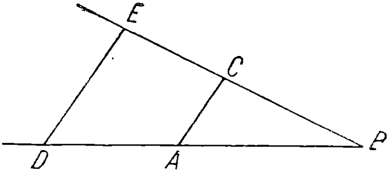


Fig. 41

Aici este de remarcat că prin a^2 sau a^3 sau altele asemenea, eu înțeleg de obicei numai linii simple, pe care totuși le numesc pătrate sau cuburi etc., ca să mă folosesc de cuvinte uzitate în algebră[2].

---

[1] *Regule* p. 87 și sqv.: „Dacă avem de făcut o adunare sau o scădere, concepem subiectul sub forma unei linii sau sub forma unei mărimi întinse, la care nu trebuie luat în considerație decît lungimea; căci dacă trebuie să adunăm linia a cu b, le unim una cu alta în felul acesta ab și se obține c etc. etc." — *C. V.*

[2] Cf. *Regule*, reg. XVI, pp. 81—82: „Trebuie observat, de asemenea, că prin numărul relațiilor trebuie înțelese proporțiile subsecvente în ordine continuă, proporții pe care alții, în algebra obișnuită, încearcă să le exprime prin mai multe dimensiuni și figuri, numind pe prima din ele rădăcină, pe a doua pătrat, pe a treia cub, pe a patra bipătrat etc. Mărturisesc că aceste denumiri m-au indus în eroare și pe mine timp îndelungat, căci mi se părea că după linie și pătrat nu-mi pot imagina ceva mai clar decît cubul și alte figuri reprezentate după asemănarea acestora; e adevărat că am rezolvat un număr însemnat de dificultăți cu ajutorul lor. După o practică îndelungată însă, am înțeles că prin acest mod de a concepe nu am aflat niciodată vreun lucru pe care să nu-l fi putut cunoaște mult mai ușor și mai precis fără ajutorul lui; și că trebuie renunțat la aceste denumiri care au darul să ne tulbure gîndirea, deoarece o aceeași mărime, indiferent dacă se numește cub sau bipătrat, nu trebuie imaginată altfel decît ca o linie sau ca o suprafață, potrivit regulii precedente. Prin urmare, trebuie notat înainte de orice că rădăcina, pătratul, cubul etc. nu sînt altceva decît mărimi continuu proporționale, la baza cărora stă întotdeauna acea unitate admisă

De asemenea, este de remarcat că dacă unitatea nu este determinată de condițiile problemei, toate părțile aceleiași linii trebuie reprezentate prin termeni de aceeași dimensiune, așa cum sînt aici a^3, abb și b^3, din care este compusă linia pe care am numit-o $\sqrt{Ca^3 - b^3 + abb}$; nu se mai întîmplă așa dacă unitatea este determinată, deoarece aceasta poate fi subînțeleasă oriunde există dimensiuni prea multe sau prea puține: așa cum dacă trebuie să extragem rădăcina cubică din $a^2b^2 - b$, atunci trebuie să ne gîndim că mărimea a^2b^2 este împărțită o dată prin unitate și că cealaltă mărime, b, este înmulțită de două ori prin aceeași unitate.

Cum ajungem la ecuațiile care servesc la rezolvarea problemelor

Dacă voim să rezolvăm o problemă oarecare, trebuie mai întîi s-o considerăm ca rezolvată și să dăm denumiri tuturor liniilor care ni se par necesare pentru construcție, atît celor necunoscute cît și celorlalte. Apoi, fără să ținem seama de deosebirea dintre liniile cunoscute și cele necunoscute, trebuie să cercetăm dificultățile problemei într-o ordine care arată în modul cel mai natural dependența reciprocă a acestor linii, pînă cînd vom fi găsit mijlocul de a exprima aceeași cantitate în două moduri; aceasta poartă numele de ecuație, căci termenii unui mod de exprimare sînt egali cu termenii celuilalt mod. Va trebui să găsim atîtea ecuații cîte linii necunoscute există. În cazul că nu găsim atîtea ecuații, deși nu s-a omis nimic din ceea ce se cere, aceasta e o dovadă că problema nu este complet determinată . . .[1]

---

ca termen mediu de care am vorbit mai înainte. La această unitate, prima proporțională se raportă imediat și printr-o unică relație; a doua însă prin mediația primei și deci prin două relații; a treia prin mediația primei și a celei de-a doua, și deci prin trei relații etc. Vom numi deci, de acum înainte, primă proporțională acea mărime care în algebră poartă numele de rădăcină; a doua proporțională acea care se numește pătrat și așa mai departe". — *C. V.*

[1] Cf. *Regule*, reg. XIX, p. 92: „Prin această metodă de calculație trebuie să căutăm atîtea mărimi exprimate în două moduri diferite cîți termeni necunoscuți presupunem cunoscuți pentru a parcurge dificultatea direct; căci în felul acesta se vor obține tot atîtea comparații între două mărimi egale; *Ibidem*, reg. XX: „Ecuațiile o dată găsite, trebuie efectuate operațiile pe care le-am omis fără a recurge la înmulțire, atunci cînd va fi cazul de efectuat o împărțire"; *Ibidem*, reg. XXI: „Dacă sînt mai multe ecuații de acest fel, trebuie reduse toate la una singură, și anume la aceea ai cărei termeni vor ocupa mai puține grade în seria mărimilor continuu proporționale în care trebuie puși în ordine". — *C. V.*

Cum se pot clasifica toate liniile curbe în anumite genuri și cum se poate cunoaște relația dintre toate punctele lor față de punctele unor linii drepte

Aș putea arăta aici multe alte mijloace pentru a trasa și a concepe liniile curbe care ar fi de grade din ce în ce mai compuse, pînă la infinit; dar pentru a cuprinde la un loc toate curbele care sînt în natură și pentru a le separa pe rînd în anumite genuri, eu nu știu altceva mai bun decît să spun că toate punctele curbelor care pot fi numite geometrice (adică cele care admit o măsură precisă și exactă) sînt cu necesitate într-o anumită relație cu toate punctele unei linii drepte, relație care poate fi exprimată printr-o ecuație, aceeași pentru toate punctele. Atunci cînd această ecuație nu se ridică decît pînă la dreptunghiul a două cantități nedeterminate sau pînă la pătratul aceleiași cantități, linia curbă este de primul și cel mai simplu gen, în care nu sînt cuprinse decît cercul, parabola, hiperbola și elipsa. Dar cînd ecuația se ridică pînă la dimensiunea a treia sau a patra a celor două sau a uneia din cele două cantități nedeterminate (căci trebuie două pentru a explica aici relația dintre două puncte), linia curbă este de genul doi; iar atunci cînd ecuația se ridică pînă la dimensiunea a cincia sau a șasea, curba este de genul trei și tot astfel cu celelalte, pînă la infinit.

De pildă, dacă vreau să știu de ce gen este linia *EC* (fig. 42) mi-o voi imagina descrisă de intersecția riglei *GL* cu porțiunea plană rectilinie *CNKL*, a cărei latură *KN* este indefinit prelungită către *C* și care, fiind mișcată în linie dreaptă pe planul de dedesubt (adică astfel ca diametrul său *KL* să se găsească mereu aplicat pe o porțiune a liniei *BA*, prelungită de o parte și de alta), produce mișcarea circulară a riglei *GL* în jurul punctului *G*, din cauză că ea este legată de plan astfel încît trece totdeauna prin punctul *L*. Aleg o linie dreaptă *AB*, pentru a pune în relație diferitele sale puncte cu toate punctele liniei curbe *EG*; pe linia *AB* aleg un punct *A*, pentru a începe cu el acest calcul. Spun că aleg și punctul și dreapta din cauză că este permis să le luăm cum vrem; căci deși există multă libertate de alegere pentru a face ecuația mai scurtă și mai ușoară, totuși, oricum am alege-o, oricînd putem face ca linia să apară de același gen, ceea ce este ușor de demonstrat. După aceasta, luînd pe curbă un punct arbitrar C, unde presupun că este aplicat instrumentul care servește la descrierea ei, duc din acest punct C linia CB paralelă cu GA, și pentru că CB și BA sînt două cantități nedeterminate și necunoscute, eu le numesc pe una y și pe celălaltă x; pentru a găsi raportul dintre una

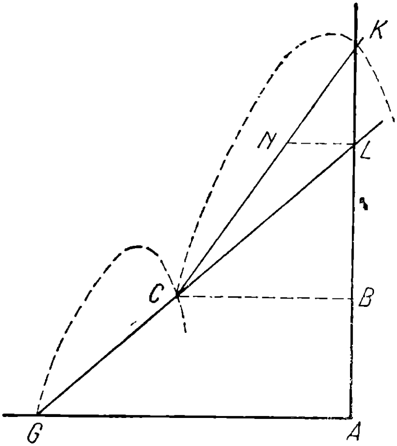


Fig. 42

și cealaltă, consider cantitățile cunoscute care determină descrierea acestei linii curbe, anume GA, pe care o numesc a, KL pe care o numesc b, și NL, paralelă cu GA, pe care o numesc c. Pe urmă spun: așa cum este NL față de LK sau o față de b, tot astfel CB sau y este față de BK, care este, prin urmare, $\frac{b}{c}y$; BL este $\frac{b}{c}y - b$, AL este $x + \frac{b}{c}y - b$. Mai mult, așa cum CB este față de LB sau y față de $\frac{b}{c}y - b$, tot astfel AG sau a este față de LA sau $x + \frac{b}{c}y - b$; în acest fel, înmulțind a doua prin a treia, se obține $\frac{ab}{c}y - ab$, care este egal cu $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$, care se obține înmulțind prima prin ultima; astfel, ecuația pe care trebuie s-o găsim este:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$

din care se cunoaște că linia *EC* este de primul gen, întrucît în adevăr ea nu este altceva decît o hiperbolă.

C. Inventarea calculului infinitezimal

În secolul al XVI-lea Occidentul își însuși operele principale ale lui *Arhimede* (cu excepția scrierii despre metodă redescoperită abia în 1906) prin traduceri și comentarii, cum sînt acelea ale lui *Maurolico* (1548) și *Commandino* (1558) și ajunse curînd la dezvoltarea ideilor antice în sensul unei simplificări și sistematizări a ,,demonstrațiilor prin exhaustiune", indirecte (*Commandino* 1565, *Stevin* 1586, *Valerio* 1604). La cvadraturi s-au folosit, așa cum a făcut *Arhimede* însuși, figuri în trepte înscrise și circumscrise, care sînt alcătuite din foarte multe dreptunghiuri de lățime egală, și s-a căutat chiar să se evalueze descreșterea erorii atunci cînd se mărește numărul fîșiilor, o cale care urmărită mai departe ar fi trebuit să ducă la conceptul de integrală.

Evoluția istorică reală nu a parcurs totuși această cale simplă, care se putea prevedea din punct de vedere logic, însă reprezentările atomistice despre așa-numitele ,,indivizibile" — care încă din antichitate au fost susținute alături de metode mai riguroase, de cercurile practicienilor și tehnicienilor — au răzbătut din nou cu putere.

Am putut constata că chiar *Oresme*, de asemenea *Galilei* (la care am putea adăuga și anumite observații ale lui *Descartes* privind legea căderii corpurilor și problema dobînzii compuse) și *Kepler* recurg la străvechea metodă a lui *Democrit* și *Heron*. Tendința analogă din scrierea metodică a lui *Arhimede* nu era pe atunci cunoscută. (Pe lîngă aceasta, există în evul mediu și altfel de concepții, ca de pildă, aceea din penultimul exemplu al lui *Oresme*.)

Este adevărat că *Aristotel*, de care în mod natural, scolasticii s-au atașat îndeosebi, combătuse cu energie ,,atomii liniei" (ἄτομοι γραμμαι), cu alte cuvinte, respinsese compunerea unui segment finit din elemente liniare infinit de mici, dar pe de altă parte, punctul nu are nici o mărime și rămînea deschisă posibilitatea de a genera o linie și în particular o dreaptă prin mișcarea (,,curgerea") unui punct. De fapt, această idee se găsește la *Sextus Empiricus* (*Adversus mathematicos*, IX, 380; X, 281) și *Proclos* (*In Euclidis Elementa*, I, ad def. 2 et ad post. 1, pp. 97, 7—17; 185, 10—12, Friedlein). Dar și *Euclid* însuși definește la începutul cărții a XI-a a *Elementelor* sfera, cilindrul și conul prin mișcări, anume prin rotații în jurul unei axe.

Această concepție dinamică se găsește apoi, pe lîngă altele, în evul mediu, mai tîrziu, de pildă, la *John Neper* (1550—1617) și în sfîrșit la *Isaac Barrow* (1630—1677), care le-a transmis marelui său elev, *Isaac Newton* (1643—1727). Denumirile newtoniene de „fluentă" și „fluxiune" își au originea în termenii medievali *forma fluens* și *fluxus formae*, fără ca, evident, noțiunile să fie exact aceleași.

Strîns legate de aceste reprezentări se află ideile, care au exercitat o mare influență, ale lui *Bonaventura Cavalieri* (*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, 1629), elevul lui *Galilei*. Conform concepției sale, care provine desigur din idei medievale, un indivizibil este ceva eterogen față de continuul divizibil la infinit, întrucît el are cu o dimensiune mai puțin decît acela; punctul este așadar indivizibilul liniei, dreapta este indivizibilul suprafeței etc. Astfel, aria unei figuri plane este reprezentată prin totalitatea secantelor (coardelor) paralele cu o tangentă la conturul său. Toate aceste secțiuni sînt generate prin „curgerea" uneia din ele, numită „regula". Două suprafețe se numesc egale dacă două secțiuni situate la distanțe egale față de tangentă sînt respectiv egale. Următoarele două propoziții principale sînt valabile în această privință:

I. Totalitatea indivizibilelor unei aceleiași figuri este independentă de „regula" aleasă.

II. Conținuturile a două figuri sînt în același raport ca totalitățile indivizibilelor lor. Aceste totalități se află într-un anumit raport, dacă toate indivizibilele corespunzătoare ale acestora au același raport.

Considerații analoge se găsesc la *Gregorius a St. Vincentio* (1584 pînă la 1667), *Roberval* (1602—1675) și în fine la *Blaise Pascal* (1623 pînă la 1662), care însă a revenit la concepții mai riguroase, înlocuind „totalitățile" lui *Cavalieri* prin „sume" de părticele elementare, pe care el le considera altceva decît indivizibile.

Prin aceasta, *Pascal* a făcut trecerea de la metoda „naivă", primitivă, a indivizibilelor la un procedeu îmbunătățit, care lucrează cu dreptunghiuri infinitezimale (fîșii infinit de înguste) și triunghiuri (cu trei laturi infinit de mici), prin care el a fost condus la „triunghiul caracteristic" atît de important pentru dezvoltarea calculului infinitezimal.

Clasicii propriu-ziși ai noului „calcul" sînt *Newton* și *Leibniz*. Metoda fluxiunilor a lui *Newton*, ale cărei idei fundamentale se găsesc deja într-una din însemnările sale din 1665, premerge inventării calculului diferențial de către *Leibniz*, a cărui primă concepție trebuie datată în jurul anului 1673.

1. Metoda fluxiunilor

Newton pornește în primele sale însemnări de la ideile profesorului său *Barrow*, în timp ce *Leibniz* (după cum au arătat cercetări istorice amănunțite, cu o probabilitate vecină cu certitudinea) a plecat de la anumite considerații ale lui *Pascal*.

În cele ce urmează dăm mai întîi un scurt fragment de *Barrow* și apoi o însemnare mai veche a lui *Newton* în care sînt introduse fluxiunile.

Isaac Barrow, *Lectiones mathematicae.* (Prelegerea a III-a pentru anul 1664, pp. 36–37.)

Progresia sau suma numerelor, care descresc infinit, începînd de la unitate (inclusiv) pînă la zero, într-un triplu raport continuu (ca, de pildă, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ etc.), este în raport cu unitatea, aşa cum este 3 faţă de 2, sau aceeaşi sumă a progresiei, excluzînd unitatea, este egală cu $\frac{1}{2}$.

Această teoremă, cred eu, poate fi demonstrată mult mai clar şi mai repede, chiar mai frumos şi mai elegant, prin întrebuinţarea mărimilor continue astfel (fig. 43):

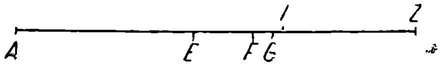


Fig. 43

Punctul mobil A să parcurgă distanţa AZ în mişcare uniformă şi punctul E să parcurgă aceeaşi distanţă tot în mişcare uniformă, dar cu a treia parte din viteza lui A. Aşadar, în acelaşi timp în care corpul mobil A parcurge distanţa AE, corpul mobil E parcurge a treia parte din AE, de pildă EF. Tot astfel, în timpul în care primul corp mobil parcurge distanţa EF, celălalt corp mobil va parcurge a treia parte din EF, de exemplu FG, şi tot aşa la infinit, pînă cînd corpul mobil A atinge corpul E în I. Considerînd AE unitate, atunci vom avea $EF = \frac{1}{3}$; $FG = \frac{1}{9}$ şi $GH = \frac{1}{27}$ etc., pînă la infinit, conform ipotezei. Deoarece însă corpul mobil A trebuie să se mişte cu o viteză de trei ori mai mare decît a lui E, este evident că distanţa AI, parcursă de A, este de trei ori mai mare decît distanţa EI, care este parcursă de E, în acelaşi timp. Aşadar, EI (adică progresia descrescătoare excluzînd unitatea) este faţă de AE în acelaşi raport ca 1 faţă de 2, iar AI (adică progresia descrescătoare incluzînd unitatea) este faţă de AE în acelaşi raport ca 3 faţă de 2.

Însemnarea lui **Newton,** din 23. XI. 1665:

Fie dată o ecuaţie care exprimă relaţia dintre două sau mai multe segmente x, y, z etc., care sînt descrise în acelaşi timp de două sau mai multe corpuri mobile A, B, C etc. Să se găsească relația dintre vitezele lor p, q, r etc.

Soluție: Adu toți termenii într-o parte a ecuației, astfel încît să devină egali cu zero și înmulțește mai întîi fiecare termen de atîtea ori prin $\frac{p}{x}$ cîte dimensiuni are x în ecuație. În al doilea rînd, înmulțește fiecare termen de atîtea ori prin $\frac{q}{y}$ cîte dimensiuni are y în ea. În al treilea rînd, înmulțește fiecare termen de atîtea ori prin $\frac{r}{z}$ cîte dimensiuni are z în ea. Suma tuturor acestor produse trebuie să fie egală cu zero. Această ecuație dă relația între p, q, r etc.

Demonstrație (fig. 44):

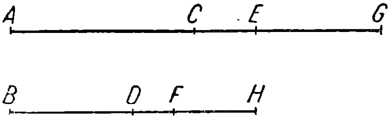


Fig. 44

Dacă două corpuri A și B se mișcă uniform, unul din A către C, E și G, celălalt de la B către D, F și H de-a lungul aceleiași linii, atunci segmentele AC și BD, CE și DF, EG și FH sînt în același raport cu vitezele lor, p și q, și dacă nu se mișcă uniform, segmentele infinit de mici pe care ele le descriu în fiecare moment sînt în același raport ca vitezele pe care le au în timpul cînd descriu segmentele respective. Dacă, așadar, corpul A descrie segmentul infinit de mic o într-un moment cu viteza p, corpul B va descrie în același moment segmentul $\frac{oq}{p}$ cu viteza q. Căci $p : q = o : \frac{oq}{p}$. Astfel încît dacă segmentele descrise într-un moment sînt x și y, în momentul următor vor fi $x + o$ și $y + \frac{oq}{p}$.

Dacă ecuația care exprimă relația segmentelor este $rx + xx - yy = o$, pot substitui $x + o$ și $y + \frac{oq}{p}$ pentru x și y, deoarece ele, ca și x și y, înseamnă segmentul descris de corpurile A și B.

Astfel se obține:

$$rx + ro + xx + 2xo + oo - yy - \frac{2qoy}{p} - \frac{qqoo}{pp} = o$$

Însă prin ipoteză avem:

$$rx + xx - yy = o;$$

Așadar rămîne:

$$ro + 2xo + oo - \frac{2qoy}{p} - \frac{qqoo}{p} = o$$

și după împărțirea prin o avem:

$$r + 2x + o - \frac{2qy}{p} - \frac{oqq}{p} = o$$

Însă termenii care conțin pe o sînt infinit mai mici decît aceia care nu-l conțin. De aceea, dacă îi eliminăm, rămîne:

$$r + 2x - \frac{2qy}{p} = o \quad \text{sau} \quad pr + 2px = 2qy$$

De aceea, avem de observat: mai întîi că termenii în care o nu se găsește dispar, deoarece ei reprezintă ecuația inițială; în al doilea rînd, că în cazul cînd ecuația rămasă a fost împărțită prin o, dispar termenii în care o se mai păstrează, deoarece ei sînt infinit de mici; în al treilea rînd, că termenii care mai rămîn acum vor avea totdeauna aceeași formă pe care trebuiau s-o aibă după regula precedentă...

Prima expunere mai matură a metodei fluxiunilor există din anii 1670–1671, dar a fost publicată de-abia după moartea autorului. Reproducem aici formulările fundamentale ale ambelor probleme principale, precum și soluția cel puțin a primei probleme.

Isaac Newton, din *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (scrisă în 1670–1671, publicată în limba engleză în 1736).

... ceea ce este dificil în aceste chestiuni se poate reduce la următoarele două probleme...

I. Se dă lungimea drumului parcurs în fiecare moment. Să se găsească viteza mișcării la un moment dat.

II. Dacă viteza în orice moment este dată, să se găsească lungimea drumului descris la un moment dat.

Dacă, de pildă, în ecuația $xx = y$, y reprezintă lungimea drumului parcurs în momentul respectiv, timp care este măsurat și notat printr-o altă mărime în spațiul x, care crește cu viteza uniformă $\dot{x}$, atunci $2\dot{x}x$ va reprezenta viteza cu care mărimea în spațiu y avansează în același moment, descriind traiectoria sa și invers.

... În cele ce urmează consider timpul nu ca ceva real (*formaliter*), ci presupun că o mărime, de aceeași natură cu celelalte mărimi care apar, crește o dată cu acestea într-un „flux" uniform, la care se raportează celelalte mărimi, ca și cum s-ar raporta la timp. De aceea, această mărime poate fi numită, în consecință, timp. Dacă deci în cele ce urmează este folosit cuvîntul „timp"... acest cuvînt nu trebuie înțeles ca și cum eu aș lua timpul în sensul său real, ci în sensul că am în vedere acea mărime diferită de timp, prin a cărei creștere sau curgere uniformă este reprezentat și măsurat timpul.

În cele ce urmează voi numi fluente acele mărimi pe care le consider crescînd treptat și în mod nelimitat și le voi reprezenta prin ultimele litere ale alfabetului u, x, y și z, pentru a putea fi deosebite de celelalte mărimi considerate în ecuații și reprezentate prin primele litere ale alfabetului a, b, c, ... Vitezele însă cu care fluentele sînt mărite prin mișcarea care le generează — pe care le numesc fluxiuni sau pur și simplu viteze — sînt reprezentate prin aceleași litere cu un punct deasupra, ca $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ și $\dot{z}$.

Problema I. Dacă relația care există între fluente este dată, să se determine relația dintre fluxiuni.

Soluție. Ordonează ecuația, care exprimă relația, după dimensiunile unei fluente (mărime curgătoare) care apare în ea, de pildă x, și multiplică termenii ei cu o progresie oarecare aritmetică și apoi cu $\dot{x}/x$. Efectuează această operație cu fiecare fluentă. Apoi formează din acest tot un agregat și egalează-l cu zero, și vei avea ecuația căutată.

Demonstrație. Momentele mărimilor fluente (adică părțile lor infinit de mici, prin a căror adăugare în părți de timp infinit de mici înseși mărimile sînt mărite în același timp [*iugiter*]) sînt în același raport cu vitezele cu care ele „curg" sau cresc.

De aceea, dacă momentul unei mărimi x reprezentat prin produsul vitezei sale $\dot{x}$ cu o mărime o infinit de mică (deci prin $\dot{x}o$), atunci momentele celorlalte mărimi u, y, z vor trebui reprezentate prin $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, deoarece $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$ vor avea între ele același raport ca $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Pentru că însă momentele (ca de exemplu $\dot{x}o$ și $\dot{y}o$) sînt creșteri infinit de mici, prin care fluentele x și y cresc în intervale de timp infinit de mici, de aici decurge că mărimile x și y, după un interval de timp infinit de mic, devin $x + \dot{x}o$ și $y + \dot{y}o$. Ecuația care exprimă în fiecare moment relația dintre fluente va exprima relația dintre $x + \dot{x}o$ și $y + \dot{y}o$ tot atît de bine ca și pe aceea dintre x și y, astfel încît în această ecuație se poate pune $x + \dot{x}o$ și $y + yo$, în loc de x și y.

În consecință, fie ecuația:

$x^3 - axx + axy - y^3 = o$; substituie în ea $x + \dot{x}o$ și $y + \dot{y}o$ pentru x și y; vei obține:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\,xx\dot{x}o + 3\,x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ \quad - axx - 2\,ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ \quad + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ \quad + ax\dot{y}o \\ \quad - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - y^3o^3 \end{array}\right\} = o$$

Dar prin ipoteză avem $x^3 - axx + axy - y^3 = o$. Elimină acești termeni, împarte pe cei rămași prin o și va mai rămîne:

$$3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} - ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o +$$
$$+ a\dot{x}\dot{y}o - 3yy\dot{y}o + \dot{x}^3oo - y^3oo = o$$

Deoarece am presupus (*finxerimus*) mărimea o infinit mică, pentru a putea exprima momentele mărimilor, putem considera termenii care o conțin ca nuli în comparație cu ceilalți termeni. Așadar, îi neglijez, și mai rămîne:

$$3\,xx\dot{x} - 2\,ax\dot{x} - ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3\,yy\dot{y} = o$$

În scolia următoare, foarte interesantă, extrasă din *Principii* (1686), *Newton* are o explicație în totul principială cu teoria indivizibilelor. El pune la baza deducțiilor sale matematice, care aici intenționat sînt cît mai apropiate de procedeul geometrilor clasici, anumite „leme" (propoziții ajutătoare) conținînd un fel de metodă la limită, metoda „rapoartelor prime și ultime" ale cantităților care apar și dispar. Conceptul de mișcare și viteză, pe care *Newton* l-a primit de la *Barrow*, este și aici fundamental.

Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica. De motu corporum liber primus,* sectio prima (1686).

Lema I. Cantitățile ca și rapoartele cantităților, care continuu, în orice interval de timp finit, tind la egalitate și care înainte de sfîrșitul acelui interval se apropie una de alta mai mult decît orice diferență dată dinainte, devin pînă la urmă egale.

Demonstrație: Dacă vrei să negi, atunci ele pot fi pînă la urmă neegale și fie D diferența lor. Așadar, nu se pot apropia de egalitate cu mai mult decît indică diferența D dată dinainte — ceea ce e contrar ipotezei.

Din *scolia la leme* (după lema a XI-a):

Am pus înainte aceste leme (propoziții ajutătoare), pentru a scăpa de plictiseala de a trebui să deduc demonstrații lungi prin reducere la absurd, după obiceiul celor vechi. Căci demonstrațiile prin metoda indivizibilelor capătă o formă mai scurtă. Dar pentru că ipoteza indivizibilelor este mai tare și, în afară de aceasta, metoda aceea este considerată mai puțin geometrică, am preferat ca demonstrațiile lucrurilor care urmează să le reduc la ultimele sume și rapoarte ale cantităților care tind să dispară (*evanescente*) și la primele ale celor născînde, adică la limitele sumelor și rapoartelor; de aceea, am preferat să expun mai întîi demonstrațiile pentru aceste limite în modul cel mai scurt posibil. Prin aceasta se obține același rezultat ca și prin metoda indivizibilelor, și vom întrebuința în modul cel mai sigur principii demonstrate. Deci dacă în cele ce urmează consider cantități oarecare, care constau oarecum din particule constante, sau dacă eu consider ca drepte mici porțiuni de curbe, atunci nu voi înțelege că este vorba de indivizibile, ci de divizibile evanescente, nu de sume și rapoarte de părticele determinate, ci totdeauna de limite ale sumelor și rapoartelor, și voi aminti că forța unor astfel de demonstrații are la bază metoda lemelor expuse mai înainte.

Se ridică obiecția că nu există nici un ultim raport al cantităților evanescente, pentru că, înainte ca ele să dispară, raportul lor nu poate fi ultimul, iar dacă au dispărut, atunci nu mai există nici un raport. Însă cu același argument se poate afirma că nu există o viteză finală a unui corp care ajunge într-un anumit loc unde se termină mișcarea. Căci această viteză — înainte ca să ajungă corpul în acest loc — nu este finală; însă dacă a ajuns în acel loc, nu mai există nici o viteză, și răspunsul este ușor: prin viteză finală înțelegem pe aceea cu care corpul se mișcă nu mai înainte ca el să fi atins poziția sa finală și să se termine mișcarea, nici după aceea, ci atunci cînd ajunge în acea poziție, adică tocmai acea viteză cu care el ajunge în acea poziție finală și cu care se termină mișcarea. Tot astfel, trebuie să înțelegem prin raport ultim al cantităților evanescente raportul acelor cantități nu înainte ca ele să dispară sau după ce ele au dispărut, ci raportul cu care ele dispar...

Există o limită pe care viteza poate s-o atingă la capătul mișcării, dar pe care n-o poate depăși. Aceasta e viteza finală. Tot astfel poate fi determinată valoarea limitei cantităților și rapoartelor celor care încep sau încetează, și deoarece această limită este definită și certă, problema de a o determina este strict geometrică, și toate cele geometrice pot fi folosite în mod legitim, pentru a stabili și demonstra alte lucruri, care sînt ele înseși geometrice.

S-ar mai putea obiecta că dacă ultimele rapoarte ale cantităților evanescente ar fi date, atunci și ultimele cantități ar fi date, și astfel orice cantitate ar consta din indivizibile — contrar celor demonstrate de Euclid în cartea a X-a despre mărimile incomensurabile.

Dar această obiecție se bazează pe o ipoteză falsă. Aceste ultime rapoarte, cu care dispar cantitățile, nu sînt în realitate rapoarte ale ultimelor cantități, ci limite de care rapoartele cantităților infinit descrescătoare se apropie necontenit și de care ele se pot apropia mai mult decît orice diferență dată mai înainte, pe care ele însă n-o pot niciodată nici atinge, nici depăși, înainte ca aceste cantități să fi descrescut la infinit.

Argumentul va fi înțeles mai clar în cazul cantităților infinit de mari. Dacă două cantități, a căror diferență este dată, cresc la infinit, atunci ultimul lor raport va fi dat, anume un raport de egalitate (1 : 1); totuși, nu vor fi date în acest caz cantitățile ultime sau maxime, al căror raport este acesta.

De aceea, dacă vreodată, în cele ce urmează în vederea unei înțelegeri mai ușoare, se întrebuințează expresiile „infinit de mic" sau „evanescent" sau „ultim", raportate la cantități, trebuie să ne ferim de a înțelege prin acestea anumite cantități determinate ca atare, ci trebuie să le concepem în toate cazurile ca mărimi care descresc nemărginit.

Urmează încă o expunere ulterioară a teoriei fluxiunilor care, între altele, conține aluzii polemice contra lui *Leibniz*, dar și generalizarea fluentelor și fluxiunilor superioare.

Newton, *Tratat despre cvadratura curbelor* (1704).

Introducere

1. Aici nu consider cantitățile matematice ca fiind alcătuite din părți extrem de mici, ci ca descrise prin mișcare continuă. Liniile sînt descrise, și prin descriere ele sînt produse nu prin alăturarea părților, ci prin continua mișcare a punctelor; suprafețele sînt descrise prin mișcarea liniilor; corpurile, prin mișcarea suprafețelor, unghiurile, prin rotația laturilor; intervalele de timp, prin curgerea continuă; și tot astfel este în celelalte cazuri. Aceste creații au loc realmente în natură și se pot observa zilnic în mișcarea corpurilor. Tot în acest fel ne învățau și cei vechi că se creează dreptunghiurile ducînd drepte mobile de-a lungul dreptelor imobile.

2. Ținînd seama că în timpuri egale cantitățile crescătoare sau create în mod crescător ajung mai mari sau mai mici, în funcție de viteza mai mare sau mai mică cu care ele cresc sau sînt create, eu am căutat o metodă pentru determinarea cantităților cu ajutorul vitezei mișcării sau vitezei creșterii, prin care ele sînt create. Aceste viteze de mișcare le-am numit fluxiuni, iar cantitățile create le-am numit fluente, și am ajuns treptat în anii 1665 și 1666 la metoda fluxiunilor, pe care am întrebuințat-o aici la cvadratura curbelor.

3. Fluxiunile sînt între ele absolut în același raport ca și creșterile fluentelor create în fracțiuni de timp egale extrem de mici și, pentru a vorbi precis, ele se află în primul raport al creșterilor inițiale. Ele pot fi însă reprezentate prin linii de orice fel, proporționale cu ele.

4. De pildă, suprafețele ABC, $ABDG$ pot fi descrise de către ordonatele BC, BD, care se deplasează pe baza AB în mișcare uniformă (fig. 45). Atunci fluxiunile acestor suprafețe sînt în același raport ca ordonatele BC și BD care le descriu, și ele se pot reprezenta prin acele ordonate, pentru că ordonatele sînt în același raport ca și creșterile inițiale ale suprafețelor.

Să se considere ordonata BC ca deplasîndu-se din poziția sa BC către o nouă poziție bc. Să se completeze paralelogramul $BCEb$ și să se ducă dreapta VTH, care atinge curba în C și întîlnește prelungirile lui bc și AB în T și V. Atunci la abscisa AB, la ordonata BC și la linia curbă AC vor apărea următoarele creșteri: Bb, Ec și Cc. În primul raport al acestor creșteri inițiale se află laturile triunghiului CET. De aceea, fluxiunile lui AB, BC și AC sînt în același raport ca laturile CE, ET și CT ale acelui triunghi ECT, și ele se pot reprezenta chiar prin aceste laturi sau, ceea ce este același lucru, prin laturile triunghiului asemenea VBC.

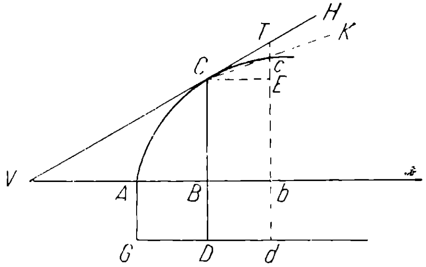


Fig. 45

5. Același lucru se obține dacă se consideră fluxiunile în ultimul raport al părților evanescente. Să se ducă dreapta Cc și să se prelungească aceasta pînă în K. Apoi să se aducă ordonata bc înapoi la poziția BC de mai înainte. Atunci, prin apropierea punctelor C și c dreapta CK și tangenta CH coincid, iar triunghiul evanescent CEc va deveni în ultima sa formă asemenea cu triunghiul CET, iar laturile sale evanescente CE, Ec și Cc vor fi pînă la urmă în același raport ca laturile CE, ET și CT ale celuilalt triunghi CET. De aceea, fluxiunile liniilor AB, BC și AC se află în acest raport. Dacă punctele C și c sînt depărtate între ele cu un mic interval oarecare, atunci dreapta CK va fi depărtată de tangenta CH cu un mic interval. Dacă dreapta CK va coincide cu tangenta CH și dacă vor fi aflate ultimele rapoarte ale liniilor CE, Ec și Cc, atunci este necesar ca punctele C și c să se apropie și să coincidă perfect. Chiar și

peste greşeli atît de mici nu este permis să se treacă în chestiuni matematice.

. . . .

10. Fie cantitatea x care curge uniform; să se găsească fluxiunea cantităţii x^n.

În timpul în care x^n prin curgere devine $x + o$, x^n devine $(x + o)^n$, adică, după metoda progresiilor înfinite, devine

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2x^{n-2} + \text{etc.}$$

Creşterile

$$o \text{ şi } nox^{n+1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2x^{n-2} + \text{etc.}$$

sînt în acelaşi raport ca

$$1 \text{ faţă de } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \text{etc.}$$

Acum acele creşteri pot dispărea. Atunci ultimul lor raport va fi 1 către nx^{n-1}. De aceea, fluxiunea cantităţii x faţă de fluxiunea cantităţii x^n se află în raportul 1 către nx^{n-1}.

11. Prin consideraţii analoge, cu ajutorul metodei primelor şi ultimelor rapoarte se pot obţine fluxiunile liniilor, fie ele drepte, curbe, în cazuri arbitrare, precum şi fluxiunile suprafeţelor de acoperire, ale unghiurilor şi ale altor cantităţi. A efectua în acest mod analiza pentru cantităţi finite şi a descoperi primele sau ultimele rapoarte ale cantităţilor finite, născînde sau evanescente, concordă cu geometria anticilor. Eu voiam să arăt că la metoda fluxiunilor nu este nevoie să introducem în geometrie figuri infinit de mici. Negreşit că se poate efectua analiza la figuri arbitrare, fie finite, fie infinit de mici, pe care ni le imaginăm asemenea cu figurile evanescente, ca şi la figurile pe care obişnuim să le considerăm, după metoda indivizibilelor, ca fiind infinit de mici. Trebuie numai să se procedeze cu precauţie.

12. A afla fluentele din fluxiuni este o problemă dificilă, şi primul pas al soluţionării este echivalent cu cvadratura curbelor. Asupra acesteia am scris mai de mult următoarele:

În cele ce urmează consider cantitățile nedeterminate crescînd și descrescînd în mișcare continuă, adică curgînd sau scurgîndu-se. Pe ele le notez cu literele z, y, x, v, iar fluxiunile lor sau vitezele lor de creștere le exprim prin aceleași litere prevăzute cu puncte deasupra, deci prin $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. De la aceste fluxiuni există, de asemenea, fluxiuni ale acestor fluxiuni sau variații mai mult sau mai puțin rapide. Ele se pot numi fluxiuni de ordinul doi ale lui z, y, x, v și pot fi notate $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; fluxiunile de ordinul întîi ale acestora sau fluxiunile de ordinul trei din z, y, x, v se notează $\dot{\ddot{z}}$, $\dot{\ddot{y}}$, $\dot{\ddot{x}}$, $\dot{\ddot{v}}$; cele de ordinul patru se notează $\ddot{\ddot{z}}$, $\ddot{\ddot{y}}$, $\ddot{\ddot{x}}$, $\ddot{\ddot{v}}$. După cum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ sînt fluxiuni ale mărimilor $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, acestea, fluxiuni ale mărimilor $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ și acestea la rîndul lor fluxiuni ale primelor mărimi z, y, x, v, tot astfel aceste cantități pot fi considerate ca fluxiuni ale altor cantități pe care eu le voi nota astfel: $\overset{|}{z}$, $\overset{|}{y}$, $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{v}$; acestea, ca fluxiuni ale altora $\overset{||}{z}$, $\overset{||}{y}$, $\overset{||}{x}$, $\overset{||}{v}$ și acestea, ca fluxiuni ale altora $\overset{|||}{z}$, $\overset{|||}{y}$, $\overset{|||}{x}$, $\overset{|||}{v}$. Așadar, $\overset{||}{z}$, $\overset{|}{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, $\overset{\cdot}{\ddddot{z}}$ etc. înseamnă un șir de cantități în care fiecare este fluxiunea celei precedente și fiecare este fluentă pentru fluxiunea următoare . . .

2. Un adversar al calculului fluxiunilor: Berkeley

Noul calcul infinitezimal al lui *Newton* (și nu mai puțin și al lui *Leibniz*) a cîștigat nu numai aderenți, ci și adversari. Între aceștia din urmă, unul din cei mai remarcabili este renumitul filozof și teolog *George Berkeley* (1685—1753), de la care avem, printre altele, o mică lucrare curioasă *The Analyst* (Dublin și Londra 1734), al cărui titlu complet îi dezvăluie cu claritate tendința: *Analistul sau analiza adresată unui matematician necredincios* (se referă la cunoscutul matematician și astronom *Edmund Halley* [1656—1742] care era cotat ca liber gînditor), în care se cercetează dacă obiectul, principiile și felurile de a raționa ale analizei moderne sînt concepute mai clar și deduse mai limpede decît tainele religioase și articolele de credință".

Berkeley apără deci teologia, care nu poate să facă înțelese rațional toate misterele credinței, încercînd să demonstreze că însăși matematica nu este scutită de neinteligibilitate. Argumentele sale sînt subtile și spirituale, chiar dacă azi nu le mai putem recunoaşte ca realmente valabile. În cele ce urmează dăm cîteva fragmente caracteristice din *The Analyst.*

§ 4. Prin ,,momente'' nu trebuie să înţelegem părticele finite. Acestea din urmă sînt, cum se spune, nu momente, ci cantităţi create din momente, în timp ce acelea (momentele) sînt numai începuturile născînde ale cantităţilor finite. Se spune că în matematică nu ar fi permis să se neglijeze nici cele mai neînsemnate greşeli. Mai departe, se spune că fluxiunile ar fi viteze care nu ar fi proporţionale cu creşterile încă aşa de mici, ci numai cu momentele sau creşterile născînde, cărora li s-ar cerceta numai raportul, nu mărimea. Ni se mai spune că există iarăşi fluxiuni ale fluxiunilor menţionate, care sînt numite ,,fluxiuni de ordinul doi''. Iar fluxiunile acestora sînt numite fluxiuni de ordinul trei, apoi de ordinul patru ş.a.m.d., la infinit. Deoarece mintea noastră este încordată şi încurcată atunci cînd percepe obiecte extrem de mici, tot astfel şi imaginaţia, a cărei facultate îşi are originea în minte, este foarte încordată şi încurcată atunci cînd vrea să elaboreze reprezentări clare despre intervale de timp foarte mici sau despre creşteri foarte mici create în aceste intervale, şi cu atît mai mult atunci cînd percepe aceste momente sau aceste creşteri ale mărimilor care curg *in statu nascendi* la originea sau începutul existenţei, înainte de a deveni părticele finite. Se pare că este şi mai greu să înţelegi vitezele abstrase din astfel de cantităţi născînde şi imperfecte. Dar vitezele vitezelor — vitezele de ordinul doi, trei, patru şi cinci etc. — depăşesc, dacă nu mă înşel orice înţelegere omenească. Cu cît spiritul urmăreşte şi analizează mai mult aceste reprezentări fugitive, cu atîta este el mai pierdut şi mai confuz; obiectele, mai întîi fugitive şi minuscule, dispar curînd din vedere. În orice sens, mie îmi apare cu certitudine că fluxiunea a doua şi a treia sînt un adevărat mister. Viteza iniţială a unei viteze iniţiale, creşterea născîndă a unei creşteri născînde, adică a unui lucru fără mărime, luaţi-o cum vreţi: înţelegerea clară a acestora va fi considerată, dacă nu mă înşel, ca imposibilă... Şi dacă chiar fluxiunea a doua este de neconceput, ce putem crede despre a treia, a patra, a cincea fluxiune şi aşa mai departe, la nesfîrşit?

§ 14. Argumentaţia (lui *Newton*) poate fi astfel exprimată: presupun că o cantitate x curge, şi în curgerea sa creşte; numesc creşterea sa o, astfel că ea prin curgere devine $x + o$. Şi pentru că x creşte, urmează că fiecare putere a lui x, de asemenea, creşte într-un raport corespunzător. Prin urmare, deoarece x devine $x + o$, atunci x^n devine $(x + o)^n$. Aceasta dă, după metoda dezvoltării în serii infinite:

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \ldots$$

Dacă acum scădem rădăcina, respectiv puterea, din ambele cantităţi mărite vom căpăta ca rest ambele creşteri, anume:

$$o \text{ şi } nox^{n-1} + \frac{nn - n}{2} oox^{n-2} + \ldots$$

creşteri care divizate prin o dau cîturile:

$$1 \text{ şi } nx^{n-1} + \frac{nn - n}{2} ox^{n-2} + \ldots,$$

care dau aşadar termenii (exponents) pentru rapoartele creşterilor.

Pînă aici am presupus că x curge, că x are o creştere reală, că o este ceva. Şi în general am plecat de la această ipoteză, fără de care n-aş fi fost în stare să fac un singur pas. De la această ipoteză ajung la creşterea lui x^n, astfel ca să-l pot compara cu creşterea lui x şi să găsesc raportul ambelor creşteri. Apoi cer permisiunea de a putea face o nouă ipoteză, care este contrară primei; adică acum vreau să presupun că nu există nici o creştere a lui x sau că nu o este nimic, această a doua ipoteză anulînd pe prima şi fiind incompatibilă cu ea şi de aceea incompatibilă cu tot ceea ce ea presupune. Cu toate acestea, eu cer permisiunea de a reţine nx^{n-1}, o expresie obişnuită, datorită primei mele ipoteze, care presupune în mod necesar o astfel de ipoteză şi fără de care n-ar putea fi obţinută.

Toate acestea sînt în aparenţă un mod de argumentare plin de contradicţie, aşa cum n-ar fi permis în teologie.

Din § 15. Admit că se poate face ca semnele să semnifice ceva sau nimic şi că, prin urmare, în modul iniţial de notare simbolurile $x + o$, o au putut însemna sau o creştere, sau nimic.

Dar orice semnificație ați da acestor notații, ar trebui să argumentați, fără să vă contraziceți, folosind o astfel de notație, și nu ar fi permis să mergeți mai departe bazați pe un dublu sens, căci aceasta ar fi un sofism evident. Fie că argumentați cu cuvinte, fie cu simboluri, regulile gîndirii corecte sînt totdeauna aceleași. Și nici nu se poate admite că voi cereți în matematică privilegiul de a face excepție de la ele.

Din § 35. Trebuie să recunoaștem de fapt că marele autor al metodei fluxiunilor (*Newton*) folosește fluxiunile ca o schelărie de construcție, care urmează să fie înlăturată ... îndată ce s-au găsit linii finite care sînt proporționale cu ele. Dar acești termeni finiți ai raportului sînt găsiți cu ajutorul fluxiunilor. Deci ceea ce se obține prin aceste proporții și prin termenii lor trebuie atribuit fluxiunilor — care, din această cauză, sînt primele ce trebuie să fie înțelese. Și ce sînt aceste fluxiuni? Ele sînt vitezele creșterilor evanescente. Și ce sînt aceste creșteri evanescente? Ele nu sînt nici cantități finite, nici cantități infinit de mici, nici nimic. N-am putea noi oare să le numim stafiile cantităților răposate?

3. Calculul diferențial al lui Leibniz

Tînăr, în timpul șederii la Paris, *Leibniz* a primit în anul 1673 un imbold decisiv de la o idee a lui *Pascal* dintr-o scriere a acestuia apărută în 1659 *Traité des sinus des quarts du cercle* (Tratat asupra sinușilor cadranului circular). El spunea că a văzut aici ceva ce nici autorul nu a observat. Este vorba de următoarele (scriind cu semne moderne; cf. fig. 46):

Pentru a determina momentul static $\int_0^{\frac{1}{2}a\pi} y\,ds$ al arcului cadranului în raport cu axa x, *Pascal* deduce din asemănarea triunghiului $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle s$ cu triunghiul y, $(a - x)$, a că $\triangle s : a = \triangle x : y$; deci $y\triangle s = a\triangle x$, astfel încît

$$\int_0^{\frac{1}{2}a\pi} yds = \int_0^{a} ads = a^2.$$

Leibniz a observat — şi aceasta e „lumina" pe care a văzut-o el — că acest procedeu nu este mărginit la cerc, ci e valabil în general pentru orice curbă (netedă), atîta vreme cît raza cercului a este înlocuită prin lungimea normalelor la curbe. Triunghiul infinitezimal $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle s$ este vestitul „triunghi caracteristic".

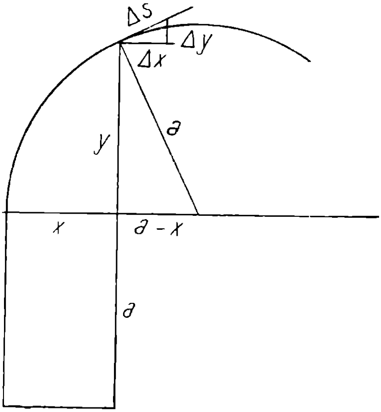


Fig. 46

Este foarte interesant că simbolica *leibniziană* ulterioară a calculului diferenţial (dx,dy, ds) corespunde tocmai punctului de vedere al acestei „reprezentări îmbunătăţite a indivizibilelor".

Urmează acum prima lucrare, fără îndoială publicată mai tîrziu, a lui **Leibniz** asupra calculului diferenţial din *Acta Eruditorum*, din anul 1684.

Noua metodă de determinare a maximelor, minimelor precum şi a tangentelor . . . şi un mod de calcul referitor la acestea (cf. fig. 47)

Fie dată o axă AX şi mai multe curbe ca VV, WW, YY, ZZ. Ordonatele lor perpendiculare pe axă VX, WX, YX, ZX se pot numi respectiv v, w, y, z. Fie x segmentul AX pe axă. Fie VB, WC, YD, ZE tangente şi B, C, D, E intersecţiile lor respective cu axa. Să se aleagă acum o distanţă arbitrară şi să fie notată dx. Atunci acea distanţă, care este faţă de dx în acelaşi raport ca v (sau w sau y sau z) faţă de XB (sau XC sau

XD sau XE), o notăm cu dv (sau dw sau dy sau dz) și o numim diferența lui v (sau a lui w sau y sau z). După ce am stabilit toate acestea, regulile de calcul vor fi următoarele:

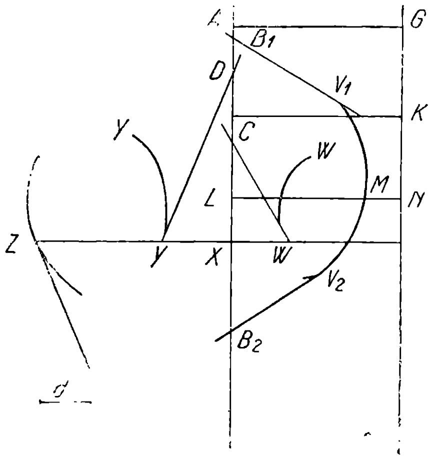


Fig. 47

Dacă a este o cantitate constantă dată, atunci da va fi egal cu zero și $d(ax)$ egal cu adx. Dacă y este egal cu v (adică fiecare ordonată a curbei YY egală cu ordonata corespunzătoare a curbei VV), atunci dy va fi egal cu dv. Acum adunarea și scăderea: dacă $z - y + w + x$ este egal cu v, atunci $d(z - y + w + x)$ sau dv este egal cu $dz - dy + dw + dx$. Înmulțirea: $d(xv)$ este egal cu $xdv + vdx$, adică dacă în loc de xv punem y, atunci dy este egal cu $xdv + vdx$. Căci este indiferent dacă întrebuințăm expresia xv sau o prescurtăm prin litera y. Trebuie să fim atenți ca în acest calcul x și dx să fie tratați la fel ca y și dy sau orice altă literă cu diferențiala sa. De asemenea, trebuie să știm că numai cu o anumită precauție găsim operația inversă, plecînd de la ecuația diferențială; despre aceasta vom vorbi în altă parte. Acum în ce privește împărțirea: $d\frac{v}{y}$ sau (dacă înlocuim $\frac{v}{y}$ prin z) dz este egal cu $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

În ce privește semnele avem de observat următoarele ... Dacă studiem relația dintre z și x, atunci ne apare problema dacă valoarea lui dz este o cantitate pozitivă sau mai mică decît zero, adică negativă. În ultimul caz, tangenta ZE nu se mai duce din punctul Z către A, ci în sensul contrar, de la X în jos; acest lucru are loc dacă ordonatele Z descresc în timp ce x crește. Și deoarece ordonatele v cînd cresc, cînd descresc, dv este cînd pozitiv, cînd negativ. În primul caz, se duce tangenta V_1B_1 către A, în al doilea caz, se duce V_2B_2 în partea opusă. În punctul intermediar M nu are loc nici una, nici alta în momentul în care ordonatele v nici nu cresc, nici nu descresc, ci rămîn pe loc. Atunci dv devine egal cu zero și este indiferent dacă mărimea este pozitivă sau negativă, căci $+o$ este egal cu $-o$. În acest loc v, adică ordonata LM, este un maxim (sau, dacă partea convexă este îndreptată spre axă, un minim) și tangenta curbei în M nu este dusă nici de la X la A, pentru a se apropia de axă, nici în sensul opus, de la X în jos; ea este mai degrabă paralelă cu axa. Dacă dv în raport cu dx este infinit, atunci tangenta este perpendiculară pe axă, adică ea este ordonata. Dacă dv și dx sînt egale, atunci tangenta formează cu axa un unghi de 45°. Dacă o dată cu creșterea ordonatelor cresc și diferențele lor dv (adică: avînd dv pozitive și ddv, diferențele diferențelor, sînt pozitive, avînd dv negative și ddv sînt negative), atunci curba arată spre axă partea ei convexă, în caz contrar, partea ei concavă. Acolo unde diferența este un maxim sau minim, deci cînd diferențele devin din descrescătoare crescătoare sau invers, avem un punct de inflexiune, iar concavitatea și convexitatea se schimbă între ele, cu condiția ca nici ordonatele să nu devină acolo din crescătoare descrescătoare sau invers; căci atunci concavitatea sau convexitatea s-ar menține ... De aceea, un punct de inflexiune există dacă nici v nici dv nu este egal cu zero, dar ddv este nul. Din această cauză, nici problema punctului de inflexiune nu are două soluții ca problema maximului, ci trei rădăcini egale. Aceasta depinde de folosirea corectă a semnelor ...

Dacă se cunoaște, ca să spun așa, algoritmul de mai sus al acestui calcul, pe care eu îl numesc *calcul diferențial*, atunci printr-un procedeu comun de calcul se pot afla toate celelalte ecuații diferențiale, se pot obține maximele și minimele, precum și tangentele ... Toate acestea se pot demonstra ușor de cineva versat în astfel de lucruri, dacă are în vedere numai faptul —

pînă acum nu suficient examinat — că dx, dy, dv, dw, dz pot fi considerate proporționale cu diferențele momentane, adică cu creșterile sau descreșterile lui x, y, v, w, z ale fiecăruia pe rînd). Astfel, se ajunge ca pentru fiecare ecuație propusă să i se poată scrie ecuația sa diferențială. Aceasta se întîmplă înlocuind pur și simplu fiecare termen prin diferențiala termenului, folosind totuși pentru o altă cantitate (care nu este termen, dar contribuie la formarea unui termen) diferențiala ei și nu în alt mod, ci după algoritmul prescris mai sus... Este, de asemenea, evident că metoda noastră domină liniile transcendente care nu se pot reduce la calculul algebric sau care nu sînt de un grad determinat, și aceasta este în general valabil fără ipoteze speciale, nu totdeauna potrivite. Trebuie stabilit o dată pentru totdeauna că a găsi o tangentă echivalează cu construirea unei drepte care unește două puncte de pe curbă apropiate infinit de mult sau cu construirea unei laturi prelungite a poligonului cu o infinitate de vîrfuri, poligon care pentru noi este tot una cu curba. Acea distanță infinit de mică se poate exprima însă totdeauna printr-o diferențială cunoscută oarecare, ca dv, sau printr-o relație față de aceasta, adică printr-o tangentă anumită cunoscută...

Din numeroasele însemnări ale lui *Leibniz* asupra calculului diferențial și integral extragem una care se ocupă cu justificarea principială a noului calcul, firește, controversat la început. În ea apare motivul atît de caracteristic de altfel pentru *Leibniz* al analogiei formale, aici în legătură cu calculul algebric cunoscut de multă vreme.

Justificarea calculului infinitezimal prin calculul algebric obișnuit (cf. fig. 48)

Două drepte AX și EY se pot intersecta în punctul C; să se ducă din punctele E și Y două drepte EA și YX perpendicular pe AX. Notăm ACc, AEe, AXx, și XYy. Atunci, din cauză că triunghiurile CAE și CXY sînt asemenea, avem proporția $x - c : y = c : e$. Dacă dreapta EY se apropie din ce în ce mai mult de punctul A, formînd totuși în punctul variabil C totdeauna același unghi cu AX, atunci evident segmentele c și e devin din ce în ce mai mici, totuși raportul lor va rămîne neschimbat. Vom presupune că unghiurile nu sînt egale, deci că unghiul respectiv nu este egal cu 45°.

Să luăm acum cazul că dreapta EY trece în sfîrşit prin punctul A, atunci C şi E, evident, vor coincide în acest punct, deci dreptele AC şi AE sau c şi e vor dispărea. Proporţia sau ecuaţia $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ se transformă atunci în $\frac{x}{y} = \frac{c}{e} \cdot$ În acest caz, presupunînd că şi el se supune regulii generale, vom avea $x - c = x$. Totuşi, însă, c şi e nu vor fi ,,nule'' în sens absolut, pentru că ele păstrează una faţă de alta raportul $CX:XY$, sau, cu alte cuvinte, raportul dintre sinusul lui 90°, sau rază, şi tangenta unghiului în C, unghi pe care noi l-am presupus constant atunci cînd EY se apropia de A. Într-adevăr, pentru cazul cînd punctele C, E, A ar coincide dacă c şi e ar fi în acest calcul nule în sens absolut, atunci ele ar fi egale, căci o nulă are aceeaşi valoare ca oricare altă nulă, iar din ecuaţia sau proporţia $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ am obţine $\frac{x}{y} = \frac{0}{0} = 1$, adică şi x ar fi egal cu y, ceea ce este absurd, întrucît prin ipoteză unghiul n-ar trebui să fie egal cu 45°. Deci cantităţile c şi e se calculează în acest calcul algebric numai comparativ în raport cu x şi y ca nule, totuşi între ele există un raport algebric şi sînt tratate ca infinitezimale, aşa cum sînt elementele pe care le considerăm în calculul nostru diferenţial la coordonatele curbelor, adică nişte creşteri sau descreşteri momentane. Astfel, se găsesc încă în calculul algebrei obişnuite urme de cal-

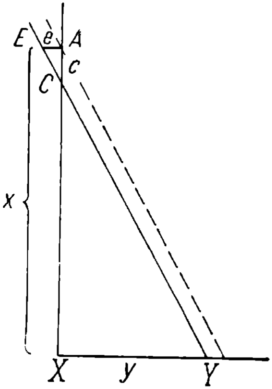


Fig. 48

cul transcendent al diferențelor, precum și aceleași particularități care șochează pe unii savanți. Însuși calculul algebric nu se poate dispensa de ele, dacă vrea să-și păstreze avantajele sale, dintre care cel mai important este generalitatea sa, care-i permite să cuprindă toate cazurile, chiar și pe acelea în care anumite drepte date dispar.

Fragmentul următor, de asemenea, se ocupă cu justificarea calculului, de astă dată prin respingerea unei neînțelegeri care pare să fi izvorît din înclinarea lui *Leibniz* pentru expunerea uneori populară, și de aceea nepreciză, a descoperirilor sale.

Din schimbul de scrisori dintre Leibniz și Varignon

Varignon către Leibniz

Paris, 2 nov. 1701

... Domnul abate *Galloys*, care de fapt stă în dosul tuturor acestor lucruri, răspîndește aici știrea că dv. ați fi declarat că prin „diferențială" sau „infinit mic" înțelegeți numai o cantitate care deși foarte mică este totuși constantă și determinată, așa cum ar fi, de pildă, Pămîntul față de sfera cerească sau grăuntele de nisip în raport cu Pămîntul; în timp ce eu am considerat infinitul mic sau diferențiala unei cantități acel lucru în care ea este inepuizabilă. Așadar, eu am numit infinit sau indefinit tot ce este inepuizabil; dimpotrivă, *infinit* sau indefinit de mic — în raport cu o cantitate dată — acel lucru în care aceasta este inepuizabilă. De aici am tras concluzia că în calculul diferențial sînt absolut echivalente expresiile: infinit, indefinit, cantitativ, inepuizabil, mai mare decît orice cantitate care se poate preciza, indeterminabil de mare, precum și denumirile: infinit sau indefinit de mic, mai mic decît orice mărime care se poate preciza, indeterminabil de mic. Asupra acestui lucru îmi permit să cer aprecierea dv.; pentru a mă putea opune adversarilor acestui calcul, adversari care abuzează de numele dumneavoastră pentru a înșela proștii și ignoranții...

Hanovra, 2 febr. 1702

... intenția mea a fost totuși să arăt că nu este nevoie să facem ca analiza matematică să depindă de dispute metafizice, deci că nu este nevoie să afirmăm că există în natură linii care sînt, în raport cu cele obișnuite ale noastre, riguros infinit de mici, nici că există astfel de linii care deși sînt de un număr infinit de ori mai mari decît cele obișnuite, totuși sînt mărginite. Acest lucru eu trebuia să-l subliniez cu atît mai mult cu cît infinitul în sens riguros își are izvorul — după părerea mea — în nemărginit, și eu fără acest ultim concept nu pot găsi nici o bază adecvată pentru a-l distinge de finit. De aceea, pentru a evita aceste controverse subtile, deoarece doream să fac cît mai accesibile considerațiile mele, m-am mulțumit să explic infinitul prin incomparabil, adică să presupun cantități care sînt incomparabil mai mari sau mai mici decît ale noastre. Căci în acest mod se obțin oricît de multe grade de mărimi incomparabile, dacă un element incomparabil mai mic se poate neglija la calcul, atunci cînd este vorba de stabilirea unuia care este incomparabil mai mare. Astfel, de pildă, o părticică de materie magnetică care pătrunde prin sticlă nu este comparabilă cu un grăunte de nisip, acesta, la rîndul său, nu este comparabil cu globul pămîntesc care, la rîndul său, nu este comparabil cu sfera cerească. De aceea, mai de mult, eu am prezentat în *Acta Eruditorum* cîteva propoziții ajutătoare pentru calculul cu cantități incomparabile, propoziții care se pot aplica atît în cazul infinitului în sens strict cît și în cazul mărimilor care sînt măsurate pe altele, dar nu sînt luate în considerație.

Cu toate acestea, trebuie avut în vedere că mărimile incomparabil de mici, luate chiar în sensul lor obișnuit, nu sînt cîtuși de puțin constante și determinate, încît ele mai degrabă joacă în considerațiile geometrice același rol ca infiniții mici în sensul strict, întrucît pot fi luate oricît de mici vrem. Dacă însă un adversar contestă corectitudinea propozițiilor noastre, calculul nostru arată că eroarea este mai neînsemnată decît orice mărime care s-ar putea preciza, căci stă în puterea noastră de a micșora suficient în acest scop ceea ce este incomparabil de mic, care poate fi presupus oricît de mic vrem. Asta ar putea fi, desigur, ceea ce dumneavoastră înțelegeți prin inepuizabil, și fără îndoială aici se află demonstrația riguroasă a calculului nostru infinitezimal. Superioritatea lui constă în faptul că el dă, nemijlocit și la moment și într-un fel care pune în evidență sursa adevărată a descoperirii, tocmai acel lucru pe care cei vechi, de pildă *Arhimede*, îl obțineau pe căi ocolite cu ajutorul demonstrației indirecte. În cazuri complicate, ei nu puteau totuși să ajungă la soluția corectă din cauza lipsei unui astfel de calcul, cu toate că fundamentul descoperirii le era cunoscut. Așadar, liniile infinite și infinit de mici — chiar dacă nu le admitem în metafizica riguroasă și ca lucruri reale — ne pot totuși folosi, fără îndoială, ca noțiuni ideale prin care se prescurtează calculul, la fel cum se procedează cu așa-numitele rădăcini imaginare din analiza obișnuită, ca de pildă $\sqrt{-2}$. Chiar dacă acestea pot fi denumite și imaginare, ele sînt totuși utile și cîteodată chiar indispensabile pentru a exprima în mod analitic mărimi reale: așa, de pildă, fără ajutorul lor, este imposibil să dăm expresia analitică a unei drepte care împarte un unghi dat în trei părți egale. Tot astfel, nu s-ar putea expune calculul nostru pentru curbele transcendente fără a vorbi de diferențe care sînt pe cale să dispară; cu ocazia aceasta se poate introduce definitiv conceptul de incomparabil de mic, în loc de a vorbi mereu de mărimi capabile de mișcare nelimitată. În același mod se pot imagina mai mult de trei dimensiuni și chiar puteri, ai căror exponenți nu sînt numere obișnuite: totul pentru a desemna și a expune concepte care servesc calculului și care își au baza în realități.

Nu trebuie totuși să se creadă că prin această explicație se degradează știința infinitului și se reduce la ficțiuni, căci se conservă totdeauna — ca să mă exprim scolastic — un infinit sincategorematic; așa, de pildă, este totdeauna adevărat că 2 este egal cu $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$, adică egal cu o serie infinită care conține în ea toate fracțiile, al căror numărător este 1 și ai căror numitori cresc în progresie geometrică. Totuși, în această serie se aplică numai numere obișnuite și nu apare niciodată o fracție infinit de mică al cărei numitor ar fi un număr infinit. Chiar rădăcinile imaginare își au fundamentul lor in re. Cînd eu, de pildă, am făcut atent pe defunctul domn Huyghens că $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ este egal cu $\sqrt{6}$, el a găsit acest fapt atît de misterios, încît mi-a răspuns că aici se află ceva de neconceput pentru noi. Tot astfel, se poate spune că infinitul și infinitul mic sînt așa de puternic fundamentate, încît toate rezultatele din geometrie, ba chiar toate rezultatele din natură se comportă ca și cum ambele ar fi realități perfecte. Pentru demonstrație servește nu numai analiza noastră geometrică a curbelor transcendente ci și legea continuității, găsită de mine, conform căreia repausul poate fi privit ca o mișcare infinit de mică adică echivalentă cu un subgen al opusului său, suprapunerea a două puncte ca o distanță infinit de mică între ele, egalitatea ca un caz limită al inegalității etc. Am explicat mai înainte această lege domnului *Bayle* în *Nouvelles de la République des Lettres* și am aplicat-o pentru verificarea legilor mișcării date de *Descartes* și *P. Malebranche* — de atunci însă am dedus din a doua ediție, apărută ulterior, a regulilor acestui părinte, că totuși nu se examinase suficient întreaga sa importanță. În general, se poate spune că continuitatea este ceva ideal și că nu există nimic în natură care să aibă părți perfect egale ca formă; de aceea însă, și realul este perfect dominat de ideal și abstract; regulile finitului își mențin valabilitatea în infinit, ca și cum ar exista atomi — adică elemente ale naturii de mărime fixă dată —, deși nu acesta este cazul din cauza împărțirii reale, neîngrădite, a materiei, și invers, regulile infinitului sînt valabile pentru finit, ca și cum ar exista infiniți mici metafizici, deși în realitate nu avem nevoie de ei și împărțirea materiei nu ajunge niciodată la astfel de particule infinit de mici. Căci totul este subordonat puterii rațiunii și, în caz contrar, nu ar exista nici știință, nici lege, ceea ce ar contrazice natura principiului suprem.

CAPITOLUL IV

MATEMATICA CRITICĂ A SECOLULUI AL XIX-LEA

SECȚIUNEA I

BAZELE GEOMETRIEI

Cercetarea actuală a fundamentelor își are originea în problemele puse de fundamentarea geometriei. *Euclid* fundamentase în *Elementele* sale geometria după obiect pe postulate și axiome, chiar dacă acestea apăreau în parte în formă de definiții (pentru cerc I, def. 15; pentru raport V, def. 4). Desigur, această axiomatică nu era completă; lipsesc, de pildă, axiomele de ordonare; chiar punctele de intersecție întîlnite la cerc nu sînt totdeauna asigurate în mod expres (I, 1, 12, 22). Demonstrația primei propoziții de congruență (I, 4) prin suprapunere este greu să fie recunoscută ca atare. (Ea nu conține nici măcar o aluzie la axioma 8.) Totuși, postulatele și axiomele menționate apăreau evidente, afară de-al cincilea postulat, potrivit căruia două drepte convergente se taie totdeauna. Acesta a stat sub semnul îndoielii chiar în antichitate și s-au făcut eforturi de a-l deduce din celelalte supoziții ale lui Euclid sau măcar de a pune în locul lui un postulat mai evident.

Îndeosebi în acest moment a apărut problematica fundamentelor geometriei. Un document în acest sens sînt observațiile privitoare la postulatul al cincilea făcute de *Proclos* în comentariul asupra lui Euclid (pp. 191, 16—193, 9). El arată că și *Geminos* a observat că ar exista linii convergente (ca hiperbola sau concoida și asimptotele lor) care se apropie una de alta infinit de mult, fără ca să se taie totuși vreodată.

1. Proclos despre postulatul al cincilea al „Elementelor“ lui Euclid

5. Se cere: *dacă o dreaptă taie alte două drepte și dacă, totodată, unghiurile interne situate de aceeași parte sînt mai mici decît două unghiuri drepte, atunci dreptele, dacă sînt prelungite la infinit, trebuie să se taie de acea parte unde se află unghiurile care sînt mai mici decît două unghiuri drepte.*

Această propoziție trebuie eliminată complet din rîndul postulatelor; căci este o teoremă cu multe dificultăți, pe care *Ptolemeu* și le-a propus să le rezolve într-o carte. Pentru demonstrarea sa este nevoie de multe definiții și de diferite alte teoreme, iar reciproca sa este demonstrată ca teoremă de însuși *Euclid*. Poate că unii se lasă înșelați și ar vrea să introducă și această propoziție între postulate, întrucît prin micșorarea celor două unghiuri drepte se ajunge imediat la convingerea că ambele drepte au aceeași tendință și se întîlnesc împreună. Pe bună dreptate *Geminos* le-a ripostat cu afirmația că chiar corifeii științei noastre ne-au învățat să nu dăm nici o importanță la simple reprezentări intuitive plauzibile atunci cînd ne însușim propoziții geometrice ... Prin urmare, și în cazul nostru, atunci cînd cele două unghiuri drepte se micșorează, tendința de apropiere a dreptelor este reală și necesară; faptul că ele mai departe, prin prelungire, se vor intersecta la un moment dat este numai ceva probabil, nu necesar, dacă nu demonstrăm că acest lucru se întîmplă într-adevăr cu dreptele. Căci faptul că există anumite linii care se apropie la infinit una de alta, dar nu coincid niciodată, poate suna neverosimil, ba chiar absurd; cu toate acestea, este un fapt care a fost stabilit la alte feluri de linii. Oare n-ar fi posibil să se întîmple și la drepte ceea ce se întîmplă la acele linii? Căci pînă cînd vom fi lămurit definitiv problema printr-o demonstrație, imaginația noastră va oscila din cauza lucrurilor stabilite pentru celelalte linii. Dacă însă și temeiurile care ar pleda contra intersectării fac o puternică impresie, cum am putea noi să nu excludem din ipoteza noastră ceea ce este numai probabil și nefundat?

Într-un alt loc din comentariul asupra lui *Euclid* se găsește o primă anticipare a geometriei hiperbolice neeuclidiene a lui *Gauss*, *Bolyai*, *Lobacevski*, căci se examinează posibilitatea ca două drepte cu convergență foarte mică să rămînă pînă la o anumită limită asimptotice, în timp ce dreptele care sînt cu o convergență numai cu puțin mai puternică se intersectează.

Asupra propoziției I, 29 ... Aici mai avem încă de arătat că aceia care afirmă fără rezerve că dreptele prelungite dinspre partea unde se formează unghiuri mai mici decît două unghiuri drepte nu se întîlnesc merg cu distrugerea mai departe decît aveau intenția ...

... Că din contră, este clar că anumite drepte prelungite dinspre partea unde se formează unghiuri mai mici decît două unghiuri drepte se întîlnesc, dacă cercetările ar putea dovedi acest lucru pentru toate. Căci cineva ar putea afirma că întrucît micşorarea celor două unghiuri drepte este nelimitată, dreptele rămîn asimptote pînă la cutare grad de micşorare şi că, dimpotrivă, la o mişcare şi mai mică ele s-ar întîlni...

2. Cum deduce John Wallis postulatul al cincilea din existența figurilor asemenea

Atît în antichitate cît și mai tîrziu s-au făcut diverse încercări de a demonstra postulatul al cincilea, toate fără succes. Căci toate aceste demonstrații aveau la bază (în cazul că nu se comiteau greşeli de raționament) o supoziție auxiliară, ascunsă sau explicită, echivalentă cu postulatul lui Euclid. Adesea s-a încercat să se rezolve problema dîndu-se definiția paralelelor altfel decît la *Euclid* (în *Elemente,* I, def. 23, se spune că drepte paralele sînt acelea care, fiind situate într-un plan, nu se taie oricît de mult ar fi prelungite în ambele direcții) : de pildă, ca drepte echidistante sau ca drepte de aceeași direcție. Am merge prea departe dacă am face bilanțul tuturor acestor încercări, de altfel zadarnice.

În secolul al XVII-lea *John Wallis* (1616—1703) a avut ideea de a înlocui al cincilea postulat prin postulatul existenței figurilor asemenea — un postulat care ar putea fi considerat mai evident decît al lui Euclid.

John Wallis, *Demonstrația postulatului al cincilea al lui Euclid* (expusă în public la Oxford, la 11, VII, 1663).

VIII. În sfîrşit, presupunînd cunoscute teoria rapoartelor, precum şi conceptul de figuri asemenea, voi considera ca principiu :

> Pentru orice figură există totdeauna o altă figură asemenea cu ea de o mărime oarecare.

Aceasta se pare că decurge din natura rapoartelor de mărime (căci mărimile se pot diviza și mări în mod nelimitat), anume că orice figură se poate micșora sau mări nelimitat, în timp ce forma și-o păstrează.

De fapt, toți geometrii fac această ipoteză (fără a o exprima textual sau poate chiar fără a o observa) ; printre ei este și *Euclid.* Căci dacă el postulează că *cercul se poate descrie dintr-un centru dat și cu o rază dată,* el presupune că există un cerc de mărime oarecare și cu o rază arbitrar de mare și, dacă presupune că ceva este posibil, atunci el postulează că se poate realiza. Desigur, nu ar fi de loc ușor să postulăm că ar trebui să se poată desena (fără cunoștințele preliminare necesare), după o proporție dată, pentru fiecare figură una asemenea. Se poate însă presupune tot așa de bine, ca și pentru cerc, că se poate efectua construcția unei figuri asemenea cu orice altă figură. Căci cauza pentru care cercul permite să fie continuu micșorat sau mărit, după cum voim noi, fără să-i modificăm forma, nu constă într-o proprietate pe care ar poseda-o el înaintea altor figuri, ci din cauza proprietăților mărimilor continue pe care cercul le are în comun cu celelalte figuri. În consecință, se poate, de asemenea, presupune că și pentru acestea este posibil o mărire sau micșorare continuă, fără ca forma să se schimbe.

. . . .

IX. Cu ajutorul acestei propoziții auxiliare eu demonstrez în felul următor propoziția propriu-zisă, care se enunță astfel:

> Dacă două drepte sînt tăiate de o a treia și unghiurile interne de aceeași parte a secantei sînt împreună mai mici decît două unghiuri drepte, atunci dreptele, prelungite la infinit, se întîlnesc de acea parte unde sînt situate cele două unghiuri, care împreună sînt mai mici decît două unghiuri drepte[1].

3. „Euclid curățat de orice pată“ de Girolamo Saccheri

O nouă idee apare în teoria paralelelor în Occident, mai întîi prin *Girolamo Saccheri* (1667—1733), care în scrierea sa, intitulată *Euclid curățat de orice pată* (1733), examinează, pe lîngă postulatul lui *Euclid*, încă două posibilități, pe care apoi se străduiește să le respingă, astfel încît să mai rămînă numai ipoteza lui *Euclid*. El numește ipoteza lui *Euclid* ipoteză a unghiului drept, pe celelalte două le numește ipoteze ale unghiului obtuz și ascuțit. Prin aceasta, el vrea să spună că într-un patrulater construit pe o bază orizontală pe care sînt ridicate două laturi perpendiculare, egale ca lungime, celelalte două unghiuri (care din motive de simetrie trebuie să fie egale între ele), dacă nu sînt drepte (ca la *Euclid*), trebuie să fie sau obtuze, sau ascuțite. Aceste două posibilități sînt urmărite apoi de el în celelalte consecințe.

Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus.*

---

[1] Demonstrația lui Wallis se află la Observația de la p. 446.

În locul unui sumar, cred că trebuie să adaug următoarele: În teoremele I și II ale primei cărți sînt expuse două principii, cu ajutorul cărora se demonstrează în III și IV că unghiurile interne formate de la dreptele care unesc capetele perpendicularelor egale, ridicate de aceeași parte (în același plan), în două puncte ale altei drepte, ale bazei, sînt nu numai egale între ele dar, în afară de aceasta, sînt sau drepte, sau obtuze, sau ascuțite, după cum acea dreaptă de unire este egală sau mai mică, sau mai mare decît baza, și reciproc.

2. Plecînd de aici, se capătă imboldul de a distinge trei ipoteze diferite, mai întîi aceea a unghiului drept, în al doilea rînd aceea a unghiului obtuz și în al treilea rînd a unghiului ascuțit. În teoremele V, VI, și VII se demonstrează că fiecare dintre aceste ipoteze este totdeauna singura adevărată îndată ce se dovedește adevărată într-un caz particular oarecare.

3. După inserarea altor trei teoreme indispensabile, în teoremele XI, XII și XIII se demonstrează valabilitatea generală a cunoscutei axiome pentru cazul cînd numai primele două ipoteze, a unghiului drept și a unghiului obtuz, sînt luate în considerație și, în sfîrșit, în teorema XIV se demonstrează totala falsitate a ipotezei unghiului obtuz. Și de acum înainte începe o luptă îndelungată împotriva ipotezei unghiului ascuțit, singura care se mai opune adevărului acelei axiome.

4. De aceea, se demonstrează în teoremele XV și XVI că, succesiv, ipoteza unghiului drept sau aceea a celui obtuz sau aceea a celui ascuțit depinde de un triunghi rectiliniu oarecare, ale cărui unghiuri sînt împreună egale cu, respectiv, două unghiuri drepte sau sînt mai mari sau mai mici decît două unghiuri drepte și, de asemenea, depinde de un patrulater rectiliniu oarecare, ale cărui unghiuri sînt împreună egale cu, respectiv, patru unghiuri drepte sau sînt mai mari sau mai mici decît patru unghiuri drepte.

7. Pînă la sfîrșitul primei părți din această carte mai rămîn încă 12 teoreme. Din cauză că enunțul fiecăreia în parte este prea complicat, nu le mai arăt, ci spun numai că, în sfîrșit, acolo ipoteza recalcitrantă a unghiului ascuțit este demascată ca un neadevăr evident, căci ea ar trebui să admită două linii drepte care ar avea în același plan o perpendiculară comună în același punct. Demonstrația că acest lucru este contra naturii liniei drepte se bazează pe cinci teoreme ajutătoare, în care sînt conținute cele cinci axiome principale ale geometriei, referitoare la linia dreaptă și la cerc, împreună cu postulatele respective.

Saccheri, reușește să respingă ipoteza unghiului obtuz, desigur admițînd tacit lungimea infinită a dreptelor. Dimpotrivă, demonstrația sa privitoare la imposibilitatea ipotezei unghiului ascuțit nu a avut succes. Însă prin faptul că procedeul său îl silește să urmărească destul de departe consecințele ambelor ipoteze, el ajunge la o serie de propoziții ale geometriei numită mai tîrziu „neeuclidiană".

Un alt progres esențial îl constituie tratatul lui *Johann Heinrich Lambert* (1728—1777), scris în 1766, evident neterminat și renegat de autor, publicat deabia în 1786 din postumele sale. Pornind de la aceleași trei ipoteze ca și *Saccheri* (formulate oarecum altfel), *Lambert* prezintă și alte consecințe, îndeosebi existența unei unități absolute de lungime, o „măsură a spațiului", în cazul ipotezelor neeuclidiene. Dar nici el nu reușește să infirme „a treia ipoteză" (aceea a unghiului ascuțit).

Însă *Lambert* și-a dat bine seama că toate ipotezele duc la o geometrie bidimensională necontradictorie, cum arată observația reprodusă în cele ce urmează Prin aceasta, el este, în fond, primul care a arătat necontradicția celor două geometrii neeuclidiene.

Johann Heinrich Lambert, *Theorie der Parallellinien* (1766) (tipărită prima oară în publicația lui *C. F. Hindenburg, Magazin fűr reine und angewandte Mathematik fűr 1786*, partea a doua).

§ 82 ... Mie mi se pare curios că a doua ipoteză are loc atunci cînd în loc de triunghiuri plane se iau triunghiuri sferice, pentru că la acestea, pe de o parte, suma unghiurilor este mai mare ca 180° și, pe de altă parte, excesul este proporțional cu aria triunghiului.

Și mai curios mi se pare faptul că ceea ce spun aici despre triunghiuri sferice se poate arăta fără a avea în vedere dificultatea liniilor paralele și nu presupune nici un alt principiu decît faptul că fiecare suprafață plană care trece prin centrul sferei împarte sfera în două părți egale.

Din acestea ar trebui aproape să trag concluzia că a treia ipoteză apare la o suprafață sferică imaginară. Cel puțin trebuie să existe totdeauna ceva care face ca de multă vreme această ipoteză, în cazul suprafețelor plane, să nu poată fi infirmată atît de ușor ca în cazul ipotezei a doua.

În ceea ce privește geometria pe suprafața unei sfere imaginare, aici este vorba, evident, de un fel de trigonometrie care tratează despre triunghiuri „sferice" cu laturi pur imaginare, dar cu unghiuri reale, așa cum se obțin dacă se consideră raza sferei pur imaginară. Laturile triunghiului sferic a, b, c devin atunci ai, bi, ci și funcția trigonometrică $\cos a$ se transformă în „funcția hiperbolică" $\operatorname{ch} a = \cos (ai) = \frac{1}{2} (e^a + e^{-a})$, în timp ce $\cos a = \frac{1}{2} (e^{ia} + e^{-ia})$. În vreme ce în trigonometria sferică aria triunghiului este $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, aria lui pe „suprafața sferei imaginare" este $r^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$, ceea ce rezultă din înlocuirea lui r din expresia anterioară prin $r\sqrt{-1}$.

Este foarte probabil că Lambert cunoștea toate aceste corelații, deoarece chiar în epoca redactării *Teoriei liniilor paralele* s-a ocupat amănunțit de valorile funcțiilor trigonometrice pentru argumentele pur imaginare, și în 1767 a citit la Academia din Berlin lucrarea referitor la acestea: *Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques.*

În afară de teoria liniilor paralele, lucrarea lui *Lambert* conține cîteva considerații generale foarte interesante asupra bazelor geometriei din punct de vedere metodic. *Lambert* vorbește aici cu multă claritate despre natura logică a problemei. În al doilea alineat al citatului care urmează, el ajunge la o formulare care are o rezonanță cu totul modernă: ar trebui „să se facă abstracție de reprezentarea lucrului" iar demonstrațiile să se facă „pur simbolic". El compară postulatele lui *Euclid* cu un sistem de ecuații algebrice cu mai multe necunoscute, care (cum am spune astăzi) sînt prin aceasta „implicit definite". El cere deci un fel de deducție abstractă pur logică în geometrie, în care considerarea figurilor intervine numai ca mijloc euristic fără însemnătate decisivă.

Acest punct de vedere a fost atins din nou de-abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea de către *M. Pasch* (1882) și *D. Hilbert* (1899).

Johann Heinrich Lambert, *Teoria liniilor paralele.*

§ 11. Aș putea să-l consider valabil și, trecînd mai departe, observ că în legătură cu dificultățile principiului al 11-lea al lui Euclid se pune numai întrebarea dacă acest principiu ar putea fi dedus în mod consecvent din postulatele lui Euclid, folosind și celelalte principii ale sale. Sau, în caz că acestea nu ar fi suficiente, dacă ar putea fi prezentate alte postulate sau principii, sau ambele, care ar avea aceeași evidență ca și cele ale lui Euclid și din care s-ar putea deduce al 11-lea principiu al său.

În privința primei părți a întrebării, putem face abstracție de tot ceea ce am numit mai înainte reprezentarea lucrului. Și întrucît postulatele lui Euclid și celelalte principii sînt exprimate o dată prin cuvinte, atunci este posibil şi trebuie să se ceară ca nicăieri să nu ne sprijinim în demonstraţie pe lucrul însuşi, ci să înfăţişăm demonstraţia într-un fel cu totul simbolic, dacă este posibil. În acest scop, postulatele lui Euclid sînt oarecum ca tot atîtea ecuaţii algebrice pe care le avem în faţă şi din care x, y, z etc. trebuie aflate, fără ca să ne mai uităm înapoi la lucrul însuşi. Dar fiindcă ele nu sînt întru totul astfel de formule, negreşit că putem admite desenul unei figuri ca un fir conducător pentru a efectua demonstraţia.

Dimpotrivă, în ce priveşte cealaltă parte a întrebării, ar fi absurd dacă am voi să interzicem în acest caz considerarea şi reprezentarea lucrului şi dacă am pretinde că noile postulate şi principii ar trebui găsite fără să ne gîndim la lucru şi oarecum spontan. Însă nici nu văd cum am fi mai drepţi cu *Euclid*, dacă respingem principiul său, fără a ne pune întrebarea în acestă privinţă aşa cum mi-am pus-o eu la începutul acestui paragraf. Întrucît *Euclid* include propoziţia sa între principii, prin aceasta fără îndoială că el admite aici reprezentarea lucrului; şi putem să-i acordăm credit că el, cel puţin în lipsa unei exprimări care încă şi acum urmează să fie găsită, a ales pe a sa în mod conştient.

De asemenea, nu mă îndoiesc că nici *Euclid* însuşi nu se va fi gîndit la posibilitatea de a pune al 11-lea principiu al său între teoreme. Cel puţin unele urme apar în prima carte a *Elementelor* sale, din care nu se poate desluşi clar acest lucru. Cît de uşor decurge, de exemplu, propoziţia a XVII-a a sa din propoziţia a XXXII-a, după ce aceasta este demonstrată! *Euclid* o demonstrează însă în particular pe aceea probabil pentru a arăta în ce măsură se poate determina ceva despre unghiurile unui triunghi fără a se recurge la al 11-lea principiu

5. Teoria lui Kant despre spaţiu

Immanuel Kant (1724—1804) a adoptat în cursul evoluţiei sale poziţii diferite în problema spaţiului. Scrierea sa de tinereţe *Idei despre adevărata evaluare a forţelor vii* (1747) conţine în paragrafele 9 şi 10 idei care au fost reluate de-abia la mijlocul secolului al XIX-lea de către *Grassmann* şi *Riemann*, anume conceptul de spaţiu n-dimensional şi teza unei relaţii dintre forţele dominante în spaţiu, în special a gravitaţiei, şi conceptul de structură geometrică a spaţiului, îndeosebi conceptul de număr al dimensiunilor sale.

În *Critica rațiunii pure* (ed. I, 1781, ediția a II-a, 1786), în capitolul „Estetica transcendentală", se află apoi teoria lui Kant despre spațiu ca formă a intuiției pure a simțului extern, teorie care a devenit apoi clasică.

În disertația latină *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (1770), disertație care a fost a patra lucrare a sa apărută în acest interval, găsim propoziția precaută: „Legile sensibilității vor fi legile naturii, atîta vreme cît ea poate cădea sub simțuri". (§ 15 E.) Așadar, este lăsată deschisă încă posibilitatea ca în natură să existe structuri care nu „cad sub simțuri"; pentru acestea, „legile sensibilității", cu alte cuvinte, avînd în vedere spațiul, în raport cu „simțul extern", legile geometriei euclidiene, nu ar trebui să fie valabile în mod necondiționat. Totuși, această atitudine tolerantă este complet părăsită în *Critica rațiunii pure*.

Idei despre adevărata evaluare a forțelor vii (1747)

§ 9. Este ușor de dovedit că n-ar putea exista nici spațiu, nici întindere dacă substanțele n-ar avea forță care să acționeze în afara lor. Căci fără această forță nu există conexiune, fără aceasta nu există ordine și, în sfîrșit, fără ordine nu există spațiu. Însă este ceva mai greu să ne dăm seama cum ar deriva multimea dimensiunilor spațiului din legea conform căreia această forță a substanțelor acționează în afara lor.

§ 10. Deoarece tot ce se întîmplă cu proprietățile unui lucru trebuie să se poată deduce din ceea ce conține în sine temeiul complet al lucrului însuși, de aceea și proprietățile întinderii — deci și tripla dimensiune a acesteia — se vor baza pe proprietățile forței, pe care substanțele o posedă cu privire la lucrurile cu care ele sînt unite. Forța cu care substanța acționează în unire cu altele nu poate fi gîndită fără o anumită lege, care se face evidentă în felul cum acționează. Deoarece natura legii, conform căreia substanțele acționează unele asupra altora, trebuie să determine și felul de unire și de compunere a multora dintre ele, legea prin care o colecție întreagă de substanțe (adică un spațiu) este măsurată, sau dimensiunea întinderii, va proveni din legile după care substanțele caută să se unească datorită forțelor lor esențiale.

Avînd în vedere toate acestea, eu susțin următoarele: substanțele din lumea existentă, din care noi sîntem o parte, au forțe esențiale de așa natură, încît ele își extind efectele de la sine, în unire unele cu altele, după raportul invers îndoit al distanțelor; în al doilea rînd, întregul care ia naștere, conform acestei legi, are proprietatea tridimensională: în al treilea rînd, această lege este arbitrară și Dumnezeu ar fi putut alege o altă lege, spre exemplu legea raportului invers triplu; în sfîrșit, în al patrulea rînd, dintr-o altă lege ar fi decurs și o extindere a altor proprietăți și dimensiuni. O știință a tuturor acestor feluri posibile de spațiu ar fi fără îndoială cea mai înaltă geometrie pe care ar putea s-o întreprindă un intelect limitat.

Critica rațiunii pure. Estetica transcendentală. Despre spațiu

1. Spațiul nu este un concept empiric care să fi fost scos din experiențe externe. Căci pentru ca anumite senzații să fie raportate la ceva în afara mea (adică la ceva dintr-un alt loc al spațiului decît acela în care mă aflu eu), tot astfel pentru ca să le pot reprezenta ca una în afara alteia (și alături una de alta), deci nu numai ca diferite, ci ca fiind în locuri diferite, pentru aceasta reprezentarea spațiului trebuie să existe deja la bază.

2. Spațiul este o reprezentare necesară, *a priori*, care stă la baza tuturor intuițiilor. Niciodată nu ne putem face o reprezentare despre cum ar fi dacă n-ar exista spațiul, deși ne putem foarte bine închipui că n-am întîlni în el nici un obiect. Așadar, el este considerat ca o condiție a posibilității fenomenelor și nu ca o determinare dependentă de ele, și este o reprezentare *a priori* care în mod necesar stă la baza fenomenelor exterioare.

(Analiza transcendentală a conceptului de spațiu)

Înțeleg printr-o analiză transcendentală explicarea unui concept considerat ca un principiu din care se poate pricepe posibilitatea altor cunoștințe sintetice *a priori*. În acest scop se cere: 1) ca astfel de cunoștințe să decurgă realmente din conceptul dat; 2) ca aceste cunoștințe să fie posibile numai dacă se presupune un mod de explicare dat a acestui concept.

Geometria este o știință care determină proprietățile spațiului în mod sintetic și totuși *a priori*. Ce trebuie oare să fie reprezentarea spațiului pentru ca o astfel de cunoștință despre el să fie posibilă? El trebuie să fie din capul locului intuiție; căci dintr-un simplu concept nu se pot scoate propoziții care depășesc conceptul, ceea ce totuși se întîmplă în geometrie. Dar această intuiție trebuie să se găsească în noi *a priori*, adică înaintea oricărei percepţii a unui obiect, prin urmare trebuie să fie intuiţie pură, nu empirică. Căci propoziţiile geometrice sînt toate apodictice, adică unite cu conştiinţa necesităţii lor, de pildă propoziţia că spaţiul are numai trei dimensiuni; astfel de propoziţii însă nu pot fi judecăţi empirice sau de experienţă, nici nu pot fi deduse din acestea.

Cum se poate oare găsi în minte o intuiţie externă care să premeargă chiar obiectelor şi în care conceptul acestora poate fi determinat *a priori*? Este evident că nu în alt mod decît întrucît ea îşi are sediul numai în subiect, ca însuşirea sa formală de a fi afectat de obiecte şi de a dobîndi prin aceasta o reprezentare nemijlocită a lor, adică intuiţie, deci numai ca formă a simţului extern în general.

Prin urmare, numai explicaţia noastră poate face să se înţeleagă posibilitatea geometriei ca o cunoaştere sintetică *a priori*.

6. Descoperirea geometriei neeuclidiene de către Gauss

În ciuda tuturor anticipărilor lui *Lambert*, **C. F. Gauss** (1777—1855) a fost cel dintîi care, cel puţin în scrisori, şi-a exprimat cu toată claritatea convingerea că geometria euclidiană n-ar putea fi fundamentată complet *a priori* şi că din această cauză ea n-ar poseda aceeaşi necesitate ca aritmetica.

1. *Gauss către Bessel*, la 27 ianuarie 1829.

... convingerea mea că noi nu putem fundamenta geometria complet *a priori* a devenit poate mai puternică. De altfel, multă vreme nu voi reuşi să elaborez cercetările mele foarte intense asupra acestor chestiuni, pentru a le face cunoscute în public, şi probabil că aceasta nici nu se va întîmpla vreodată în timpul vieţii mele, deoarece mă tem de gălăgia beoţienilor dacă aş vrea să-mi exprim complet opinia mea ...

2. *Bessel către Gauss*, la 10 februarie 1892.

Mi-ar părea foarte rău dacă aţi fi reţinut ,,de gălăgia beoţienilor'' de a explica opiniile dv. în privinţa geometriei. Datorită celor spuse de *Lambert* şi cuvintelor exprimate verbal de *Schweikardt*, am înţeles că geometria noastră este incompletă şi ar trebui să primească o corectare, care este ipotetică şi dispare dacă suma unghiurilor triunghiului plan este egală cu 180°.

Aceasta ar fi adevărata geometrie, cea euclidiană ar fi cea practică, cel puțin pentru figuri pe pămînt.

3. *Gauss către Bessel,* la 9 aprilie 1830.

... Am cea mai profundă convingere că știința spațiului, are pentru cunoașterea noastră *a priori* o cu totul altă poziție decît știința pură a cantităților; cunoștinței noastre despre acea știință îi lipsește total acea convingere completă despre necesitatea sa (așadar și despre adevărul ei absolut), care este caracteristică pentru cealaltă știință; trebuie să admitem cu umilință că dacă numărul este numai un produs al spiritului nostru, spațiul are și în afara spiritului nostru o realitate, căreia noi nu putem să-i prescriem *a priori* legile sale în întregime.

O încercare de demonstrare a lui *Schumacher* pentru al cincilea postulat al lui *Euclid* îi dă prilej lui *Gauss* să dea un răspuns amănunțit, în care este expusă nu numai poziția sa față de punctul discutat, ci și față de utilizarea conceptului de infinit în matematică. Mai departe, este interesantă sublinierea eliminării din geometria neeuclidiană a figurilor asemenea.

4. *Schumacher către Gauss,* Lübeck, la 25 mai 1831.

Să se prelungească arbitrar (fig. 49) laturile triunghiului rectiliniu ABC și să se ia o rază R, astfel încît $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ să fie

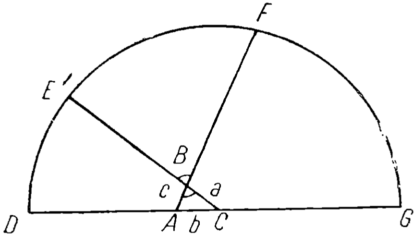


Fig. 49

mai mici decît orice cantitate dată. Cu această rază să se descrie din C semicercul $DEFG$. Pentru că în raport cu acest semicerc trebuie să considerăm a, b, c ca mărimi ce tind spre zero, deci punctele A, B se suprapun în C, acest semicerc este măsura celor trei unghiuri ale triunghiului care, prin urmare, diferă de 180° cu mai puțin decît orice mărime dată.

5. *Gauss către Schumacher*, Göttingen, la 12 iulie 1831.

... Dumneavoastră îndreptați poanta propriu-zisă imediat asupra oricărui triunghi; numai că dv. ați aplica în fond același

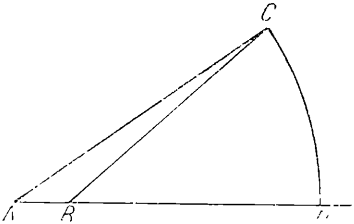


Fig. 50

raționament dacă ați aplica chestiunea mai întîi la cel mai simplu caz și ați stabili propoziția:

1. În orice triunghi care are o latură finită, dar a doua, și prin urmare și a treia, este, dimpotrivă, infinită, suma ambelor unghiuri de la acea latură este egală cu 180° (cf. fig. 50).

Demonstrație în maniera dv.: arcul CD este măsura unghiului CAD, ca și a lui CBD, deoarece la un cerc cu raza infinită o deplasare finită a centrului poate fi socotită ca nulă. Așadar, $CAD = CBD$, $CAD + CBA = CBD + CBA = 180°$.

Restul rezultă cu ușurință de la sine. Căci după această teoremă avem (fig. 51):

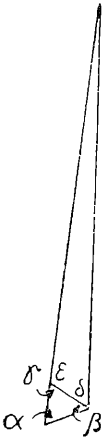


Fig. 51

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180 \\ 180 &= \varepsilon + \delta \\ \gamma + \varepsilon &= 180 \end{aligned}\right\}$$

Așadar, adunînd:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180.$$

Însă în ceea ce privește demonstrația dv. pentru (1), eu protestez mai întîi de toate împotriva folosirii unei mărimi infinite ca o mărime terminată (*vollendet*), folosire care nu este niciodată permisă în matematică. Infinitul este numai *une façon de parler*, fiind vorba propriu-zis de limite față de care anumite rapoarte se apropie oricît de mult voim, în timpr ce altor rapoarte le este permis să crească fără nici o îngrădire. În acest sens, geometria neeuclidiană nu conține absolut nimic contradictoriu, deși unii trebuie la început să considere paradoxale multe rezultate ale geometriei neeuclidiene; a le considera însă contradictorii ar fi numai o amăgire produsă de obișnuința anterioară de a considera geometria euclidiană ca riguros adevărată.

În geometria neeuclidiană nu există de loc figuri asemenea neegale, de pildă unghiurile unui triunghi echilateral nu sînt pur și simplu $\frac{2}{3}$ dintr-un unghi drept, ci diferă între ele după lungimea laturilor și pot deveni oricît de mici vrem,

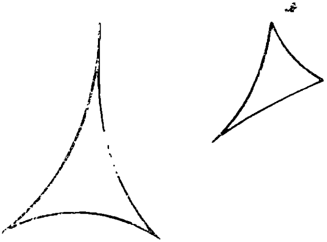


Fig. 52 a

dacă latura crește peste orice limită. De aceea, este deja ceva contradictoriu în sine dacă voim să însemnăm (*zeichnen*) un astfel de triunghi printr-unul mai mic; în fond, putem numai să-l indicăm (*bezeichnen*) (fig. 52a).

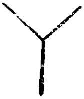


Fig. 52 b

Indicarea triunghiului infinit în acest sens ar fi pînă la urmă (fig. 52b)[1]:

În geometria euclidiană nu există nimic absolut mare, dar există desigur în cea neeuclidiană, aceasta fiind tocmai caracterul ei esențial, și aceia care nu acceptă aceasta instituie *eo ipso* întreaga geometrie euclidiană, însă, așa cum am spus, după convingerea mea aceasta este simplă amăgire.

---

[1] Gauss vrea să spună prin aceasta că unghiurile „triunghiului infinit" ar fi egale cu zero.

Pentru cazul în discuție, nu este absolut nimic contradictoriu în faptul că punctele *A*, *B* și direcția *AC* fiind date, pe cînd

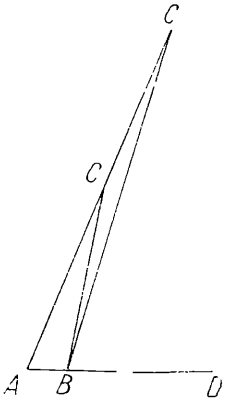


Fig. 53

C poate crește fără limită, deși astfel *DBC* se apropie necontenit de *DAC*, totuși deosebirea n-ar putea fi făcută niciodată mai mică decît o anumită diferență finită (fig. 53).

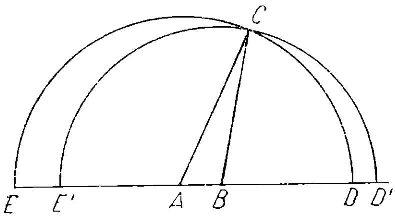


Fig. 54

Implicarea arcului *CD* de către dv. face concluzia negreșit mult mai captivantă; însă dacă voim să dezvoltăm clar ceea ce dv. numai ați sugerat, atunci ar trebui să se spună așa (fig. 54):

Avem:

$$CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$$

și AC crescînd la infinit, CD și CD', pe de o parte, și ECD și $E'CD'$, pe de altă parte, se apropie necontenit de egalitate.

În geometria neeuclidiană nu sînt ambele adevărate, dacă prin aceasta se înțelege că rapoartele lor geometricese apropie de egalitate oricît de mult voim. De fapt, în geometia neeuclidiană semiperimetrul unui cerc cu raza r este $\frac{1}{2}\pi K\left(e^{\frac{r}{K}} - e^{-\frac{r}{K}}\right)$, unde K este o constantă despre care știm prin experiență că trebuie să fie imens de mare față de tot ceea ce se poate măsura de noi. În geometria lui Euclid ea este infinită.

În limbajul figurat al infinitului ar trebui, așadar, să se spună că circumferințele a două cercuri infinite, ale căror raze diferă printr-o mărime finită, diferă chiar printr-o mărime care este față de ele într-un raport finit.

Aici nu este nimic contradictoriu dacă omul finit nu se încumetă să voiască a considera ceva infinit ca ceva dat și pe care ar urma să-l cuprindă cu intuiția sa obișnuită.

Vedeți că aici, de fapt, punctul în discuție atinge nemijlocit metafizica.

7. F.A. Taurinus intervine în favoarea spațiului euclidian ca formă unică, apriorică a simțului extern

În timp ce *Gauss* abandona fără ezitare caracterul *a priori* al geometriei, contemporanul său mai tînăr, *F. A. Taurinus* (1794—1874), în ciuda faptului că avea cunoștințe precise despre situația în matematică — în scrierea sa *Geometriae prima elementa* (Köln, 1826) el a adus contribuții la însăși dezvoltarea noii geometrii „logaritmico-sferice" — nu s-a putut decide să renunțe la forma euclidiană a spațiului ca formă pură a intuiției înnăscută *a priori* în sensul lui *Kant*. Argumentul său decisiv este că o astfel de formă *a priori* a simțului nostru extern nu poate conține nici o constantă empirică, adică una care urmează să fie determinată numai aproximativ.

F. A. Taurinus, *Teoria liniilor paralele* (Köln, 1825).

(Sistemul neeuclidian) vine în contradicție cu toată intuiția. Este adevărat că un astfel de sistem ar putea oferi în mic aceleași aparențe ca și cel euclidian. Însă, dacă reprezentarea spațiului poate fi considerată ca simplă formă a simțului extern, atunci sistemul euclidian este în mod indiscutabil cel adevărat și nu se poate admite că o experiență limitată ar putea să producă o amăgire a simțurilor (p. 86).

Se poate arăta foarte ușor că un sistem geometric în care un triunghi conține mai puțin de două unghiuri drepte nu este determinat în sine, ci necesită o mărime specială de determinare sau o constantă. De aici se deduce imediat că în mod *a priori* pentru noi nu există o altă geometrie decît cea euclidiană, deoarece o astfel de constantă poate fi luată absolut arbitrar (pp. 89–90).

Ideea unei geometrii în care suma unghiurilor triunghiului ar fi mai mică decît două unghiuri drepte mi-a fost împărtășită încă de acum patru ani; eu însă nu m-am putut acomoda cu această idee și astăzi sînt mult mai puțin în stare s-o fac. Dacă ar exista un astfel de sistem, atunci dintre sistemele nenumărat de multe posibile numai unul ar fi cel adevărat: însă mi se pare mult mai probabil ca toate aceste sisteme să existe concomitent, așa cum există nenumărate geometrii sferice diferite, pentru că se pot imagina sfere cu nenumărate raze diferite (p. 91).

Propoziția la care se ia în considerație cel mai mult proprietatea liniei drepte (aceea de a fi determinată univoc de două puncte), a cărei demonstrație, din acestă cauză, dă întregii geometrii forma specifică, este propoziția despre suma unghiurilor conținute într-o figură plană rectilinie. Metodica cea mai temeinică de a face demonstrația este incontestabil aceea care dezvoltă suficient cele trei sisteme geometrice posibile, cu totul diferite, pentru ca să descopere concordanța sau contradicția cu axioma liniei drepte. O geometrie în care triunghiul conține mai mult de două unghiuri drepte duce la o contradicție evidentă cu axioma liniei drepte; căci în orice sistem de acest fel liniile drepte s-ar tăia în două puncte, fără să se suprapună.

În cazul invers, se pare că se ridică la prima vedere o mare dificultate. Totuși, adevărul nu se află, după părerea mea, nicidecum atît de departe cum ai fi înclinat să crezi și cum eu însumi eram convins la început. Orice geometrie în care se admite că suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte nu conține în ea însăși — ca noțiune — nici o contradicție cu axioma liniei drepte și îmi retrag bănuiala că s-ar putea găsi o astfel de contradicție. Aceasta este o consecință necesară a axiomei conform căreia între două puncte ar fi posibilă numai o linie dreaptă, axiomă care desigur nu exclude o astfel de geometrie. Contradicția trebuie căutată în faptul că există nu un sistem, ci o mulțime infinită de sisteme, fiecare avînd pretenții egale la valabilitate, precum și în faptul că din această cauză între două puncte din spațiu ar exista infinit de multe linii drepte, pentru că totuși, conform axiomei noastre, ar trebui să existe numai o singură linie perfect determinată de către două puncte.

Cu toate acestea, un sistem de acest fel se poate dezvolta probabil complet și oferă totdeauna un obiect interesant pentru cercetare. Am bănuiala că el nu va fi chiar fără însemnătate în matematică (pp. 95—97).

8. B. Riemann despre ipotezele care stau la baza geometriei

Dezvoltarea ulterioară a geometriei neeuclidiene de către *János Bolyai* (1802—1860) și *N. I. Lobacevski* (1793—1856) nu poate fi înfățișată aici, întrucît ne interesează numai pozițiile de principiu. Dimpotrivă, geniala disertație de abilitare din 1854 a lui **Bernhard Riemann** (1826—1866) trebuie prezentată în părțile sale cele mai importante, deoarece aici întreaga formulare a problemei se lărgește imens prin studiul analitic al unei varietăți oarecare n-dimensionale (cu care ocazie este lăsată să cadă și condiția întinderii infinite), astfel încît ea conduce la probleme cu totul noi, ale căror consecințe au apărut la lumină de-abia în epoca noastră, prin teoria relativității generale.

Să mai remarcăm și faptul că tocmai problemele care privesc „marele nemăsurabil" (cap. III, 3, începutul) nu s-au dovedit de loc „inutile pentru studiul naturii", cum spune *Riemann*. Ele joacă un rol important în cercetările cosmologice actuale din astronomie.

Despre ipotezele care stau la baza geometriei.

Planul studiului

Se știe că geometria presupune ca fiind date atît conceptul de spațiu cît și primele concepte fundamentale pentru construcții în spațiu. Ea dă despre ele numai definiții nominale, în timp ce determinările esențiale apar în formă de axiome. Relațiile dintre aceste presupuneri rămîn însă obscure; nu se înțelege nici dacă legătura dintre ele este necesară, și în ce măsură, nici dacă *a priori* legătura este posibilă.

De la *Euclid* pînă la *Legendre*, ca să nu numesc decît pe cel mai renumit autor modern care s-a ocupat de geometrie, această obscuritate n-a fost încă înlăturată nici de matematicienii, nici de filozofii care s-au ocupat de ea. Cauza acestei stări de lucruri a constat în faptul că noțiunea generală de mărime cu mai multe dimensiuni, între care se află și mărimile geometrice, a rămas complet neelaborată. De aceea, eu mi-am propus în primul rînd să construiesc conceptul de mărime cu mai multe dimensiuni cu ajutorul conceptelor generale de mărime. De aici, va decurge că o mărime cu mai multe dimensiuni poate să aibă mai multe relații metrice (*Massverhältnisse*) și că spațiul formează deci numai un caz particular de mărime tridimensională. Însă de aici decurge, ca o consecință necesară, că propozițiile geometriei nu se pot deduce din conceptele generale de mărime, ci că acele proprietăți prin care spațiul se deosebește de celelalte mărimi tridimensionale imaginabile pot fi scoase numai din experiență. De aici ia naștere problema de a căuta cele mai simple fapte din care se pot determina relațiile metrice ale spațiului, o problemă care prin natura sa nu este complet determinată; căci se pot indica mai multe sisteme de fapte simple, suficiente pentru determinarea relațiilor metrice ale spațiului; pentru scopul de față, cel mai important este acela pe care s-a bazat *Euclid*. Aceste fapte, ca toate faptele, nu sînt necesare, ci au numai certitudine empirică, ele sînt ipoteze; deci se poate cerceta probabilitatea lor — care în limitele observației este de altfel foarte mare — și apoi se poate judeca dacă este admisibilă extinderea lor dincolo de limitele observației, atît în direcția nemăsurabilului mare cît și în direcția nemăsurabilului mic.

I. Conceptul de mărime n-*dimensională*

Dacă la un concept ale cărui modalități de determinare (*Bestimmungsweisen*) formează o varietate (*Mannigfaltigkeit*) continuă se trece într-un anumit fel de la o modalitate de determinare la altă modalitate, atunci modalitățile de determinare parcurse formează o varietate cu o dimensiune, a cărei caracteristică esențială este că dintr-un punct o mișcare continuă este posibilă numai în două părți, înainte sau înapoi. Dacă ne închipuim că această varietate se transformă în alta complet diferită, şi anume tot într-un fel determinat, adică astfel încît fiecare punct se transformă într-un punct determinat al celeilalte, atunci toate modalităţile de determinare obţinute în acest chip formează o varietate cu două dimensiuni. În mod analog se obţine o varietate tridimensională, dacă ne imaginăm că una bidimensională se transformă într-una complet diferită într-un mod determinat, şi este uşor de văzut cum se poate continua această construcţie. Dacă în loc de a considera conceptul ca determinabil se consideră obiectul său ca variabil, această construcţie poate fi caracterizată ca o compunere a unei varietăţi de $n + 1$ dimensiuni dintr-o varietate cu n-dimensiuni şi o varietate cu o dimensiune.

II. Relaţii metrice posibile într-o varietate cu n-*dimensiuni, în ipoteza că liniile posedă lungime, independent de poziţie, deci că orice linie este măsurabilă prin oricare alta*

Determinările cantitative necesită o independenţă a mărimilor faţă de poziţie, care poate avea loc în mai multe feluri; prima ipoteză care ni se oferă, pe care o voi urmări aici, este aceea că lungimea liniilor este independentă de poziţie, deci orice linie este măsurabilă prin oricare alta. Dacă determinarea poziţiei se reduce la determinări de mărimi, deci dacă poziţia unui punct în varietatea dată cu n-dimensiuni se exprimă prin n mărimi variabile x_1, x_2, x_3 şi aşa mai departe, pînă la x_n, atunci determinarea unei linii se reduce la a da mărimile x ca funcţii de o variabilă. Problema este atunci de a găsi o expresie matematică pentru lungimea liniilor, pentru care scop mărimile x trebuie să fie considerate exprimabile în unităţi. Voi trata această problemă numai cu anumite restricţii şi mă voi limita mai întîi la acele linii în care rapoartele dintre mărimile dx — variaţiile respective ale mărimilor x — variază continuu... În al doilea rînd, presupun că lungimea elementului de linie, făcînd abstracţie de mărimile de ordinul doi, rămîne neschimbată, dacă toate punctele acestuia suferă aceeaşi variaţie infinit de mică a poziţiei. În aceste ipoteze, elementul de linie va putea fi o funcţie omogenă oarecare de gradul întîi de mărimile dx, care rămîne neschimbată dacă toate mărimile dx îşi schimbă semnul, şi în care constantele arbitrare sînt funcţii continue de mărimile x ... Prin urmare, ds = rădăcina pătrată a unei funcții de gradul doi omogene întregi, totdeauna pozitive de mărimile dx, în care coeficienții sînt funcții continue de mărimile x. Pentru spațiu, în cazul că poziția punctelor se exprimă prin coordonate rectangulare, devine $ds = \sqrt{\Sigma(dx)^2}$ ... Varietățile în care elementul de linie se poate aduce, ca în plan și în spațiu, la forma $\sqrt{\Sigma(dx)^2}$ constituie din această pricină numai un caz particular al varietăților care urmează să fie studiate aici : ele merită un nume special și deci voi numi aceste varietăți, în care pătratul elementului de linie se poate exprima ca suma pătratelor diferențialelor totale, varietăți plane.

Către acest țel se poate urma o cale cu totul analogă și la varietățile în care elementul de linie este exprimat și printr-o expresie mai puțin simplă, de pildă rădăcina de ordinul patru dintr-o expresie diferențială de gradul patru. Atunci elementul de linie, pentru a vorbi în general, nu s-ar mai putea aduce la forma unei rădăcini pătrate dintr-o sumă de pătrate de expresii diferențiale și deci în expresia pătratului elementului de linie abaterea de la planaritate (*Ebenheit*) ar fi o mărime infinit mică de dimensiunea a doua, pe cînd la acele varietăți ea era de dimensiunea a patra. Această particularitate a varietăților din urmă se poate, de aceea, numi planaritate în părțile cele mai mici.

În concepția suprafețelor, pe lîngă relațiile metrice interioare, în care este vorba numai de lungimea drumurilor de pe ele, intră în considerație și poziția lor față de punctele situate în afara lor. Se poate face însă abstracție de relațiile exterioare, afectînd cu ele astfel de transformări în care lungimea liniilor rămîne neschimbată pe ele, adică ni le imaginăm curbate într-un mod oarecare — fără să se lungească—, și toate suprafețele generate astfel unele din altele le considerăm de aceeași natură. Așadar, de pildă, suprafețele oarecare cilindrice sau conice se consideră echivalente cu un plan, pentru că ele se pot forma din el prin simplă curbare, în care caz relațiile metrice interne rămîn neschimbate și toate propozițiile referitoare la ele — deci întreaga planimetrie — își mențin valabilitatea ; dimpotrivă, ele sînt fundamental diferite de sferă, care nu se poate transforma într-un plan fără modificarea lungimii. Potrivit cercetărilor anterioare, relațiile metrice interne ale unei mărimi bidimensionale, cînd elementul de linie se poate exprima prin rădăcina patrată dintr-o expresie diferențială de gradul doi, așa cum se întîmplă la suprafețe, sînt caracterizate, în orice punct, prin măsura curburii. În cazul suprafețelor, acestei mărimi i se poate da semnificația intuitivă, în sensul că ea este produsul ambelor curburi ale suprafeței în acest punct sau că produsul acestora într-un triunghi infinit mic format din liniile cele mai scurte este egal cu jumătate din diferența în radiani dintre suma unghiurilor sale și două unghiuri drepte. Prima definiție ar presupune propoziția că produsul celor două raze de curbură rămîne neschimbat în cazul simplei curbări a unei suprafețe; a doua definiție ar presupune propoziția că în același loc diferența dintre suma unghiurilor unui triunghi infinit mic și două unghiuri drepte este proporțională cu aria sa. Pentru a da o semnificație concretă măsurii curburii unei varietăți cu n-dimensiuni într-un punct dat și într-o direcție dată pe o suprafață dusă prin acel punct, trebuie să plecăm de la faptul că linia cea mai scurtă care pornește de la un punct este complet determinată, dacă este dată direcția sa inițială. După aceasta, se obține o suprafață determinată dacă toate direcțiile inițiale, pornind din punctul dat și situate în elementul de linie dat, se prelungesc ca cele mai scurte linii, și această suprafață are în punctul dat o anumită măsură a curburii, care este în același timp măsura de curbură a varietății n-dimensionale în punctul dat și în direcția dată a suprafeței.

Înainte de a face o aplicație la spațiu, mai sînt necesare cîteva considerații despre varietățile plane în general, adică despre acelea în care pătratul elementului de linie se poate reprezenta prin suma pătratelor diferențialelor totale.

Într-o varietate plană n-dimensională, măsura curburii este nulă în fiecare punct, în orice direcție. Varietățile a căror măsură a curburii este peste tot nulă se pot considera ca un caz particular al acelor varietăți a căror măsură a curburii este constantă peste tot. Caracterul comun al acestor varietăți, a căror măsură a curburii este constantă, poate fi exprimat și prin aceea că figurile se pot mișca în ele fără a suferi modificări în lungime. Căci este evident că figurile nu ar putea fi mișcate în ele prin translație și rotație, dacă măsura curburii n-ar fi aceeași în fiecare punct în toate direcțiile. Pe de altă parte, relațiile metrice ale varietății sînt complet determinate prin măsura curburii; de aceea, relațiile metrice în jurul unui punct în toate direcțiile sînt exact aceleași ca și în jurul altui punct, și deci, pornind din acel punct, se pot efectua aceleași construcții, prin urmare, în varietățile cu curbură constantă se poate da figurilor orice poziție arbitrară. Relațiile metrice ale acestor varietăți depind numai de valoarea măsurii curburii.

Ca interpretare geometrică poate servi studiul suprafețelor cu măsura curburii constantă. Este ușor de văzut că suprafețele a căror măsură a curburii este pozitivă se pot totdeauna înfășura pe o sferă a cărei rază este egală cu 1, împărțit prin rădăcina măsurii curburii; însă pentru a cuprinde cu vederea toată mulțimea acestor suprafețe, să dăm uneia dintre ele forma unei sfere și celorlalte forma de suprafețe de rotație tangente la ecuatorul ei. Suprafețele cu o măsură mai mare de curbură decît această sferă vor fi atunci tangente interioare și vor căpăta o formă ca partea exterioară opusă axei a suprafeței unui inel; ele s-ar putea înfășura pe zonele suprafețelor cu rază mai mică, dar le vor înconjura mai mult decît o dată. Se vor obține suprafețe cu măsură a curburii mai mică dacă din suprafețe sferice cu rază mai mare se taie o bucată mărginită de două semicercuri mari și se alătură liniile de secțiune. Suprafața cu măsura curburii nulă va fi o suprafață cilindrică tangentă la ecuator; însă suprafețele cu măsura curburii negativă vor fi tangente la exterior acestui cilindru și formate ca partea interioară îndreptată spre axă a unui inel. Dacă ne imaginăm aceste suprafețe ca locul porțiunilor de suprafețe care se mișcă pe ele, așa cum spațiul este locul corpurilor, atunci porțiunile de suprafață se mișcă pe aceste suprafețe fără a-și modifica lungimea. Suprafețele cu măsura curburii pozitivă se pot totdeauna forma astfel încît porțiunile de suprafață pot fi mișcate arbitrar și fără a se curba, anume în formă de suprafață sferică, însă cele cu măsura curburii negativă nu. În afară de faptul că porțiunile de suprafață sînt independente de poziție, la suprafețele cu măsura curburii nulă direcția însăși este independentă de poziție, ceea ce nu se întîmplă la celelalte suprafețe.

III. Aplicație la spațiu

1

După aceste cercetări asupra determinării relațiilor metrice ale unei mărimi n-dimensionale, se pot arăta condițiile necesare și suficiente pentru determinarea relațiilor cantitative atunci cînd se presupune că liniile sînt independente de poziție și că un element de linie se poate reprezenta prin rădăcina pătrată dintr-o expresie diferențială de gradul doi, deci că părțile cele mai mici sînt plane.

Ele se pot exprima în primul rînd prin faptul că măsura curburii este nulă în fiecare punct în trei direcții de pe suprafață, și de aceea relațiile metrice ale spațiului sînt determinate atunci cînd suma unghiurilor unui triunghi este egală peste tot cu două unghiuri drepte.

În al doilea rînd, dacă presupunem, ca Euclid, că nu numai liniile, dar și corpurile există independent de poziție, urmează că măsura curburii este peste tot constantă, și atunci în toate triunghiurile suma unghiurilor este determinată dacă este determinată într-unul singur.

În sfîrșit, în al treilea rînd, în loc de a admite că lungimea liniilor este independentă de poziție și direcție, s-ar putea presupune și că lungimea și direcția lor sînt dependente de poziție. După această concepție, variațiile sau diferențele de poziție sînt mărimi complexe care se pot exprima în trei unități independente.

2

În cursul considerațiilor de pînă acum mai întîi relațiile de întindere și de domeniu s-au separat de relațiile metrice și s-a găsit că pentru aceleași relații de întindere se pot imagina diferite relații metrice; apoi s-au căutat sistemele de determinare simplă a măsurii prin care relațiile metrice ale spațiului sînt complet determinate și asupra cărora toate propozițiile respective sînt o consecință necesară; rămîne acum de discutat chestiunea în ce grad și în ce limite aceste ipoteze sînt garantate de experiență. În această privință, există o deosebire esențială între simplele relații de întindere și relațiile metrice, întrucît la cele dîntîi, unde cazurile posibile formează o varietate discretă, datele experienței, deși nu cu totul certe, nu sînt totuși inexacte, în timp ce la ultimele, unde cazurile posibile formează o varietate continuă, fiecare determinare din experiență rămîne totdeauna imprecisă, oricît de mare ar fi probabilitatea de a fi aproape exactă. Această împrejurare devine importantă atunci cînd aceste determinări empirice se extind dincolo de limitele observației în nemăsurabilul mare și nemăsurabilul mic; căci, evident, acestea din urmă pot deveni totdeauna mai neprecise dincolo de limitele observației, pe cînd primele nu.

La extinderea construcțiilor în spațiu în nemăsurabilul mare trebuie să distingem între nemărginire și infinitate; prima ține de relațiile de întindere, cealaltă, de relațiile metrice. Ideea că spațiul ar fi o varietate tridimensională nelimitată este o ipoteză care se aplică la orice concepție despre lumea exterioară potrivit căreia în fiecare moment se întregește domeniul observațiilor reale și se construiesc pozițiile posibile ale unui obiect căutat și care se confirmă cu prilejul acestor aplicații. De aceea, nemărginirea spațiului posedă o certitudine empirică mai mare decît orice altă experiență externă. De aici însă nu decurge de loc infinitatea; dacă presupunem corpurile independente de poziție, adică dacă le-am atribui o măsură a curburii constantă, spațiul ar fi, în mod necesar, mai degrabă finit, îndată ce această măsură a curburii ar avea o valoare pozitivă oricît de mică. Dacă direcțiile inițiale situate într-un element de suprafață se prelungesc în forma celor mai scurte linii, s-ar obține o suprafață nemărginită avînd măsura curburii pozitivă constantă, deci o suprafață care într-o varietate tridimensională plană ar lua forma unei suprafețe sferice și care, în consecință, este finită.

3

Problemele privitoare la nemăsurabilul mare n-au nici o utilitate pentru explicarea naturii. Altfel stau lucrurile cu problemele privind nemăsurabilul mic. Cunoașterea nexului cauzal al fenomenelor se bazează în esență pe precizia cu care urmărim aceste fenomene pînă în infinitul mic. Progresele realizate în ultimele secole în cunoașterea naturii mecanice se datorează aproape exclusiv preciziei construcției, care a devenit posibilă prin inventarea analizei infinitului și a conceptelor fundamentale simple descoperite de *Arhimede*, *Galilei* și *Newton*, de care se folosește astăzi fizica. În științele naturii însă, unde conceptele fundamentale simple pentru astfel de construcții lipsesc pînă în prezent, în vederea cunoașterii nexului cauzal fenomenele sînt urmărite în mic (din punct de vedere spațial), numai în măsura în care permite microscopul. Așadar, problemele privitoare la relațiile metrice ale spațiului în nemăsurabilul mic nu sînt lipsite de utilitate.

Dacă se presupune că toate corpurile există independent de poziție, atunci măsura curburii este peste tot constantă, și din măsurătorile astronomice rezultă că ea nu poate fi diferită de zero; în orice caz, inversul valorii sale ar trebui să fie o suprafață față de care domeniul accesibil telescoapelor noastre ar trebui să tindă spre zero. Dacă însă corpurile nu sînt independente de poziție, atunci din relațiile metrice în mare nu se pot trage concluzii asupra relațiilor din infinitul mic; apoi, în fiecare punct măsura curburii poate avea în trei direcții o valoare arbitrară cu condiția ca pentru fiecare parte măsurabilă de spațiu curbura totală să difere foarte puțin de zero; pot interveni și relații mai complicate în caz că nu se poate reprezenta, așa cum s-a presupus, elementul de linie prin rădăcina pătrată dintr-o expresie diferențială de gradul doi. Se pare însă că noțiunile empirice pe care se bazează determinările metrice în spațiu, conceptul de corp solid și de rază de lumină, își pierd valabilitatea în infinitul mic; se poate, deci, considera că relațiile metrice ale spațiului în infinitul mic nu sînt adecvate ipotezelor geometriei și ar trebui să se admită de fapt acest lucru îndată ce fenomenele, prin aceasta, s-ar putea explica într-un mod mai simplu.

Problema valabilității ipotezelor geometriei în infinitul mic este legată de problema rațiunii interne a relațiilor metrice ale spațiului. La această întrebare, care ar putea fi socotită ca ținînd tot de teoria spațiului, se aplică observația de mai sus că în cazul unei varietăți discrete principiul relațiilor metrice este conținut deja în conceptul acestei varietăți, însă în cazul unei varietăți continue el trebuie să intervină din altă parte. Așadar, trebuie sau ca realul care stă la baza spațiului să formeze o varietate discretă, sau să se caute rațiunea relațiilor metrice în afară, în forțele de legătură care acționează asupra lor.

Rezolvarea acestor probleme poate fi găsită numai pornind de la concepția de pînă acum despre fenomene, verificată prin experiență, concepție a cărei bază a fost pusă de Newton și revizuind-o treptat prin fapte care nu se pot explica cu ajutorul ei; astfel de cercetări care, ca aceea efectuată aici, pleacă de la concepte generale pot servi numai ca această muncă să nu fie împiedicată de caracterul limitat al conceptelor și ca progresul în cunoașterea conexiunii lucrurilor să nu fie frînat de prejudecăți transmise prin tradiție.

Pentru completare, să mai cităm pe **Hermann Helmholz** (1821—1894), care a cercetat natura spațiului în mod asemănător cu *Riemann*. Despre aceasta, în scurtul său articol *Despre adevăratele baze ale geometriei* (în „Wissenschaftl. Abhandl.", II, 1866, 613), el însuși spune următoarele:

> Propriile mele cercetări, împreună cu rezultatele lor, se găsesc în cea mai mare parte cuprinse deja în cercetările lui Riemann. Numai într-o privință ele adaugă ceva nou, anume în legătură cu fundamentarea propoziției pitagoreice generalizate, așa cum o folosește Riemann ca punct de plecare al cercetărilor sale. Căci postulatul pe care Riemann îl introduce de-abia la sfîrșitul cercetării sale, conform căruia figurile în spațiu, invariante ca formă, ar trebui să aibă acel grad de mobilitate pe care geometria îl presupune, eu îl introdusesem de la început, și acest postulat limitează atunci posibilitatea ipotezelor care se pot face pentru expresia elementului de linie, în așa măsură, încît rămîne numai forma acceptată de Riemann, excluzînd toate celelalte.

Punctul meu de plecare a fost ideea că orice măsurare a spațiului se sprijină la origine pe constatarea congruenței și că deci sistemul de măsurare a spațiului trebuie să presupună condițiile în care nu poate fi vorba decît de constatarea congruenței. Ulterior, cercetările în direcția *Riemann-Helmholtz* au fost continuate de către *Sophus Lie* (cf. *Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 3, Abt. 5, Leipzig, 1893) și de *David Hilbert* (*Grundlagen der Geometrie*, Anhang IV, 1902). Pe altă latură, ideile riemanniene au fost dezvoltate ulterior de către *Hermann Weyl* (*Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, 1923).

9. Felix Klein: Demonstrația necontradicției geometriei neeuclidiene

Felix Klein (1849—1925) a dat prima demonstrație de necontradicție a geometriei neeuclidiene în spațiu, folosind procedee pur geometrice, aplicînd biunivoc elementele geometrice fundamentale neeuclidiene, puncte, drepte, plane, pe anumite puncte, drepte, plane ale spațiului euclidian, introducînd o „determinare metrică proiectivă" adecvată, care reprezintă, de pildă, lungimea segmentului prin logaritmul unui biraport (în sensul geometriei proiective) și datează inițial de la *A. Cayley* (1821—1895).

Urmează expunerea fundamentală a lui *Klein* reprodusă textual din „Vorläufige Mitteilung", publicată în 1871.

F. Klein, *Asupra așa-numitei geometrii neeuclidiene* (comunicare provizorie), 1871:

„Intuitivizarea“ celor trei feluri de geometrii prin determinarea metrică generală a lui Cayley

Necesitatea de a face intuitive speculațiile foarte abstracte, care au condus la formularea celor trei feluri de geometrii (cea euclidiană și cele două neeuclidiene), a dus la căutarea unor exemple de determinări metrice care pot fi concepute ca modele ale numitelor geometrii și care pun astfel în evidență, în același timp, coerența internă a fiecăreia în parte...

Aici voi prezenta mai întîi modele pentru cele trei feluri de geometrii, atît în plan cît și în spațiu, modele care permit să se observe perfect particularitățile lor.

Modelele în discuție consideră însuși planul, respectiv spațiul, ca obiect al determinării metrice, numai că folosesc o altă determinare metrică decît cea obișnuită, care în sensul geometriei proiective apare ca o generalizare a determinării metrice obișnuite.

Fie o suprafață arbitrară de gradul doi, dată prin ipoteză ca suprafață ,,fundamentală''. Două puncte date în spațiu determină, prin intersecția liniei care le unește cu suprafața, două puncte pe această suprafață. Cele două puncte date au față de acestea două un anumit biraport și logaritmul, multiplicat prin constanta arbitrară c, al acestui biraport se va numi distanța celor două puncte date. Analog, dacă sînt date două plane, atunci prin linia lor de intersecție se pot duce la suprafața fundamentală două plane tangente. Acestea, împreună cu ambele plane date, determină un anumit biraport. Logaritmul, înmulțit cu o constantă arbitrară c^1, al acestui biraport este cantitatea pe care o considerăm ca unghi al ambelor plane date.

Potrivit acestor definiții, punctele suprafeței fundamentale sînt la distanță infinită de toate celelalte puncte; suprafața fundamentală este așadar locul punctelor infinit depărtate. Tot astfel, planele tangențiale ale suprafeței fundamentale sînt acele plane care formează cu un plan oarecare un unghi infinit de mare. (O distanță egală cu zero au între ele acele puncte a căror linie comună este tangentă la suprafață. Un unghi egal cu zero formează acele plane a căror linie de intersecție este tangentă la suprafață.) În locul mişcărilor cu o înşesită infinitate, mişcări care lasă invariantă determinarea metrică obişnuită, intervine acum un ciclu de tot atîtea transformări liniare.

Din această determinare metrică generală, prin trecere la limită, se deduce o geometrie metrică de aceeaşi natură cu cea parabolică obişnuită, dacă suprafața fundamentală de gradul doi degenerează într-o secțiune conică imaginară. Dacă această secțiune conică este în particular cercul imaginar de la infinit, atunci se obține tocmai geometria metrică obişnuită.

Însă alegînd convenabil suprafața fundamentală, determinarea metrică proiectivă generală ne dă şi o geometrie metrică, cuprinzînd, pe de o parte, reprezentările geometriei eliptice, iar pe de altă parte, una cuprinzînd reprezentările geometriei hiperbolice. Acestea sînt tocmai modele pentru geometria eliptică şi cea hiperbolică.

La o geometrie metrică, corespunzătoare geometriei eliptice, se ajunge dacă luăm suprafața fundamentală imaginară. Atunci, evident, nici o dreaptă nu are puncte reale la infinit, astfel încît dreapta este ca o curbă închisă de lungime finită. Mai precis, ajungem chiar la formulele (trigonometrice), aşa cum geometria eliptică trebuie să le admită. Acestea sînt formulele trigonometriei sferice, în care pentru raza sferei intervine constanta $c : \sqrt{-1}$.

La o geometrie corespunzătoare geometriei hiperbolice se ajunge dacă luăm suprafața fundamentală reală şi nu rectilinie şi luăm în considerație punctele din interiorul acesteia. Această limitare la interiorul suprafeței fundamentale este naturală. Căci, să facem ipoteza că ne-am găsi în interiorul suprafeței şi am putea să ne schimbăm poziția noastră în spațiu numai cu ajutorul acestor transformări liniare în spațiu, transformări care reprezintă mişcările spațiului în determinarea metrică respectivă. Atunci niciodată nu am putea ieşi din interiorul suprafeței de gradul doi infinit depărtate (pentru determinarea metrică). Dincolo de suprafața fundamentală s-ar găsi atunci încă o porțiune de spațiu, despre a cărui existență nu se ştie nimic şi care se face remarcabil numai prin faptul că într-un plan două drepte nu se intersectează, dacă nu presupunem o atare porțiune de spațiu. Dacă, însă, ne limităm la construcții care nu ies din interiorul suprafeței, atunci la folosirea determinării metricii respective pentru ele sînt valabile legile pe care geometria hiperbolică le stabilește în genere pentru construcțiile în spațiu. Fiecare dreaptă are, de pildă, două puncte reale la infinit, căci fiecare dreaptă care trece prin interiorul suprafeței taie suprafața în două puncte reale. Printr-un punct se pot duce la o dreaptă două paralele: cele două linii care unesc punctul cu cele două puncte de intersecție ale dreptei date cu suprafața fundamentală. Un triunghi cu vîrfurile la infinit, adică un triunghi ale cărui vîrfuri sînt situate pe suprafața fundametală, are suma unghiurilor nulă. Căci fiecare pereche de linii care se intersectează pe suprafața fundamentală (paralele două cîte două) cuprinde un unghi egal cu zero ș.a.m.d. În sfîrșit, constanta *c*, cu care trebuie înmulțit logaritmul biraportului respectiv, pentru a da distanța dintre două puncte, reprezintă constanta caracteristică menționată mai sus, care se întîlnește în geometria hiperbolică.

10. „Programul de la Erlangen“ al lui Felix Klein

Dacă în lucrarea anterioară **F. Klein** a „intuitivizat” diferitele geometrii neeuclidiene, în *Programul de la Erlangen* din 1872, care urmează acum, el concepe problemele de geometrie din punctul de vedere al teoriei grupurilor, un punct de vedere superior, mai abstract dar mai cuprinzător.

„Proprietățile geometrice” sînt acelea care se dovedesc invariante față de un „grup” determinat de transformări. (Așa-numita „proprietate de grup“ constă mai ales în faptul că două transformări ale totalității în discuție, totalitate denumită „grup”, generează — dacă sînt efectuate succesiv — o transformare care aparține „grupului”.)

Felix Klein din *Programul de la Erlangen* (1872) § 1 și § 2:

Conceptul cel mai esențial, necesar pentru explicațiile ce urmează, este conceptul de grup de deplasări în spațiu.

Oricît de multe transformări în spațiu am lua, ele dau totdeauna prin compunere iarăși o transformare. Dacă un șir dat de transformări are proprietatea că orice deplasare care rezultă prin compunere din cele care aparțin șirului aparține din nou tot aceluiași șir, atunci șirul se va numi grup de transformări.

Un exemplu de grup de transformări îl formează totalitatea mişcărilor (fiecare mişcare considerată ca o operaţie efectuată pe întregul spaţiu). Un grup inclus în aceasta îl formează, de pildă, rotaţiile în jurul unui punct. Un grup care, invers, include grupul mişcărilor este reprezentat de totalitatea colineaţiilor.

Există însă transformări în spaţiu care lasă în genere invariante proprietăţile figurilor în spaţiu. Proprietăţile geometrice sînt—ca noţiuni — independente de poziţia pe care o capătă în spaţiu figura de cercetat, independente de mărimea sa absolută, în fine, independente şi de sensul în care părţile sale sînt ordonate. Proprietăţile unei figuri în spaţiu rămîn aşadar invariabile, oricare ar fi mişcările în spaţiu, transformările prin asemănare, procesul reflectării, ca şi toate transformările care se compun din acestea. Totalitatea acestor transformări o denumim *grupul principal* al deplasărilor în spaţiu; proprietăţile geometrice nu se modifică prin transformările grupului principal. *Se poate spune şi reciproc: proprietăţile geometrice se caracterizează prin invarianţa lor faţă de transformările grupului principal.* Dacă considerăm un moment spaţial ca nemişcat etc., ca o varietate imobilă, atunci fiecare figură comportă un interes individual; dintre proprietăţile pe care ea le are ca individ, numai cele propriu-zise geometrice se conservă la deplasările grupului principal.

Să ştergem acum imaginea intuitivă, neesenţială din punct de vedere matematic, şi să privim în spaţiu numai o varietate cu n-dimensiuni, deci — menţinîndu-ne la reprezentarea obişnuită a punctului ca element în spaţiu — o varietate cu trei dimensiuni! Prin analogie cu transformările în spaţiu, noi vorbim despre transformările varietăţii: chiar şi ele formează grupuri! Numai că un grup nu se mai distinge faţă de celelalte, ca în spaţiu, prin semnificaţia sa; fiecare grup este pe picior de egalitate cu oricare din celelalte. Ca generalizare a geometriei, se naşte astfel următoarea problemă globală:

> Se dă o varietate şi în aceasta se dă un grup de transformări; figurile care aparţin varietăţii trebuie cercetate în raport cu acele proprietăţi care se modifică prin transformările grupului.

Folosind modul modern de exprimare, care de obicei se referă, desigur, numai la un anumit grup, grupul tuturor transformărilor liniare, se mai poate spune:

> Se dă o varietate şi în aceasta se dă un grup de transformări. Să se dezvolte teoria invarianţilor relativă la grup.

Aceasta este problema generală care înglobează nu numai geometria obişnuită, dar şi metodele geometrice moderne pe care le indicăm aici şi diversele moduri de tratare a varietăţilor cu oricîte dimensiuni.

> Dacă se înlocuieşte grupul principal printr-un grup mai cuprinzător, atunci se păstrează numai o parte din proprietăţile geometrice. Celelalte nu mai apar ca proprietăţi în sine ale lucrurilor în spaţiu, ci ca proprietăţi ale sistemului care rezultă, dacă acestora li se adaugă o figură remarcabilă. Această figură remarcabilă (în măsura în care în genere este determinată) este definită prin faptul că, gîndind temeinic, face posibile în spaţiu, printre transformările grupului dat, în plus numai transformările grupului principal.

În această propoziţie rezidă specificul direcţiilor geometriei moderne pe care le avem de discutat aici, precum şi relaţia dintre ele şi metoda elementară. Ele se caracterizează tocmai prin faptul că în locul grupului principal ele iau ca bază de studiu un grup lărgit de transformări în spaţiu.

11. Moritz Pasch şi fundamentarea axiomatică a geometriei

J. H. Lambert ceruse ca în fundamentarea geometriei să se facă abstracţie ,,de reprezentarea lucrului". În demonstraţii nu ar trebui nicăieri să ne sprijinim pe lucrul însuşi, ci ar trebui ca demonstraţia ,,să fie expusă absolut simbolic". El ar putea admite ,,prefigurarea unei figuri" numai ,,ca un fir conducător, pentru a conduce demonstraţia".

M. Pasch este primul care a considerat cu adevărată seriozitate aceste exigenţe de metodică riguroasă şi a realizat strict axiomatic o fundamentare a geometriei proiective corespunzătoare acestor exigenţe, în ale sale *Prelegeri asupra geometriei moderne* (Leipzig, 1882). Reproducem cîteva consideraţii metodico-principiale din această lucrare:

Studiul care urmează ne va face cunoscute proprietățile care se observă la drepte și la punctele lor. Noi le exprimăm sub forma unor propoziții izolate. Propozițiile sînt introduse însă în diferite feluri. Unele din ele sînt demonstrate, adică se arată cum conținutul lor este condiționat de alte propoziții; propozițiile folosite la demonstrație trebuie de fiecare dată să fie puse înainte. Acum propozițiile care sînt demonstrate le punem ca teoreme în opoziție cu altele pe care le numim principii. Teoremele sînt deduse din principii, așa încît tot ce ține de fundamentarea teoremelor trebuie fără excepție să se găsească înglobat în principii.

În cursul evoluției s-au adăugat noi concepte geometrice la cele introduse inițial, concepte care se reduc totuși la acestea din urmă. Pe cele noi le numim concepte derivate, pe celelalte, concepte fundamentale. Numai conceptele derivate au fost definite, în timp ce totdeauna cele ce preced au fost folosite; ori de cîte ori un concept derivat a fost aplicat, s-a făcut referire în mod nemijlocit la definiția sa; fără această referire, demonstrarea respectivă n-a fost posibilă. Conceptele fundamentale nu au fost definite; nici o explicație nu este în stare să înlocuiască mijlocul care singur facilitează înțelegerea acelor concepte simple, care nu se reduc la altele, adică referirea la obiectele naturale corespunzătoare. Atunci cînd Euclid spune: „Un punct este ceea ce nu are părți; o linie este lungime fără lățime; o dreaptă este linia situată uniform față de punctele așezate pe ea", el explică conceptele pe care le-am citat prin proprietăți care nu se pretează la nici o utilizare practică și care nu sînt utilizate nici de el nicăieri în cursul dezvoltării ulterioare. De fapt, nici un singur pasaj nu se sprijină pe unul din acele enunțuri prin care cititorul — care nu poate învăța nimic în genere din *Elemente* fără a avea o reprezentare despre conceptele fundamentale geometrice, elaborată deja dinainte prin observații repetate — cel mult își amintește de reprezentarea respectivă și este îndemnat să o limiteze sau să o completeze conform exigențelor științifice.

Matematica pune în evidență relații între conceptele matematice care trebuie să corespundă faptelor din experiență, dar în marea lor majoritate nu sînt împrumutate din experiență, ci „demonstrate"; cunoștințele necesare în demonstrație (în afară de definițiile conceptelor derivate) formează chiar o parte a relațiilor care urmează a fi stabilite. După separarea propozițiilor bazate pe demonstrații, adică a teoremelor, mai rămîne o grupă de propoziții principiale, din care se pot deduce toate celelalte; acestea sînt întemeiate nemijlocit pe observații, negreșit pe observații care s-au repetat fără încetare din timpuri imemoriale, care se pricep mai limpede decît oricare altele și cu care oamenii s-au familiarizat din această cauză de multă vreme, încît originea lor a putut să fie uitată și să devină obiect de controversă.

Principiile trebuie să cuprindă în întregime materialul empiric care trebuie prelucrat de către matematică, astfel încît, după ce au fost stabilite, să nu mai fie nevoie să revenim la percepțiile simțurilor.

Principiile nu pot fi recunoscute fără figurile corespunzătoare; ele enunță ceea ce s-a observat la anumite figuri foarte simple. Teoremele nu se bazează pe observații, ci se demonstrează; orice concluzie care apare în cursul demonstrației trebuie să găsească confirmarea sa în figură, dar concluzia nu se justifică prin figură, ci printr-o anumită propoziție precedentă (sau printr-o definiție). Dacă ne abatem cît de puțin de la această concepție, atunci sensul procedeului de demonstrație pierde în genere calitatea de a fi determinat.

De fapt, dacă geometria vrea să fie cu adevărat deductivă, trebuie ca procesul deducției să fie peste tot independent de sensul conceptelor geometrice, așa cum trebuie să fie independent față de figuri; se pot lua în considerație numai relațiile dintre conceptele geometrice incluse în propozițiile, respectiv definițiile, folosite. În cursul deducției este desigur permis și util — dar în nici un caz necesar — să ne gîndim la semnificația conceptelor geometrice care apar; în cazul că acest lucru devine necesar, aceasta înseamnă tocmai că deducția are lacune și (dacă lacuna nu poate fi eliminată prin modificarea raționamentului) că propozițiile premergătoare sînt insuficiente ca mijloace de demonstrație. Dacă, însă, am dedus cu toată rigoarea o teoremă dintr-o grupă de propoziții — pe care le vom numi propoziții primitive —, atunci deducția posedă o valoare care depășește scopul inițial. Căci dacă din propozițiile primitive rezultă iarăși propoziții valabile, schimbînd conceptele geometrice legate în ele cu alte concepte determinate, atunci și în teoremă este permisă schimbarea corespunzătoare; astfel se obține, fără să repetăm deducția, o nouă propoziție (în general), o consecință din propozițiile primitive schimbate.

Pentru descoperirea adevărurilor noi ne servim, fără îndoială, de toate mijloacele care pot duce la scop. Altfel se întîmplă cu demonstrarea și expunerea a ceea ce s-a descoperit, lucru care satisface în matematică numai atunci cînd faptul nou apare ca o urmare a faptelor cunoscute. Această cerință a luat naștere desigur din constatarea felului cum în matematică, mai mult decît în orice alt domeniu, întîlnim posibilitatea ca numai prin deducție, fără un experiment special, să aflăm chestiuni noi și adevărate din altele cunoscute; această cerință este îndeplinită de la sine cu atît mai sigur cu cît ne depărtăm mai mult de conceptele fundamentale, cu cît avem de-a face mai mult — pînă la exclusivitate — cu concepte compuse, care din cauza semnificației lor, nu ușor de înțeles, nu permit nici o relație care s-ar putea strecura neobservată într-o concluzie. Dacă, acum, matematica se leagă realmente de metoda riguros deductivă, pe care este capabilă s-o satisfacă, în aceasta nu se poate vedea o constrîngere superfluă. Valoarea acelei metode constă în faptul că ei îi corespunde, în privința procedeului de demonstrație, o concepție care exclude tot ce este arbitrar, în timp ce în toate celelalte concepții demonstrațiile nu sînt absolut inatacabile, pentru că aprecierii nu i se poate pune o limită precisă. Faptul că demonstrațiile prin care teoremele se reduc la principii nu sînt atacabile, împreună cu evidența principiilor înseși, care trebuie să fie garantate prin cele mai simple experiențe, conferă matematicii caracterul certitudinii maxime care i se atribuie de obicei.

12. „Bazele geometriei“ de David Hilbert

David Hilbert (1862—1943) în lucrarea intitulată *Despre bazele geometriei*, publicată mai întîi cu ocazia festivității dezvelirii monumentului *Gauss—Weber*, a creat o operă care — dezvoltînd principiile expuse de *Moritz Pasch* (1843—1930) în *Prelegeri asupra geometriei moderne*, din 1882 — a fundamentat și a prezentat riguros axiomatic întreaga geometrie elementară. Cu această ocazie, necontradicția geometriei s-a redus la necontradicția aritmeticii și s-a arătat mai departe independența diferitelor grupe de axiome.

Punctul de vedere al lui *Hilbert* este din capul locului cu totul abstract: nu se spune nici ce semnificație au conceptele elementare „punct", „dreaptă", „plan", nici care sînt relațiile în care se află acestea. Sînt stabilite prin axiome numai proprietățile formale ale relațiilor care există între elementele geometrice fundamentale, și prin aceasta, implicit, sînt definite elementele și relațiile geometrice. (Ideea fundamentală a acestei metode am găsit-o deja la *Lambert*, în § 11, citat de noi, din *Teoria liniilor paralele*.)

În cele ce urmează reproducem, pe lîngă introducerea în operă, demonstrația necontradicției geometriei neeuclidiene, precum și două importante demonstrații de independență (independența axiomei paralelelor și a axiomei lui Arhimede).

§ 1

Elementele geometriei și cele cinci grupe de axiome

Lămurire. Concepem trei sisteme diferite de obiecte: numim obiectele primului sistem puncte și le notăm cu A, B, C, ...; numim obiectele celui de-al doilea sistem drepte și le notăm cu a, b, c, ...; numim obiectele celui de-al treilea sistem plane și le notăm cu α, β, γ, ...; punctele se mai numesc și elemente ale geometriei liniare, punctele și dreptele se numesc elemente ale geometriei plane și punctele, dreptele și planele se numesc elementele geometriei în spațiu.

Concepem punctele, dreptele și planele în anumite relații reciproce și numim aceste relații prin cuvinte ca „a fi situat", „între", „paralel", „congruent", „continuu"; descrierea exactă a acestor relații, și totodată completă pentru scopuri matematice, se obține prin axiomele geometriei.

Putem împărți axiomele geometriei în cinci grupe: fiecare grupă exprimă anumite fapte fundamentale care aparțin împreună intuiției noastre. Aceste grupe de axiome le numim în modul următor:

I. 1—8 Axiomele de incidență,
II. 1—4 Axiomele de ordonare,
III. 1—5 Axiomele de congruență,
IV. Axioma paralelelor,

V. 1—2 Axiomele de continuitate (axioma arhimedică a măsurării și axioma de completitudine)[1].

§ 9

Necontradicția axiomelor

Axiomele celor cinci grupe de axiome stabilite în capitolul I nu se contrazic între ele, adică nu este posibil ca prin raționamente logice să deducem din ele un fapt care să contrazică una din axiomele stabilite. Pentru a ne da seama de aceasta, vom forma din numerele reale un sistem de obiecte în care sînt satisfăcute toate axiomele celor cinci grupe.

Să considerăm mai întîi domeniul Ω al tuturor numerelor algebrice care apar începînd cu numărul 1 și aplicînd de un număr finit de ori cele patru operații de calcul: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și a cincea operație $|\sqrt{1+\omega^2}|$, unde ω poate însemna totdeauna un număr care a rezultat din acele operații.

Ne putem imagina o pereche de numere (x, y), aparținînd domeniului, ca fiind un punct, iar rapoartele a trei numere oarecare $(u : x : w)$ din Ω, în caz că u, v nu sînt amîndouă nule, ca fiind o dreaptă; mai departe, fie ca existența ecuației

$$ux + vy + w = 0$$

să exprime faptul că punctul (x, y) este situat pe dreapta $(u : v : w)$; prin aceasta sînt satisfăcute, după cum se vede ușor, axiomele I 1—3 și IV. Toate numerele domeniului Ω sînt reale; luînd în considerație faptul că aceste numere se pot ordona după mărime, putem stabili ușor pentru punctele și dreptele noastre că și axiomele II de ordonare sînt, toate, valabile. Pentru ca, mai departe, să satisfacem axioma II_4 avem nevoie numai să stabilim că toate punctele (x, y), pentru care $ux + vy + w$ este mai mic sau mai mare decît zero, trebuie să fie situate de o parte sau de cealaltă parte a dreptei $(u : v : w)$.

---

[1] „Elementele geometriei formează un sistem de obiecte, care nu mai este capabil de nici o lărgire atunci cînd sînt păstrate toate axiomele numite (mai înainte)".

Transportarea segmentelor şi unghiurilor se face după metodele cunoscute ale geometriei analitice (vezi fig. 55). O transformare de forma

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

ne dă translaţia segmentelor şi a unghiurilor. Dacă, mai departe, notăm punctul $(0, 0)$ cu O, punctul $(1, 0)$ cu E și un punct oarecare (a, b) cu C, atunci printr-o rotaţie cu un unghi $\sphericalangle\, COE$, în jurul punctului fix O, dintr-un punct oarecare (x, y) rezultă punctul (x', y'), unde trebuie să punem:

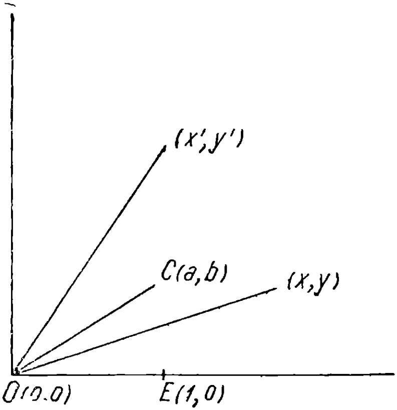


Fig. 55

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y, \qquad y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y.$$

Deoarece numărul

$$\sqrt{a^2 + b^2} = b \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

aparține tot domeniului Ω, atunci sînt valabile în rezultatele noastre și axiomele III de congruență și, evident, este satisfăcută și axioma arhimedică V 1. Axioma de completitudine V 2 nu este satisfăcută.

Orice contradicție în consecințele deduse din axiomele geometrice I—IV, V 1 ar trebui deci să se regăsească și în aritmetica domeniului Ω.

Dacă în cele dezvoltate mai sus alegem în locul domeniului Ω domeniul tuturor numerelor reale, obținem o geometrie în care sînt valabile toate axiomele I—V; această geometrie este geometria carteziană obișnuită.

Orice contradicție în consecințele deduse din axiomele I—V ar trebui, deci, să poată fi regăsită în aritmetica sistemului numerelor reale.

Considerațiile corespunzătoare pentru geometria în spațiu nu constituie nici o dificultate.

Așa cum se știe, există infinit de multe geometrii, care satisfac axiomele I—IV, V 1; dimpotrivă, există numai una, cea carteziană, în care este valabilă în același timp și axioma de completitudine V 2.

§ 10

Independența axiomei paralelelor (*Geometria neeuclidiană*)

Axioma IV a paralelelor este independentă de celelalte axiome; aceasta se arată, așa cum se știe, în modul cel mai simplu astfel: Se aleg punctele, dreptele și planele geometriei obișnuite (carteziene), construite în § 9, în măsura în care ele sînt situate înăuntrul unei sfere solide, ca elemente în sine ale unei geometrii în spațiu, și se obțin congruențele acestei geometrii prin acele transformări liniare ale geometriei obișnuite, care transformă sfera solidă în ea însăși. Prin procedee adecvate se stabilește că în această geometrie „neeuclidiană" sînt valabile toate axiomele în afară de axioma a IV-a euclidiană, și deoarece posibilitatea geometriei obișnuite a fost demonstrată în § 9, de aici decurge și posibilitatea geometriei neeuclidiene.

§ 12

Independența axiomelor V de continuitate (Geometria nearhimedică)

Pentru a demonstra independența axiomei V 1 a lui Arhimede, trebuie să construim o geometrie în care toate axiomele sînt verificate, cu excepția axiomelor V, care nu sînt verificate.

În acest scop construim domeniul $\Omega(t)$ al tuturor acelor funcții algebrice de variabila t, care se formează din t prin cele patru operații ale adunării, scăderii, înmulțirii, împărțirii și prin operația $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$; unde ω va însemna o funcție oarecare, obținută deja datorită celor cinci operații. Mulțimea elementelor din Ω (t) este — ca și cele din Ω despre care am vorbit în § 9 — numărabilă. Toate cele cinci operații sînt univoce și se pot efectua în mulțimea numerelor reale; de aceea domeniul $\Omega(t)$ conține numai funcții univoce și reale de variabila t.

Fie c o funcție oarecare a domeniului $\Omega(t)$; pentru că funcția c este o funcție algebrică de variabila t, ea poate să se anuleze în orice caz numai pentru un număr finit de valori ale lui t și, de aceea, funcția c va fi sau mereu pozitivă, sau mereu negativă pentru valori pozitive suficient de mari.

Considerăm acum funcțiile domeniului $\Omega(t)$ ca un fel de numere complexe; evident, toate regulile de calcul obișnuite sînt valabile în sistemul de numere astfel definit. Mai departe, dacă a, b sînt două numere diferite ale acestui sistem de numere complexe, numărul a poate fi mai mare sau mai mic decît b (în simboluri: $a > b$ sau $a < b$), după cum diferența $c = a - b$, ca funcție de t, pentru valori pozitive suficient de mari ale lui t, este totdeauna pozitivă sau totdeauna negativă. Stabilind acest lucru, este posibilă o ordonare după mărime pentru numerele sistemului nostru de numere complexe, ordonare analogă aceleia de la numerele reale.

Dacă n înseamnă un număr rațional întreg pozitiv oarecare, atunci pentru ambele numere n și t ale domeniului $\Omega(t)$ este valabilă, desigur, inegalitatea $n < t$, deoarece diferența $n - t$, considerată ca funcție de t, este, evident, mereu negativă pentru valori pozitive suficient de mari. Acest lucru se exprimă în modul următor: Cele două numere 1 și t ale domeniului $\Omega(t)$, ambele fiind > 0, posedă proprietatea ca un multiplu oarecare al celui dintîi număr să rămînă totdeauna mai mic decît celălalt.

Cu numerele complexe ale domeniului $\Omega(t)$ construim acum o geometrie exact în același mod cum s-a procedat în § 9, luînd ca bază domeniul Ω al numerelor algebrice. Dacă apoi stabilim cele corespunzătoare în privința ordonării elementelor și în privința transportului segmentelor și unghiurilor, ca în § 9, atunci apare o geometrie „nearhimedică", în care sînt satisfăcute toate axiomele, cu excepția axiomei de continuitate. De fapt, putem transporta segmentul 1 pe segmentul t ori de cîte ori vrem, fără ca extremitatea segmentului t să fie depășită ; aceasta contrazice cerința axiomei arhimedice.

Prima geometrie, expusă în § 9, arată că axioma de completitudine V 2 este independentă față de toate axiomele I—IV, V 1 antecedente, deoarece în acea geometrie axioma lui Arhimede este valabilă.

Explicațiile pe care *Hilbert* le dă în *Fundamentele geometriei* arată că toate demonstrațiile pentru necontradicția diferitelor „geometrii" posibile (cu care ocazie se pune în evidență independența axiomelor respective omise) se reduc la anumite construcții aritmetice, respectiv analitice, a căror necontradicție este astfel presupusă, dar nu demonstrată. Nici n-ar putea fi altfel în principiu, dacă în loc de coordonate s-ar lua ca bază calcule „invariante" sau „directe", așa cum este calculul vectorial, tensorial și altele asemenea. Totodată, în fine, se consideră date totdeauna numerele naturale și, mai ales, în plus, numerele iraționale.

De aceea, problema fundamentală propriu-zisă a matematicii se reduce la sarcina de a demonstra necontradicția aritmeticii și analizei ; despre aceasta vom discuta în capitolul V.

Deși relația dintre matematică și obiectele experienței nu ține de fundamentare a matematicii, vom adăuga doi autori ale căror idei despre semnificația axiomelor geometrice s-au abătut de la opinia reprezentată aproape îndeobște de la *Gauss* încoace că experiența determină alegerea unei geometrii (euclidiană sau neeuclidiană).

Acești autori sînt *H. Poincaré* (1854—1912) și *H. Dingler* născut în 1881) ; primul susține teza că axiomele geometriei nu ar fi nimic altceva decît convenții comode, al doilea, dimpotrivă, apără opinia după care construcția unei geometrii „tehnice" practic utilizabilă, și care în mod necesar ar sta la baza construirii tuturor instrumentelor noastre de măsură, ar putea să se constituie numai în sens euclidian.

13. Poincaré despre axiomele geometrice considerate convenții cu finalitate

Din *Știință și ipoteză*

Axiomele geometriei nu sînt deci nici judecăți sintetice a priori nici fapte experimentale.

Ele sînt convenții; alegerea noastră, printre toate convențiile posibile, este ghidată de fapte experimentale; dar ea este liberă și nu este limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicție. În felul acesta, postulatele pot rămîne riguros adevărate chiar atunci cînd legile experimentale, care au determinat adoptarea lor, nu sînt decît aproximative.

Cu alte cuvinte, axiomele geometriei (nu vorbesc de cele aritmetice) nu sînt decît definiții deghizate (p. 66).

Se vede că experiența joacă un rol indispensabil în geneza geometriei, dar ar fi o greșeală dacă am trage de aici concluzia că geometria este o știință experimentală, fie chiar numai în parte.

Dacă ar fi experimentală, ea n-ar fi decît aproximativă și provizorie. Și ce aproximație grosolană!

Geometria nu ar fi decît studiul mișcărilor solidelor; dar ea în realitate nu se ocupă de corpurile solide naturale, ea are ca obiect anumite solide ideale, absolut invariabile, care nu sînt decît o imagine simplificată și foarte îndepărtată a celor naturale.

Conceptul acestor corpuri ideale provine în întregime din mintea noastră, și experiența nu este decît ocazia care ne împinge să-l facem să iasă din minte.

Obiectul geometriei este studiul unui „grup“ particular; dar conceptul general de grup preexistă în mintea noastră cel puțin potențial. El ni se impune nu ca formă a sensibilității noastre, ci ca formă a intelectului nostru.

Însă dintre toate grupurile posibile trebuie să alegem pe acela care va fi, ca să spunem așa, etalonul la care vom raporta fenomenele naturale.

Experiența ne ghidează în această alegere pe care nu ne-o impune; ea ne face să recunoaștem nu care este geometria cea mai adevărată, ci care este cea mai comodă (pp. 90—91).

Să facem o comparaţie cu geometria. Propoziţiile fundamentale ale geometriei, ca de pildă postulatul lui *Euclid*, nu sînt altceva decît convenţii, şi este tot atît de lipsit de raţiune de a cerceta dacă ele sînt adevărate sau false cum ar fi să întrebi dacă sistemul metric este fals sau adevărat (p. 163).

14. H. Dingler despre construcţia unei geometrii utilizabilă în tehnică

Din *Istoria şi esenţa experimentului* (1952)

Să studiem geneza istorică a instrumentelor de măsurare a spaţiului şi să cercetăm spaţializarea în genere sau geometricul! Măsurarea spaţiului are nevoie, evident, de forme geometrice ca, de exemplu, plan, dreaptă, cerc, iar instrumentele de măsurare a spaţiului trebuie să le folosească. De unde provin acestea?

Suprafeţele plane produse de cioplitorii de piatră apar încă de mult la construirea de clădiri. Dacă cercetăm felul în care şi astăzi pietrarul face plană o suprafaţă, atunci aflăm că probabil procedeul este şi astăzi ca la început. Pietrarul se serveşte de rigla sa de nivelat (dreptar), care în condiţii primitive se putea obţine, de pildă, prin netezirea reciprocă a bucăţilor de lemn. Dacă vrea să obţină o faţă plană la o piatră, atunci el trebuie să fixeze marginea cioplind de-a lungul dreptarului. Apoi el prelucrează suprafaţa interioară cu ciocanul ascuţit, cu ciocanul dinţat, cu ciocanul plat etc., aplicînd mereu dreptarul.

Dacă ne întrebăm ce este o suprafaţă plană, găsim la Euclid în *horoi* o definiţie pe care, mai tîrziu, el nu o va mai folosi şi cu care învăţaţii nu puteau face niciodată ceva bun. Ea sună: Planul este o suprafaţă care este la fel situată faţă de dreptele ei. Dacă comparăm această definiţie cu ceea ce am auzit mai înainte în legătură cu pietrarii, se vede că Euclid şi-a luat definiţia de la aceştia.

Cum se prezintă pentru noi astăzi această problemă?

Să ne imaginăm că un om ar voi să deschidă o fabrică pentru instrumente fine şi pentru aparate de măsură precise. Dacă nu vrea să-şi procure modele din comerţ, modele despre care el nu ştie dacă posedă precizie maximă, atunci trebuie, evident, s-o ia el însuşi de la capăt. Cum începe? El trebuie să producă cea mai precisă suprafaţă plană cu care sînt examinate apoi toate celelalte, cu ajutorul căreia li se măsoară exactitatea.

Dacă întrebăm un astfel de om cum procedează, aflăm următoarele:

Se iau trei plăci de oţel *a*, *b*, *c*, netezite în prealabil, şi se şlefuiesc frecîndu-se două cîte două una de cealaltă, astfel încît să adere. Dacă s-ar lua numai două plăci, ar exista pericolul să ia naştere o suprafaţă sferică (calotă). Cu trei plăci rezultă însă o suprafaţă la care o parte este aplicabilă pe sine însăşi. Se poate pune *a* pe *c*, apoi *a* pe *b* (procedeul celor trei plăci). Pe acest proces se bazează toate atelierele de mecanică fină, de pildă şi la firma Zeiss.

Mai întîi, această producere de suprafeţe plane este un procedeu pur practic. Acum vrem să vedem ce se poate spune despre latura conceptuală. Această latură este deja atinsă cînd denumim rezultatul acestui procedeu ,,suprafaţă plană''. Aşadar, conceptul de plan ar fi definit printr-un procedeu, printr-o operaţie, printr-o acţiune, şi nu mai întîi prin cuvinte, aşa cum sîntem obişnuiţi.

Cu toate acestea însă, decisiv pentru semnificaţia acestei acţiuni nu este numai comportarea mîinilor. În spatele procedeului celor trei plăci se află ascuns mai degrabă ceva ce noi numim o ,,idee''. Anume, o cerinţă intelectuală care depăşeşte cu mult ceea ce noi momentan executăm manual sau putem executa.

Această idee cuprinde următoarele: 1) gîndul că aplicarea procedeului are loc din ce în ce cu mai multă grijă, din ce în ce cu mai multă fineţe; 2) gîndul că materialul va avea granule din ce în ce mai fine; 3) gîndul că plăcile se comportă cu timpul din ce în ce mai constant, aşa încît ele nu se transformă de loc; 4) gîndul că procedeul este imaginat ca aplicîndu-se, oricît de mari ar fi în întindere cele trei plăci, pînă la infinit.

Dacă ne imaginăm aceste patru cerinţe satisfăcute cu o perfecţie absolută, ideală (ceea ce numai gîndirea este în stare), atunci avem ideea care stă în spatele procedeului. La această idee ne referim cînd spunem cuvîntul ,,suprafaţă plană''.

În procedeul celor trei plăci preexistă deci o definiție a planului, ca să zicem așa, „practică" sau „manuală", sau „operativă". Aceasta este ceva nou și neobișnuit. Ea preexistă însă bine marcată atunci cînd se adaugă ideea. Numai acțiunile singure nu ar defini suprafața plană, pentru că din ele nu s-ar putea ști pînă unde ar trebui împinse.

Așadar, trebuie să încercăm a formula în cuvinte ideea de plan: șlefuiește frecînd una de alta trei plăci, de orice mărime, din material dur, pînă cînd ele aderă în întregime sau pînă cînd ambele părți ale suprafeței generate sînt în fiecare punct congruente și nu se mai pot distinge.

Această definiție a suprafeței plane coincide aici cu o „indicație a modului de lucru". În afară de aceasta, din motive logice rezultă că trebuie să fie posibil a deduce logic din această definiție toate proprietățile planului, pentru că ea reprezintă o determinare completă și clară a planului. Într-un anumit sens, această definiție joacă totodată, așadar, rolul unei axiome, totuși altfel decît a fost înțeleasă pînă acum noțiunea de axiomă.

În continuare, este evident că intersecția a două plane este definită ca „dreaptă". Chiar și această definiție este prin urmare o „indicație a modului de lucru". Tot astfel se știe din geometria teoretică că cele două noțiuni de plan și de dreaptă nu sînt încă suficiente pentru definirea neechivocă a întregii geometrii; aceste noțiuni ar defini numai așa-numita geometrie proiectivă. Lipsește încă elementul reprezentat în geometria teoretică prin axioma paralelelor. În acest scop se definește faptul că pe un plan, în cazul unei fîșii cu margini paralele (ale cărei extremități deci nu se pot deosebi între ele), toate distanțele trebuie să fie egale. Prin această definiție se stabilește în același timp ce înseamnă așa-numitul corp nedeformabil. În realitate, în uzinele de mecanică fină totdeauna după aceste criterii se execută, respectiv se examinează, fabricarea unui astfel de corp.

Cu aceasta, geometria este gata. De fapt, din aceste trei definiții se pot obține cunoscutele axiome și astfel se poate deduce, firește, întreaga geometrie. Numai axiomele de continuitate sînt aici implicit conținute. Ceea ce rezultă de aici este așa-numita geometrie euclidiană. Ea este singura care poate fi definită pur calitativ și fără a folosi o măsură.

Ceea ce am făcut aici este următorul lucru: am schițat construcția a ceea ce s-ar numi „geometria tehnică", adică a acelei geometrii care este folosită de fapt în mecanica fină practică, în ateliere și fabrici. Aceasta este deci geometria realității. O analiză exactă a acțiunilor care duc la confecționarea de aparate precise arată că această geometrie tehnică este „conținută sau ascunsă" în orice.

În același timp, este singurul mod în care geometria poate în realitate să apară la lumină legată de ideea de care aparține. De fapt, singurele ocazii în acest sens sînt împrejurările geometrice formate de noi înșine. Toate împrejurările aflate dinainte în mod natural, acolo unde acesta pare să fie cazul, sînt nesigure, căci nu știm cu siguranță la ce formă geometrică „ne referim". Numai cînd este vorba de noi înșine o știm.

Procedeele tehnice pe care le-am descris sînt total lipsite de ambiguitate, și prin simplitatea și simetria lor sînt astfel stabilite, încît nu se pot abandona chiar dacă am voi, atîta vreme cît putem construi o geometrie neechivocă numai pe bază calitativă, pentru că înainte de construirea ei nu există nici o posibilitate de măsurare. Aceasta însă o îndeplinește în exclusivitate geometria euclidiană. Nici un motiv nu există sau nu se poate imagina din care am putea să întrevedem posibilitatea de a admite să intervină în acest procedeu o schimbare, și în realitate, din punct de vedere tehnic, n-au apărut încă niciodată abateri de cînd se confecționează instrumente exacte.

Există un adagiu al lui Helmholtz care se poate invoca aici. În articolul său *Asupra faptelor care stau la baza geometriei* („Göttinger Nachrichten", 1868), el spune: „... cît de mult avem (în geometrie) ... numai definiție sau șir de definiții, sau cît de mult depinde de forma prezentării? După părerea mea, nu este așa de ușor de răspuns la această întrebare, deoarece în geometrie avem de-a face mereu cu figuri ideale, a căror înfățișare fizică este totdeauna numai o aproximare a cerințelor conceptului și noi decidem dacă un corp este solid, dacă are fețele plane, dacă muchiile sînt drepte de-abia prin intermediul acelorași propoziții, a căror exactitate reală ar trebui examinată și dovedită". Dar nici Helmholtz, nici altcineva n-a tras consecințele din această idee.

SECȚIUNEA A II-A

BAZELE ARITMETICII, ANALIZEI ȘI TEORIEI MULȚIMILOR

A. Aritmetica

Leibniz și Gauss despre imaginare

În conceptul de număr întreg, la început, nu s-a găsit o dificultate logică. *Gauss* pune bazele teoriei numerelor în ale sale *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), care încep cu divizibilitatea numerelor întregi și cu conceptul de „congruență"; atîta vreme cît domeniul real nu este părăsit, nu se ivește nici o îndoială în privința necontradicției construcției înălțate. *Gauss* se vede însă nevoit să introducă în mod sistematic în cercetările sale asupra resturilor bipătrate (1831) mărimea imaginară, de care se folosise mai înainte de multe ori. În nota sa prin care anunță tratatul amintit, el dă „intuitivizarea", devenită clasică, a numerelor complexe. (Încă *Wallis* dăduse în 1685 o reprezentare geometrică a numerelor complexe și în epoca lui *Gauss* matematicienii *C. Wessel* (1792) și *J. Argand* (1806) găsiseră aceeași idee fundamentală.)

Înainte de expunerea lui *Gauss* vom da un pasaj al lui *Leibniz* despre mărimea imaginară, pasaj care prin tonul său oarecum mistic lasă să apară, prin contrast, în chip foarte limpede claritatea concepției gaussiene.

Leibniz, *Mathemat. Schriften* (editate de Gerhardt) vol. V, p. 357:

Din gelozie pe minunata lor multiplicitate, natura lucrurilor, mama multiplicităților veșnice sau mai degrabă spiritul divin n-ar admite ca totul să fie subsumat unei singure specii. De aceea, el a găsit un refugiu rafinat și miraculos în acea minune a analizei, în monstrul lumii ideale, care este aproape ca un amfibiu între existență și neant, numit de noi rădăcina imaginară.

Urmează nota prin care **Gauss** anunță *Teoria resturilor bipătrate*, partea a II-a, publicată în „Göttingsche Anzeigen", din 1831.

Transpunerea teoriei resturilor bipătrate în domeniul numerelor complexe ar putea să pară nepotrivită și nenaturală unora mai puțin familiarizați cu natura mărimilor imaginare și care au idei false despre aceasta, și ar putea duce la opinia că cercetarea ar rămîne astfel oarecum în aer, ar căpăta o poziție oscilantă și s-ar depărta cu totul de intuitivitate. Nimic n-ar fi mai neîntemeiat decît o astfel de opinie. Din contră, aritmetica numerelor complexe este capabilă de cea mai mare intuitivizare.... Așa cum numerele întregi absolute sînt reprezentate printr-un șir de puncte pe o linie dreaptă, ordonate la egală distanță, șir în care punctul inițial reprezintă numărul zero, următorul numărul 1 etc. și așa cum apoi pentru reprezentarea numerelor negative este nevoie numai de prelungirea nelimitată a acestui șir în partea opusă punctului inițial, tot astfel, pentru reprezentarea numerelor întregi complexe este nevoie numai să adăugăm că acel șir să fie considerat situat într-un anumit plan nelimitat și să se ia paralel cu acest șir, pe ambele părți, un număr nemărginit de șiruri asemănătoare la distanțe egale între ele, astfel încît să avem în fața noastră, în loc de un șir de puncte, un sistem de puncte, care să se poată ordona în două feluri în șiruri de șiruri, și să servească la împărțirea întregului plan în simple pătrate egale. Punctul de lîngă zero din primul șir adăugat pe partea șirului care reprezintă numerele reale se referă atunci la numărul i, așa cum punctul de lîngă zero din primul șir adăugat pe cealaltă parte, se referă la $-i$ etc. În această reprezentare, efectuarea operațiilor aritmetice în raport cu mărimile complexe devine capabilă de o intuitivizare care nu lasă nimic de dorit.

Pe de altă parte, adevărata metafizică a mărimilor imaginare este pusă într-o nouă lumină.

Aritmetica noastră generală, al cărei cuprins depășește așa de mult geometria anticilor, este în întregime creația epocii moderne. Inițial, pornind de la conceptul numerelor întregi absolute, ea și-a lărgit treptat domeniul; la numerele întregi s-au adăugat cele fracționare, la cele raționale, cele iraționale, la cele pozitive, cele negative, la cele reale, cele imaginare. Această extindere s-a făcut însă la început totdeauna cu pași plini de ezitare. Primii algebriști numeau încă false rădăcinile negative ale ecuațiilor, și ele sînt chiar false acolo unde problema la care ele se referă este astfel formulată încît specificul mărimii căutate nu admite ceva opus. Însă pe cît de puțin este criticabilă admiterea numerelor fracționare în aritmetica generală, deși există așa de multe lucruri numărabile unde numărul fracționar n-are sens, tot atît de puțin li se pot contesta, în aritmetica generală, numerelor negative drepturi egale cu cele pozitive, pe motivul că nenumărate lucruri nu admit un opus: realitatea numerelor negative este suficient justificată, pentru că ele găsesc un substrat adecvat în nenumărate alte cazuri. În această privinţă sîntem de multă vreme lămuriţi: însă numerele imaginare opuse celor reale — numite impropriu odinioară, pe ici pe colo şi acum, imposibile — sînt încă din ce în ce mai puţin încetăţenite şi mai mult tolerate, şi apar deci mai mult ca un joc de semne golit de conţinut în sine, căruia i se contestă total un substrat inteligibil, fără a voi, totuşi, să se dispreţuiască bogatul tribut pe care-l plăteşte pînă la urmă acest joc de semne tezaurului ~~relaţ~~iilor mărimilor reale.

Autorul a studiat această parte foarte importantă a matematicii de mulţi ani dintr-un punct de vedere diferit, admiţîndu-se ca substrat al mărimilor imaginare un obiect ca şi în cazul mărimilor negative. În tratatul de faţă sînt indicate trăsăturile fundamentale ale chestiunii; ele constau în următoarele:

Numerele pozitive şi negative se pot aplica numai acolo unde ceva ce se numără are un opus, care gîndit împreună cu acest ceva egalează nimicul. Mai precis, această ipoteză are loc numai acolo unde ceea ce se numără nu sînt substanţe (obiecte inteligibile în sine), ci relaţii între cîte două obiecte.

Dacă însă obiectele sînt de aşa natură încît nu pot fi ordonate într-un şir, chiar dacă este nemărginit, ci se pot ordona numai în şiruri de şiruri sau, ceea ce este acelaşi lucru, ele formează o varietate cu două dimensiuni, apoi, dacă se întîmplă cu relaţiile dintre şiruri sau cu trecerile dintr-un şir în altul la fel cum se întîmpla înainte cu trecerile de la un termen al unui şir la alt termen al aceluiaşi şir, atunci şi pentru măsurarea trecerii de la un termen al sistemului la altul este nevoie, evident, în afară de unităţile dinainte $+1$ şi -1, de încă alte două unităţi, opuse şi ele între ele, $+i$ şi $-i$.

Aceste relaţii se pot „intuitiviza" numai printr-o reprezentare în spaţiu, şi cazul cel mai simplu este acela în care nu există nici un motiv de a ordona simbolurile obiectelor altfel decît pătratic, şi anume descompunînd în pătrate un plan nemărginit prin două sisteme de linii paralele care se întretaie perpendicular şi alegînd punctele de intersecţie ca simboluri. Fiecare punct A are astfel aici patru vecini, şi dacă notăm prin $+1$ relaţia lui A faţă de un punct vecin, atunci aceea care trebuie notată prin -1 este determinată de la sine, în timp ce oricare din celelalte două se poate alege ca $+i$ sau se poate lua punctul relativ la $+i$, după plac, la dreapta sau la stînga. În limba matematicienilor, aceasta însă înseamnă că $+i$ este medie proporțională dintre $+1$ și -1 sau corespunde semnului $\sqrt{-1}$: noi intenționat nu spunem media proporțională, căci $-i$ are, evident, aceeași pretenție. Aici, așadar, este perfect justificată dovedirea unei semnificații intuitive a lui $\sqrt{-1}$ și nu este nevoie de mai mult pentru a se admite această mărime în domeniul obiectelor aritmeticii.

Am crezut că facem un serviciu prietenilor matematicii, prezentînd pe scurt momentele principale ale unei noi teorii a așa-numitelor mărimi imaginare. Dacă pînă acum acest obiect a fost considerat dintr-un punct de vedere fals și s-a găsit aici o obscuritate misterioasă, acest lucru trebuie atribuit în cea mai mare parte denumirilor puțin convenabile. Dacă $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nu s-ar fi numit unitate pozitivă, negativă, imaginară (sau chiar imposibilă), ci — de pildă — unitate directă, inversă, laterală, cu greu s-ar mai fi putut vorbi de o astfel de obscuritate.

B. Analiza

Dezvoltarea impetuoasă a analizei care începuse în secolul al XVIII-lea, după descoperirile lui *Newton* și *Leibniz*, a dat imbold unor anumite critici. De pildă, calculul nechibzuit cu serii infinite a dus la contradicții. În consecință, s-a atras atenția asupra conceptului de convergență (*Gauss*, *Abel* și alții) și s-a făcut și încercarea de a ocoli conceptul de infinit mic (calculul variațional al lui *Lagrange*). Problema fundamentării riguroase a analizei infinitului se născuse.

1. Demonstrația lui B. Bolzano pentru teorema valorii intermediare

Bernhard Bolzano (1781—1848) a fost unul dintre primii care s-au preocupat stăruitor să găsească demonstrații riguroase în domeniul bazelor analizei. El a dat în 1817 o demonstrație „pur analitică" pentru teorema valorii intermediare pentru funcții reale continue, din care prezentăm un fragment fundamental care se referă la limita unui șir convergent.

Deşi *Bolzano* s-a străduit să fie extrem de riguros, demonstraţia sa n-a rezistat totuşi criticii obişnuite ulterioare, deoarece în ea conceptul de mărime reală (adică în esenţă de „număr" iraţional) nu este precis definit şi de aceea rămîne oarecum obscur.

Din *Demonstraţie pur analitică a teoremei că între două valori care dau rezultate opuse se află cel puţin o rădăcină reală a ecuaţiei.*

Teoremă. Dacă un şir de mărimi

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots\ F_n(x),\ \ldots,\ F_{n+r}(x),$$

are proprietatea că diferenţa dintre termenul $F_n(x)$ de rang n şi orice termen $F_{n+r}(x)$, care urmează, oricît ar fi aceştia de depărtaţi între ei, rămîne mai mică decît orice mărime dată, dacă luăm n oricît de mare, atunci există totdeauna o anumită mărime constantă, şi numai una singură, de care termenii acestui şir se apropie necontenit şi de care se pot apropia oricît de mult vrem, dacă şirul se continuă suficient de mult.

Demonstraţie. Că un astfel de şir, aşa cum îl descrie teorema, este posibil, rezultă limpede din § 6. Însă ipoteza că există mărimea X, de care termenii acestui şir, oricît am continua să mai adăugăm termeni, se apropie oricît de mult vrem nu conţine desigur nimic imposibil, dacă nu se presupune încă faptul că această mărime este numai una singură şi constantă. Căci dacă ar trebui să fie o mărime variabilă, atunci desigur am putea s-o presupunem totdeauna de aşa natură, încît să se apropie de termenul $F_n(x)$, cu care tocmai acum se compară, cu care chiar se confundă complet. Faptul însă că mărimea, care are această proprietate a apropierii de termenii şirului nostru, este şi constantă, este o ipoteză care nu conţine nici o imposibilitate; ceea ce rezultă din faptul că în această ipoteză este posibil să determinăm această mărime cu orice precizie dorită. Căci în cazul că am voi să determinăm X cu o astfel de precizie, încît diferenţa dintre valoarea presupusă şi cea adevărată a lui X să nu depăşească o mărime mică dată d, atunci rămîne numai să se caute în şirul dat un termen $F_n(x)$ cu proprietatea că fiecare termen $F_{n+r}(x)$ următor diferă de el cu mai puţin decît $\pm d$. Un astfel de termen $F_n(x)$ trebuie să existe după ipoteză. Acum afirm că valoarea lui $F_n(x)$ diferă de adevărata valoare a mărimii cel mult cu $\pm d$. Căci dacă la un n anumit mărim arbitrar pe r, atunci diferența $X - F_{n+r}(x) = \pm\omega$ poate deveni oricît de mică vrem. Diferența $F_n(x) - F_{n+r}(x)$ rămîne însă totdeauna, oricît de mare am lua pe r, $< \pm d$. Deci și diferența $X - F_n(x) = X - F_{n+r}(x) - [F_n(x) - F_{n+r}(x)]$, trebuie să rămînă totdeauna $< \pm(d + \omega)$. Deoarece însă diferența pentru un n anumit este o mărime constantă, iar ω dimpotrivă poate fi făcută prin mărirea lui r oricît de mică vrem, atunci trebuie ca $X - F_n(x)$ să fie $=$ sau $< \pm d$. Căci dacă ar fi mai mare, de pildă $= \pm(d + e)$, atunci ar fi imposibil să se mențină relația $d + e < d + \omega$, adică $e < \omega$, dacă ω se micșorează din ce în ce mai mult. Adevărata valoare a lui X diferă deci cel mult cu cantitatea d de valoarea pe care o are termenul $F_n(x)$ și de aceea se poate determina oricît de precis vrem, deoarece d se poate lua oricît de mic vrem. Există deci o mărime reală, de care termenii șirului discutat de noi se apropie oricît de mult vrem, dacă vom continua suficient de mult. Dar există numai o singură mărime de acest fel. Căci dacă am presupune că în afară de X ar exista încă o altă mărime constantă Y, de care termenii șirului se apropie oricît de mult vrem, dacă se continuă suficient de mult, atunci diferențele $X - F_{n+r}(x) = \omega$ și $Y - F_{n+r}(x) = \omega_1$ ar trebui să devină oricît de mici vrem, dacă r devine suficient de mare. Același lucru ar trebui să fie valabil și despre propria lor diferență, adică despre $X - Y = \omega - \omega_1$; ceea ce, dacă X și Y trebuie să fie mărimi constante, este imposibil în caz că nu se presupune $X = Y$.

2. Evoluția conceptului de funcție după H. Hankel

Pe lîngă conceptul de limită și conceptul de continuitate, care se definește cu ajutorul celui de limită, concepte pe care îndeosebi *A. L. Cauchy* (1789–1857) le pune la baza analizei expusă sistematic, conceptul de funcție, ale cărui începuturi datează poate de la *Leibniz*, se dovedește a fi un concept fundamental, dar și problematic. În secolul al XVIII-lea se impusese conceptul de „funcție complet arbitrară" cu prilejul problemei coardei vibrante. La *Leonhard Euler* (1707–1783) funcțiile sînt date în două moduri: mai întîi, printr-o „expresie analitică" și în al doilea rînd, printr-o curbă trasată „cu mîna liberă". Surprinzătoarea capacitate a seriilor trigonometrice, întrebuințate poate pentru prima oară de către *Daniel Bernoulli* (1700—1782) și cercetate amănunțit de către *J. B. J. Fourier* (1786, pînă în 1830), de a reprezenta și funcțiile aparent cu totul neregulate, a condus în sfîrșit la lucrările lui *P. G. Lejeune Dirichlet* (1805—1859) asupra limitei posibilităților de reprezentare și, în legătură cu aceasta, la un concept extrem de general, care tocmai din această cauză nu este lipsit de dificultăți. Evoluția respectivă a fost zugrăvită cu măiestrie de către **Hermann Hankel** (1839—1873) în următoarea analiză istorică din 1870.

Ceea ce caracterizează matematica antică în comparație cu știința noastră modernă nu este numai preferința categorică pentru sinteză și totala respingere a metodelor generale; în afară de acest contrast mai mult exterior, formal, mai există și unul profund real, care își are originea în poziția diferită adoptată de ambele față de utilizarea științifică a conceptului de variație (*Veränderlichkeit*).

Căci în timp ce anticii nu folosesc în sistemul lor riguros niciodată conceptul de mișcare, de expresie spațială a variației, din scrupule transmise de școala filozofică a eleaților, și chiar atunci cînd tratează curbele produse foronomic[1] ei întrebuințează conceptul de mișcare numai în treacăt, dimpotrivă, matematica modernă datează din momentul în care *Descartes*[2] a pășit de la tratarea pur algebrică a ecuațiilor la cercetarea variațiilor cantitative pe care le suportă o expresie algebrică, în timp ce o mărime, notată în expresie în mod general, parcurge un șir continuu de valori.

Dependența în care se află atunci șirurile de valori a două mărimi variabile își găsește expresia intuitivă în relația dintre ordonatele și abscisele unei linii curbe, și atîta vreme cît cercetarea s-a mărginit la cazuri particulare n-a fost nevoie de o denumire specială.

---

[1] Foronomie este numele care se dă științei despre mișcarea corpurilor fără a se lua în considerare masa lor și cauzele mișcării. — *N. T.*

[2] Deși Descartes nu folosește în mod expres conceptul de funcție, el a pus totuși în circulație ideea unei variabile ale cărei schimbări depind de schimbările succesive ale valorilor unei alte mărimi. Comentatorii operei carteziene au semnalat încă de mult că noua matematică dezvoltată în *Geometria* lui Descartes era „știința despre dependențele funcționale, notate în expresii simbolice, subordonate regulilor unui anumit algoritm și, totodată, reprezentabile geometric cu ajutorul unor linii plane" (Cf., de pildă, notele lui Iușkevici la ediția rusă a *Discursului asupra metodei*, Editura Academiei de Științe a U.R.S.S., p. 527—și Zeuthen, *Istoria matematicii în secolele XVI și XVII*, p. 242. — *C. V.*

Descoperirea calculului infinitezimal, cu metodele sale cuprinzătoare, a impus o denumire generală a acestei relații de dependență, pe care *Joh. Bernoulli,* după procedeul lui *Leibniz* a denumit-o în anul 1718 „funcție".

Conceptul de funcție a devenit de acum înainte punctul de plecare fundamental pentru analiză, ale cărei progrese epocale sînt intim legate de elaborările pe care acest concept le-a suferit treptat.

Euler, care a reprezentat în chipul cel mai complet conștiința științifică de la mijlocul secolului trecut, dă o definiție în concordanță esențială cu predecesorii săi.

> *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

Prin „expresie analitică", a cărei semnificație Euler nu socotește necesar să o determine mai de aproape, nu trebuie să înțelegem altceva decît o dependență a mărimilor, formată după tipul funcțiilor algebrice. Căci funcțiile transcendente se considerau determinate prin dezvoltări care sînt formate dintr-un număr de operații elementare (adunare, scădere, înmulțire și împărțire), așa cum cele algebrice sînt determinate printr-un număr finit de astfel de operații, fără ca să-și facă scrupule în privința admisibilității unei astfel de continuări nemărginite a operațiilor. La acele patru operații se mai adăugară apoi diferențierea și integrarea, ca operații proprii analizei.

Sprijinindu-se mereu pe acel model al funcțiilor algebrice, toate proprietățile generale observate la funcțiile algebrice, continuitatea lor specială, singularitățile lor, modul lor particular de a deveni discontinue sau infinite, au fost transpuse imediat la toate funcțiile. Pentru că la funcțiile algebrice se puteau deduce direct dezvoltarea în serie după puterile unui increment, raportul diferențialelor și integrala, admiterea existenței unei astfel de serii, a raportului diferențelor și a integralei s-au considerat nu numai justificate în general pentru toate funcțiile, dar în genere nu s-a ajuns la ideea că aici este implicată o afirmație, fie ea axiomă sau teoremă; de aceea apărea atît de evidentă această transpunere a proprietăților funcțiilor algebrice la cele transcendente, transpunere sprijinită în aparență de intuiția geometrică a curbelor care reprezintă funcțiile; iar exemplele în care funcțiile analitice propriu-zise arătau singularități, care erau deosebite în mod esențial de acelea ale funcțiilor algebrice, rămîneau complet neobservate.

Dacă niște curbe trasate arbitrar se abăteau într-o privință oarecare de la comportarea curbelor algebrice, atunci erau numite *curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares*, în contrast cu *curvae continuae*, conținute într-o ecuație, și exista convingerea că acelea nu s-ar putea în nici un fel reprezenta printr-o ecuație analitică. Prin faptul că în problema vibrațiilor coardelor s-a introdus totuși, ca funcție arbitrară, dependența ordonatei unor astfel de curbe față de abscisă, se depășea deja definiția propriu-zisă a conceptului de funcție, și d'Alembert avea dreptate cînd afirma că aceasta ar fi *contre les règles d'analyse*.

Acest lucru s-a întîmplat într-o măsură mult mai puternică atunci cînd matematicienii s-au simțit siliți să determine, pentru toate valorile reale ale argumentului, funcțiile definite pentru un anumit interval al variabilelor, chiar dacă definiția lor inițială era limitată la un anumit domeniu. Primul exemplu al unei astfel de prelungiri a fost determinarea logaritmilor numerelor negative. Prin aceasta se părăsise însă complet terenul pe care ne situasem prin definiția dependenței funcționale și se crease un nou principiu, pe care cred că îl putem exprima oarecum în felul următor:

> Dacă pentru un domeniu al variabilelor este dată o dezvoltare care nu poate fi prelungită nemijlocit dincolo de limitele acestuia, deoarece în afară ea își pierde semnificația; dacă, mai departe, pentru un alt domeniu al variabilelor este dată o altă dezvoltare, care nu poate fi prelungită în primul domeniu și nu există nici o dezvoltare valabilă pentru ambele domenii, atunci cele două dezvoltări trebuie privite ca aparținînd unei funcții, dacă funcția prezintă în fiecare din cele două domenii aceleași proprietăți.

Faptul că prin aceasta s-a formulat un concept despre funcție esențialmente nou, s-a putut observa cu atît mai puțin cu cît acest principiu n-a fost recunoscut niciodată ca atare, cel puțin nu a fost formulat explicit, și astfel nici nu s-a socotit justificat să se cerceteze mai precis ce proprietăți și ce relații între valorile funcțiilor se cer pentru a se garanta unitatea dependenței funcționale în două dezvoltări analitice diferite pentru domenii diferite de mărimi.

O serie întreagă de propoziții demonstrate insuficient sau eronat, nu suficient determinate, precum și o serie de propoziții complet false constituie o mărturie îndestulătoare cît de nesigur a fost fundamentul pe care se clădise toată teoria funcțiilor.

Întreaga concepție despre teoria funcțiilor, pe care o voi numi pe scurt concepția lui *Euler*, a primit prima lovitură puternică în anul 1807 prin însemnata descoperire a lui *Fourier*, potrivit căreia este posibil să se reprezinte prin serii periodice nu numai funcțiile analitice, pe lîngă funcțiile care se pot dezvolta în serii de puteri (*funct. continuae*), dar și funcții cu totul arbitrare, care nu verifică nici o lege simplă sau care urmează legi diferite în diferitele lor părți (*funct. discontinuae*), funcții pe care le vom numi nelegitime.

Prin aceasta, însă, s-a recunoscut, desigur cu ezitări, că întregul concept mai vechi a devenit imposibil: atunci cînd aceste *functiones discontinuae* se puteau reprezenta și prin expresii analitice, proprietățile funcțiilor algebrice nu mai puteau fi transpuse ca tipice la toate funcțiile transcendente; iar atunci cînd una și aceeași serie a putut reprezenta legi analitice diferite, pentru diferite domenii opuse ale variabilelor, principiul continuării în sine formulat mai sus a căzut.

N-a mai rămas decît să cadă ca ceva fără importanță atît axioma conform căreia proprietățile funcțiilor algebrice care se referă la continuitatea lor, la dezvoltarea lor în serii de puteri etc., aparțin de asemenea tuturor funcțiilor analitice, cît și, în consecință, însăși cerința conform căreia o funcție trebuie să fie reprezentabilă analitic. Astfel, după ce am tăiat nodul, putem da următorul enunț:

> Se spune că y este o funcție de x dacă fiecărei valori a mărimii variabile x dintr-un interval anumit îi corespunde o anumită valoare a lui y, indiferent dacă y depinde sau nu de x în tot intervalul după aceeași lege, indiferent dacă dependența poate fi exprimată sau nu prin operații matematice.

Această pură definiţie nominală, căreia în cele ce urmează îi voi da numele lui *Dirichlet* (pentru că se află la baza lucrărilor sale asupra seriilor *Fourier*, în care el a arătat inconsistenţa neîndoielnică a acelui concept mai vechi), nu este însă suficientă pentru necesităţile analizei, pentru că funcţiile de acest fel nu posedă proprietăţi generale şi astfel încetează toate relaţiile valorilor funcţiilor pentru diferite valori ale argumentului.

S-a născut astfel o lacună sensibilă în conceptele fundamentale analitice, care, deşi este pretutindeni trecută sub tăcere, cu toate acestea nu este mai puţin prezentă; ceea ce ne arată chiar cele mai bune manuale de analiză. Unul defineşte funcţiile în esenţă în sensul lui *Euler*, al doilea cere ca y să varieze o dată cu x „conform unei legi", fără să se dea o clarificare a acestui concept obscur, al treilea manual defineşte funcţiile în felul lui *Dirichlet*, al patrulea nu le defineşte de loc; însă toate deduc din conceptul de funcţie concluzii care nu sînt conţinute în el.

Era necesar să se depăşească conceptul lui *Dirichlet*, aşa cum a început să facă deja *Cauchy* încă din anul 1815. Dar de-abia în epoca recentă (1851) *Riemann* a pus din nou o temelie sigură cu un adevărat spirit filozofic, prin faptul că plecînd de la conceptul lui *Dirichlet*, el a fundamentat conceptul de funcţie (monogenă) de o variabilă complexă şi astfel a dat iarăşi un conţinut acelei definiţii goale, care s-a apropiat de conţinutul conceptului mai vechi.

Din nefericire, nu i-a fost hărăzit întemeietorului teoriei funcţiilor de variabilă complexă să construiască sistemul său pe toate faţetele şi după un plan unitar, a cărui măreţie putem s-o deducem din înseşi frumoasele fragmente cunoscute de noi.

Stîlpii principali ai noului sistem nu sînt consideraţi peste tot destul de solizi şi de siguri pentru ca din ei să se elaboreze întreaga construcţie a analizei; îndeosebi principiul numit cu nobilă modestie de către *Riemann* cu numele lui *Dirichlet* a fost din nou în multe feluri atacat şi apărat.

Criticile provin din anumite cazuri de excepţie imaginabile *a priori*, cazuri în care funcţiile prezintă discontinuităţi care nu pot fi excluse din capul locului şi care totuşi alterează raţionamentele ce am putea spera să aplicăm la toate funcţiile care verifică definiţia.

Eu cred că singura cale de a lămuri aceste discontinuități și de a pregăti astfel o decizie asupra naturii funcțiilor ar fi să se renunțe la toate reprezentările de care și matematicianul cel mai modern s-a molipsit de la conceptul lui *Euler* despre funcție, și în primul rînd să se explice multiplicitatea relațiilor de mărime posibile între două variabile, relații conținute în conceptul pur de funcție al lui *Dirichlet,* preocupîndu-se totodată cu atenție deosebită de funcțiile nelegitime studiate pînă acum puțin sau de loc.

3. Teoria lui R. Dedekind despre numerele iraționale

Toate străduințele, menționate pînă acum, în jurul fundamentelor analizei suferă de defectul esențial că noțiunea de mărime continuă, care stă totuși la baza întregii analize, rămîne nelămurită, așa cum se observase încă cu ocazia demonstrației dată de *Bolzano* propoziției despre valoarea intermediară. În deceniul al optulea al secolului al XIX-lea se dau mai multe definiții ale numerelor reale (raționale și iraționale).

Mai întîi, vom prezenta părțile principale ale lucrării fundamentale, scrisă de **Richard Dedekind** (1831–1916) în 1872: *Continuitatea și numerele iraționale,* lucrare în care numerele reale sînt definite ca „tăieturi" în domeniul numerelor raționale.

Considerațiile care constituie obiectul acestei mici scrieri datează din toamna anului 1858. Mă găseam pe atunci, ca profesor la Politehnica confederată de la Zürich, pentru prima oară în situația de a trebui să expun elementele calculului diferențial și am simțit cu această ocazie, mai acut ca oricînd, lipsa unei baze științifice a aritmeticii. Pentru conceptul de apropiere a unei mărimi variabile de o valoare limită fixă și îndeosebi pentru demonstrarea propoziției că orice mărime care crește constant, dar nu peste orice limită, trebuie desigur să se apropie de o valoare limită, am recurs la evidențe geometrice. Și astăzi socotesc această folosire a intuiției geometrice în primul stadiu al predării calculului diferențial ca extraordinar de utilă, ba chiar indispensabilă, din punct de vedere didactic, cînd nu vrem să pierdem prea mult timp. Dar nimeni nu va tăgădui că acest fel de introducere în calculul diferențial nu poate revendica o valoare științifică. Pe atunci, pentru mine acest sentiment de nesatisfacție a fost așa de puternic încît am luat hotărîrea fermă să reflectez tot timpul, pînă cînd voi fi găsit o fundamentare pur aritmetică și total riguroasă a principiilor analizei infinitezimale. Se spune așa de des că obiectul calculului diferențial ar fi mărimile continue și totuși nicăieri nu se dă o explicație a acestei continuități și chiar cele mai riguroase expuneri ale calculului diferențial nu-și bazează demonstrațiile pe continuitate, ci ele apelează sau la reprezentări geometrice mai mult sau mai puțin conștiente, sau la reprezentări provocate de geometrie, sau aceste expuneri se sprijină pe propoziții care nu sînt demonstrate niciodată pur aritmetic. Din această categorie face parte, de pildă, propoziția menționată mai sus, și o cercetare mai precisă m-a convins că această propoziție, sau chiar oricare propoziție echivalentă, poate fi privită oarecum ca un fundament suficient pentru analiza infinitezimală. Este numai vorba să se descopere adevărata sa origine în elementele aritmeticii, și astfel să se obțină, în același timp, o definiție reală a naturii continuității. Acest lucru mi-a reușit la 24 noiembrie 1858.

§ 1

Proprietățile numerelor raționale

Dezvoltarea aritmeticii numerelor raționale se presupune aici cunoscută, totuși socotesc că este bine să scot în evidență cîteva momente principale, fără a le discuta, numai cu scopul de a consemna punctul de vedere pe care mi-l însușesc în cele ce urmează. Eu privesc întreaga aritmetică ca pe o urmare necesară, sau cel puțin naturală, a celui mai simplu act aritmetic, numărarea; însăși numărarea nu este nimic altceva decît creația succesivă a șirului infinit de numere întregi pozitive, în care fiecare individ este definit prin cel imediat premergător; actul cel mai simplu este trecerea de la un individ deja creat la cel care urmează să fie creat. Lanțul acestor numere formează chiar în sine un auxiliar extrem de util pentru mintea omenească și oferă o bogăție inepuizabilă de legi ciudate la care se ajunge prin introducerea celor patru operații aritmetice fundamentale. Adunarea este rezumarea într-un act unic a unei repetiții arbitrare a actului cel mai simplu de care am vorbit mai înainte, și din adunare derivă în același mod înmulțirea. În timp ce aceste două operații se pot totdeauna efectua, operațiile inverse, scăderea și împărțirea, sînt permise numai cu îngrădiri. Oricare ar fi fost motivul cel mai apropiat, oricare ar fi fost comparațiile sau analogiile cu experiențe, oricare ar fi fost intuițiile ce ar fi putut duce la acest lucru, toate acestea pot fi lăsate la o parte; destul că tocmai această îngrădire în efectuarea operațiilor indirecte a devenit de fiecare dată adevărata cauză a unui nou act de creație; astfel au fost create prin mijlocirea minții omenești numerele negative și fracționare și prin sistemul tuturor numerelor raționale s-a dobîndit un instrument de o desăvîrșire infinit mai mare. Acest sistem, pe care îl voi nota cu R, posedă, înainte de orice, completitudine și închidere (*Abgeschlossenheit*), însușire pe care în alt loc am denumit-o caracteristica unui corp numeric și care constă în faptul că cele patru operații fundamentale între două elemente din R se pot totdeauna efectua, adică în faptul că rezultatul acestor operații este totdeauna tot un anumit element din R, dacă exceptăm singurul caz al împărțirii prin numărul zero.

Pentru scopul nostru imediat următor este însă și mai importantă o altă proprietate a sistemului R, care se poate exprima în sensul că sistemul R formează un domeniu bine ordonat de o dimensiune, infinit în cele două părți opuse. Ce trebuie să înțelegem prin aceasta, se indică suficient prin alegerea expresiilor împrumutate de la reprezentările geometrice; este cu atît mai necesar să scoatem în evidență caracteristicile corespunzătoare pur aritmetice pentru ca să nu păstrăm nici măcar aparența că aritmetica ar avea nevoie de astfel de reprezentări străine de ea.

Dacă trebuie să se exprime faptul că semnele a și b înseamnă același număr rațional, atunci se pune atît $a = b$ cît și $b = a$. Deosebirea între două numere raționale a, b se arată prin faptul că diferența $a - b$ are sau valoare pozitivă, sau valoare negativă. În primul caz, a se numește mai mare decît b, b mai mic decît a, ceea ce se arată și prin semnele $a > b$, $b < a$. Pentru că în al doilea caz $b - a$ are o valoare pozitivă, atunci avem $b > a$, $a < b$. În privința acestei duble posibilități de neegalitate, sînt valabile următoarele legi:

I. Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$. Ori de cîte ori a, c sînt două numere diferite (sau neegale) și dacă b este mai mare decît un număr și mai mic decît altul, vom exprima acest lucru pe scurt, fără să ne temem de reminiscențele reprezentărilor geometrice: b este situat între cele două numere a, c.

II. Dacă a, c sînt două numere diferite, există totdeauna infinit de multe numere diferite b care sînt situate între a și c.

III. Dacă a este un număr determinat, toate numerele sistemului R se împart în două clase, A_1 și A_2, fiecare din ele conținînd infinit de multe elemente; prima clasă A_1 cuprinde toate numerele a_1 care sînt $< a$, a doua clasă A_2 cuprinde toate numerele a_2 care sînt $> a$; însuși numărul a poate fi atribuit primei sau celei de-a doua clase, și atunci el este respectiv cel mai mare număr din prima clasă sau cel mai mic număr din a doua clasă. În orice caz, împărțirea sistemului R în cele două clase A_1, A_2 este de așa natură, încît orice număr din prima clasă A_1 este mai mic decît orice număr din a doua clasă A_2.

§ 2

Comparația numerelor raționale cu punctele unei linii drepte

Proprietățile numerelor raționale, pe care le-am scos în evidență mai sus, amintesc de relațiile reciproce de poziție dintre punctele unei linii drepte L. Dacă cele două direcții opuse existente în ea se deosebesc prin ,,dreapta'' și ,,stînga'', și dacă p, q sînt două puncte diferite, atunci sau p este situat la dreapta lui q și, totodată, q la stînga lui p, sau invers, q este situat la dreapta lui p și, totodată, p la stînga lui q. Al treilea caz este imposibil dacă p, q sînt puncte în realitate diferite. În privința diferenței de poziție există următoarele legi:

I. Dacă p este situat la dreapta lui q și, de asemenea, q la dreapta lui r, atunci și p este situat la dreapta lui r; se spune că q este situat între punctele p și r.

II. Dacă p, r sînt două puncte diferite, există totdeauna o infinitate de puncte q situate între p și r.

III. Dacă p este un anumit punct în L, atunci toate punctele se împart în două clase, P_1 și P_2, fiecare conținînd o infinitate de elemente; prima clasă P_1 conține toate punctele p_1 situate la stînga lui P și a doua clasă P_2 cuprinde toate punctele p_2 situate la dreapta lui p; punctul p poate fi atribuit arbitrar sau primei sau celei de-a doua clase. În orice caz, împărțirea dreptei

L în cele două clase sau părți P_1, P_2 este de așa natură, încît fiecare punct al primei clase P_1 este situat la stînga fiecărui punct al clasei a doua P_2.

Această analogie dintre numerele raționale și punctele unei drepte se transformă vădit într-o adevărată corelație atunci cînd se alege pe dreaptă un anumit punct ca origine sau zero și o anumită unitate de lungime pentru măsurarea segmentelor. Cu ajutorul acesteia din urmă se poate construi pentru orice număr rațional a o lungime corespunzătoare și dacă se duce această lungime pe dreaptă din punctul o spre dreapta sau spre stînga, după cum a este pozitiv sau negativ, se obține o anumită extremitate p, care poate fi denumită punctul corespunzător numărului a; numărului rațional zero îi corespunde punctul o. În acest mod fiecărui punct rațional a, adică fiecărui element din R, îi corespunde numai un singur punct p, adică un element în L. Dacă celor două numere a, b le corespund respectiv cele două puncte p, q și dacă $a > b$, atunci p se află la dreapta lui q. Legilor I, II, III din paragraful precedent le corespund în întregime legile I, II, III din acest paragraf.

§ 3

Continuitatea liniei drepte

Faptul că există o infinitate de puncte pe dreapta L care nu corespund nici unui număr rațional este de cea mai mare importanță. Dacă punctul p corespunde numărului rațional a, atunci se știe că lungimea $\overline{op}$ este comensurabilă cu unitatea de lungime invariabilă folosită la construcție, adică există o a treia lungime, o așa-numită măsură comună, pentru care cele două lungimi sînt chiar multipli întregi. Dar înșiși grecii antici au știut și au dovedit că există lungimi incomensurabile cu o unitate de lungime dată, de pildă diagonala pătratului, a cărui latură este unitate de lungime. Dacă se duce pe dreaptă o astfel de lungime din punctul o, se obține o extremitate care nu corespunde nici unui număr rațional. Pentru că se poate demonstra ușor mai departe că există o infinitate de lungimi incomensurabile cu unitatea de lungime, putem afirma: dreapta L este infinit mai bogată în elemente punctuale decît este domeniul R al numerelor raționale în elemente numerice.

Dacă vrem, aşa cum doresc mulţi, să urmărim şi din punct de vedere aritmetic toate fenomenele de pe dreaptă, atunci nu sînt suficiente pentru aceasta numerele raţionale, şi de aceea devine absolut necesar ca instrumentul *R*, construit prin crearea numerelor raţionale, să fie perfecţionat prin crearea de noi numere de aşa fel, încît domeniul numerelor să dobîndească aceeaşi completitudine sau, cum vom spune imediat, aceeaşi continuitate ca şi linia dreaptă.

Consideraţiile de pînă acum sînt atît de cunoscute şi de familiare tuturor, încît mulţi vor socoti repetarea lor ca foarte superfluă. Totuşi am apreciat ca necesară această recapitulare pentru a pregăti în mod corespunzător chestiunea principală. Introducerea numerelor iraţionale, aşa cum s-a făcut obişnuit pînă în prezent, se leagă strîns tocmai de conceptul de mărime extensivă — concept care însă nu este nicăieri definit riguros — şi explică numărul ca rezultat al măsurării unei astfel de mărimi cu ajutorul unei alte mărimi de acelaşi fel. În loc de aceasta eu cer ca aritmetica să se dezvolte din ea însăşi. Se poate admite, în general, că astfel de asocieri cu reprezentări nearitmetice au dat primul imbold spre lărgirea conceptului de număr (deşi nu s-a întîmplat de loc aşa în cazul introducerii numerelor complexe) ; dar aici nu există absolut nici un temei de a accepta aceste consideraţii străine chiar în aritmetică, în ştiinţa numerelor. După cum numerele raţionale negative şi fracţionare au fost produse prin creaţie liberă şi după cum regulile de calcul cu aceste numere pot şi trebuie să se reducă la regulile de calcul cu numere întregi pozitive, tot astfel trebuie să tindem la a defini complet şi numerele iraţionale numai cu ajutorul numerelor raţionale. Rămîne numai întrebarea : cum?

Comparaţia de mai înainte dintre domeniul *R* al numerelor raţionale şi o dreaptă a dus la recunoaşterea caracterului lacunar, incomplet sau discontinuu al domeniului *R*, în timp ce dreptei îi atribuim completitudine, nelacunaritate sau continuitate. În ce constă propriu-zis această continuitate? Răspunsul la această întrebare trebuie să conţină totul şi numai prin acest răspuns vom căpăta o bază ştiinţifică pentru cercetarea tuturor domeniilor continue. Folosind cuvinte vagi despre conexiunea neîntreruptă pînă în cele mai mici părţi nu se ajunge, natural, la nimic ; este vorba de a indica o caracteristică precisă a continuităţii, care să poată fi întrebuinţată ca bază pentru adevărate deducţii. Multă vreme am meditat zadarnic asupra acestei chestiuni, dar în sfîrșit am găsit ceea ce căutam. Această descoperire va fi apreciată de diferite persoane în diferite feluri, totuși eu cred că cei mai mulți vor găsi conținutul său foarte banal. El constă în următoarele: în paragraful anterior am atras atenția asupra faptului că fiecare punct p al dreptei împarte dreapta în două părți astfel încît fiecare punct al unei părți este situat la stînga fiecărui punct al celeilalte. Esența continuității eu o găsesc în inversare, așadar în următorul principiu:

,,Dacă toate punctele dreptei se împart în două clase astfel încît fiecare punct din prima clasă este situat la stînga fiecărui punct din cea de-a doua clasă, atunci există un punct, și numai unul singur, care generează această împărțire a tuturor punctelor în două clase, această tăiere a dreptei în două bucăți''.

Așa cum am spus, nu cred că greșesc dacă presupun că orice om va admite imediat adevărul acestei afirmații; cei mai mulți dintre cititorii mei vor fi foarte dezamăgiți auzind că prin această banalitate s-ar dezvălui misterul continuității. În legătură cu aceasta fac următoarea observație. Îmi place foarte mult cînd cineva găsește principiul de mai sus atît de evident și atît de concordant cu reprezentările sale despre o linie; căci eu nu sînt în stare să dovedesc în vreun fel că are dreptate și nimeni nu este capabil s-o facă. Ipoteza acestei proprietăți a liniei nu este nimic altceva decît o axiomă prin care noi mai întîi îi recunoaștem liniei continuitatea sa, axiomă prin care noi gîndim continuitatea în ideea de linie. Dacă spațiul are în genere o existență reală, totuși el nu trebuie necesarmente să fie continuu; nenumărate din proprietățile sale ar rămîne aceleași chiar dacă ar fi discontinuu. Și dacă am ști sigur că spațiul ar fi discontinuu, totuși nimic nu ne-ar împiedica, dacă ne-ar plăcea, să-l facem continuu prin umplerea golurilor sale în gînd; această umplere ar consta însă în crearea de noi elemente punctuale și umplerea ar trebui efectuată conform principiului de mai sus.

§ 4

Crearea numerelor iraționale

Ultimele cuvinte au dat suficiente indicații în ce fel trebuie completat domeniul discontinuu R al numerelor raționale pentru a deveni continuu. În § 1 s-a subliniat (III) faptul că fiecare număr rațional a împarte sistemul R în două clase A_1, A_2 astfel încît orice număr a_1 din prima clasă A_1 este mai mic decît orice număr a_2 din a doua clasă A_2; numărul a este sau cel mai mare din clasa A_1, sau cel mai mic din clasa A_2. Acum, dacă se dă o împărțire oarecare a sistemului R în două clase A_1, A_2, împărțire care posedă numai proprietatea caracteristică că orice număr a_1 din A_1 este mai mic decît orice număr a_2 din A_2, pentru abreviere vom numi o astfel de împărțire o tăietură și o vom nota (A_1, A_2). Putem atunci să spunem că orice număr rațional a operează o tăietură sau, propriu-zis, două tăieturi, pe care în esență nu le vom considera diferite; această tăietură are în plus proprietatea că există sau un număr maxim printre numerele din prima clasă sau un număr minim printre cele din a doua clasă. Și reciproc, dacă o tăietură posedă și această proprietate, atunci ea este generată prin acest număr maxim sau minim.

Dar ne convingem ușor că există și o infinitate de tăieturi care nu sînt generate de numere raționale...

În proprietatea că nu toate tăieturile sînt generate de numere raționale constă incompletitudinea sau necontinuitatea domeniului R al tuturor numerelor raționale.

Ori de cîte ori avem o tăietură (A_1, A_2), care nu poate fi generată de un număr rațional, noi creăm un nou număr, un număr irațional α, pe care îl considerăm definit complet prin tăietura (A_1, A_2); vom spune că numărul α corespunde acestei tăieturi sau că el generează această tăietură. Așadar, de acum încolo fiecărei tăieturi îi corespunde un anumit număr, și numai unul, rațional sau irațional, și considerăm două numere totdeauna și numai atunci ca diferite sau neegale dacă în esență ele corespund la diferite tăieturi.

Pentru a obține o bază pentru ordonarea tuturor numerelor reale, adică a tuturor numerelor raționale și iraționale, trebuie să cercetăm mai întîi relațiile dintre două tăieturi oarecare (A_1, A_2) și (B_1, B_2), care sînt generate de două numere oarecare α și β ...

Pentru că astfel s-au epuizat toate cazurile, rezultă că dintre două numere diferite unul trebuie cu necesitate să fie mai mare, celălalt mai mic, ceea ce conține două posibilități. Al treilea caz este imposibil. Acest lucru este implicit chiar în alegerea comparativului (mai mare, mai mic) pentru denumirea relației dintre α, β; dar această alegere este de abia acum justificată în mod peremptoriu. Tocmai în aceste cercetări trebuie să ne ferim cu foarte mare grijă ca, vrînd să fim cît se poate de oneşti, alegînd în pripă expresii împrumutate de la alte reprezentări deja evoluate, să nu ne rătăcim efectuînd transpuneri nepermise dintr-un domeniu în altul...

§ 5

Continuitatea domeniului numerelor reale

Ca urmare a distincţiilor pe care tocmai le-am stabilit, sistemul R al tuturor numerelor reale formează un domeniu bine ordonat, cu o singură dimensiune; în consecinţă, nu trebuie să se spună nimic mai mult decît că următoarele legi sînt valabile:

I. Dacă $\alpha > \beta$ şi $\beta > \gamma$, atunci şi $\alpha > \gamma$. Vom spune că numărul β este situat între numerele α, γ.

II. Dacă α, γ sînt două numere diferite, există totdeauna o infinitate de diferite numere β situate între α, γ.

III. Dacă α este un anumit număr, toate numerele sistemului R se împart în două clase A_1 şi A_2, care conţin fiecare o infinitate de elemente; prima clasă A_1 cuprinde toate numerele α_1 care sînt $< \alpha$, a doua clasă A_2 cuprinde toate numerele α_2 care sînt $> \alpha$; numărul α însuşi poate fi atribuit arbitrar primei clase sau celei de-a doua clase, şi atunci el este respectiv cel mai mare număr din prima clasă sau cel mai mic număr din cea de-a doua clasă. În orice caz, împărţirea sistemului R în cele două clase A_1, A_2 este astfel încît orice număr din prima clasă A_1 este mai mic decît orice număr din a doua clasă A_2 şi spunem că această împărţire s-a produs prin numărul α.

Pentru scurtime, ca să nu obosesc cititorul, suprim demonstraţiile acestor propoziţii, care decurg imediat din definiţiile paragrafelor anterioare.

În afara acestor proprietăţi, domeniul R posedă însă şi continuitate, adică este valabilă următoarea proprietate:

IV. Dacă sistemul R al tuturor numerelor reale se împarte în două clase A_1, A_2 astfel încît orice număr α_1 din clasa A_1 este mai mic decît orice număr α_2 din clasa A_2, atunci există un număr α, şi numai unul, care generează această împărţire.

§ 6

Operații cu numere reale

Pentru a reduce o operație oarecare cu două numere reale α, β la operațiile cu numere raționale, este nevoie numai ca prin tăieturile (A_1, A_2) și (B_1, B_2), care generează în sistemul R numerele α și β, să definim tăietura (C_1, C_2), care trebuie să corespundă rezultatului γ al operației. Aici mă limitez la cel mai simplu exemplu, la adunare.

Dacă c este un număr rațional oarecare, îl luăm în clasa C_1, dacă există un număr a_1 în A_1 și un număr b_1 în B_1 astfel încît suma lor să fie $a_1 + b_1 \geqslant c$; toate celelalte numere raționale c sînt primite în clasa C_2. Această împărțire a tuturor numerelor raționale în cele două clase C_1, C_2 formează, evident, o tăietură, pentru că orice număr c_1 din C_1 este mai mic decît orice număr c_2 din C_2. Dacă ambele numere α, β sînt raționale, în acest caz tăietura (C_1, C_2) este produsă de suma $\alpha + \beta$. De aceea nu contravenim definiției valabile în aritmetica numerelor raționale, cînd în toate cazurile prin suma $\alpha + \beta$ a două numere reale α, β se înțelege numărul γ care generează tăietura (C_1, C_2). Tot ca adunarea se pot defini și celelalte operații ale așa-numitei aritmetici elementare...

Urmează încă unele extrase din prefața la celebra scriere ulterioară a lui Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Ce sînt și ce reprezintă numerele?) (1888), care pe de o parte se referă la concepția sa de principiu asupra esenței matematicii (îndeosebi a aritmeticii), pe de altă parte aduc și alte observații asupra rolului sistemului complet al numerelor reale în geometrie (în problema continuității spațiului).

Din cauza caracterului prea tehnic, nu putem aici intra în amănunte asupra conținutului propriu-zis al scrierii lui Dedekind (o teorie logică a numărului și a inducției complete).

Ceea ce este demonstrabil nu trebuie să fie crezut în știință fără demonstrație. Deși această cerință pare evidentă, cred totuși că nu poate fi de loc considerată ca satisfăcută în operația de fundamentare a celei mai simple științe, anume a acelei părți din logică care tratează teoria numerelor, chiar în cele mai noi expuneri. Numind aritmetica (algebra, analiza) numai o parte a logicii, prin aceasta afirm că socotesc conceptul de număr ca fiind total independent de reprezentările sau intuițiile spațiului și timpului, că socotesc acest concept mai degrabă un produs nemijlocit al legilor gîndirii pure. La întrebarea pusă în titlul acestei scrieri răspunsul meu principal sună așa: numerele sînt creații libere ale spiritului omenesc, ele servesc ca un mijloc pentru a concepe mai ușor și mai precis varietatea lucrurilor. De-abia prin construcția pur logică a științei numerelor și prin domeniul continuu al numerelor, dobîndit în știința numerelor, sîntem în situația de a cerceta precis reprezentările noastre despre spațiu și timp, raportîndu-le la acest domeniu al numerelor creat în mintea noastră. Dacă urmărim cu exactitate ce facem la numărarea mulțimii sau a numărului de lucruri, ajungem la studiul capacității spiritului de a stabili relații de la lucruri la lucruri, de a face ca unui lucru să-i corespundă un lucru, de a reprezenta un lucru printr-un lucru, capacitate fără de care nu este posibilă gîndirea. Pe această unică bază, de altfel absolut indispensabilă, după părerea mea, așa cum spuneam și în nota prin care am anunțat această lucrare, trebuie să se ridice întreaga știință a numerelor. Am avut intenția de a da o astfel de expunere încă înainte de editarea scrierii mele despre continuitate, dar de-abia după apariția acesteia, și cu multe întreruperi provocate de treburi de serviciu absorbante și de alte lucrări necesare, am notat pe cîteva foi de hîrtie, între anii 1872 și 1878, prima schiță pe care apoi mai mulți matematicieni au văzut-o și, parțial, au discutat-o cu mine. Ea poartă același titlu și conține totuși, chiar dacă nu în cea mai bună ordine, toate ideile fundamentale ale scrierii de față, care le dezvoltă numai sub o formă mai îngrijită; ca puncte principale menționez aici distincția netă dintre finit și infinit, conceptul de număr al lucrurilor, indicația că metoda de demonstrație, cunoscută sub numele de inducție completă (sau a raționamentului de la n la $n + 1$), are o reală forță demonstrativă și că și definiția prin inducție (sau recursiune) este determinată și necontradictorie.

Această scriere poate fi înțeleasă de oricine posedă ceea ce se numește intelect omenesc sănătos; nu se cer cîtuși de puțin pentru aceasta cunoștințe școlare filozofice sau matematice. Dar știu prea bine că unii cu greu vor putea recunoaște în plăsmuirile fantomatice pe care le prezint acele numere ale lor, care i-au însoțit toată viața ca prieteni credincioși și intimi;

ei se vor speria de lungul șir de raționamente simple, corespunzător structurii ordonate a intelectului nostru, se vor speria de descompunerea prozaică a șirurilor de idei pe care se bazează legile numerelor, și vor pierde răbdarea aflînd că trebuie să urmărească demonstrații pentru niște adevăruri care li se par din capul locului evidente și sigure potrivit pretinsei lor intuiții interne. Dimpotrivă, în posibilitatea de a reduce astfel de adevăruri la altele mai simple, oricît ar fi șirul raționamentelor de lung și de artificial în aparență, eu văd o dovadă convingătoare că posedarea acestor adevăruri, sau credința în ele, niciodată nu este dată direct prin intuiție internă, ci obținută totdeauna numai printr-o repetare mai mult sau mai puțin completă a raționamentelor izolate. Această activitate mintală greu de urmărit din cauza vitezei în care se desfășoară aș vrea s-o compar cu acea activitate pe care o depune un cititor perfect exersat la lectură; însăși această citire rămîne totdeauna o repetare, mai mult sau mai puțin completă, a pașilor pe care începătorul i-a avut de făcut pe cînd silabisea cu eforturi; o foarte mică parte din această repetiție, iar pentru cititorul exersat o foarte mică muncă sau efort spiritual este de ajuns ca să recunoască adevăratul cuvînt corect, firește numai cu foarte mare probabilitate; căci se știe că se întîmplă din cînd în cînd chiar celui mai versat corector să lase neatinsă o greșeală de tipar, adică să citească greșit, ceea ce ar fi imposibil dacă s-ar repeta în întregime lanțul de idei corespunzător silabisirii. Astfel, chiar de la nașterea noastră, în permanență și din ce în ce mai mult, sîntem împinși să corelăm lucrurile și prin aceasta să exersăm acea capacitate a spiritului pe care se bazează și creația numerelor; prin acest exercițiu care, deși nepremeditat, este folosit fără încetare încă din primii ani ai vieții noastre, precum și prin formarea, datorită acestui exercițiu, a judecăților și șirurilor de raționamente, noi ne însușim și un tezaur de adevăruri propriu-zis aritmetice, la care recurg mai tîrziu primii noștri dascăli ca la ceva simplu, de la sine înțeles, ceva dat în intuiția interioară. Astfel se ajunge ca unele concepte, de fapt foarte complexe (ca, de pildă, conceptul de număr al lucrurilor), să conteze în mod fals ca simple. În acest sens, pe care îl consemnez prin cuvintele parafrazate după o cunoscută maximă ἀεὶ ὁ ανϑρωπος ἀριϑμητίζει, filele următoare vor găsi, poate, o binevoitoare primire, fiind o încercare de a clădi știința numerelor pe o bază unitară; ele ar putea să stimuleze pe alți matematicieni să reducă lungile serii de raţionamente la o dimensiune mai plăcută, mai modestă ...

În loc de aceasta, profit de prilejul de a mai face cîteva observaţii care se referă la scrierea mea mai veche, menţionată mai înainte, asupra continuităţii şi numerelor iraţionale. Teoria numerelor iraţionale expusă în ea, descoperită în toamna lui 1858, se bazează pe acel fenomen din domeniul numerelor raţionale, fenomen căruia eu i-am dat numele de ,,tăietură" şi pe care l-am cercetat pentru prima oară; teoria culminează în demonstraţia continuităţii noului domeniu al numerelor reale. Această teorie mi se pare a fi ceva mai simplă, aş spune mai liniştită, decît cele două teorii expuse de domnii Weierstrass şi G. Cantor, care diferă şi de ea şi între ele şi care de asemenea posedă rigoare desăvîrşită. Mai tîrziu ea a fost acceptată fără modificări esenţiale de domnul U. Dini, în *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878); însă împrejurarea că numele meu este menţionat în cursul acestei expuneri nu la descrierea fenomenului pur aritmetic al tăieturii, ci întîmplător tocmai unde este vorba de existenţa unei mărimi măsurabile corespunzătoare tăieturii, ar putea duce uşor la bănuiala că teoria mea s-ar sprijini pe considerarea acestor mărimi. Nimic n-ar putea fi mai necorect; mai mult, în § 3 din lucrarea mea am enumerat diferite motive pentru care resping totalmente introducerea mărimilor măsurabile şi am observat în încheiere în legătură cu existenţa lor că, pentru o mare parte a ştiinţei despre spaţiu, continuitatea figurilor sale nu este nici măcar o premisă necesară, făcînd complet abstracţie de faptul că în lucrările de geometrie continuitatea este menţionată ocazional numai cu numele, dar niciodată nu este clar explicată, deci nici nu este făcută accesibilă pentru demonstraţii. Pentru a lămuri şi mai bine acest lucru, remarc ca ilustrare următoarele. Dacă alegem trei puncte necoliniare oarecare A, B, C, făcînd numai restricţia că distanţele dintre ele AB, AC, BC sînt numere algebrice, şi dacă vedem că în spaţiu există numai acele puncte M pentru care rapoartele dintre AM, BM, CM şi AB sînt de asemenea numere algebrice, atunci spaţiul constituit din aceste puncte M este pretutindeni discontinuu, aşa cum se vede uşor; dar în ciuda discontinuităţii, lacunarităţii acestui spaţiu, toate construcţiile care apar în *Elementele* lui Euclid se pot efectua în el, după cum văd, absolut la fel ca în spaţiul perfect continuu; de aceea, în ştiinţa lui Euclid nu s-a observat de loc, nu s-a simțit de loc discontinuitatea acestui spațiu. Dacă însă cineva îmi spune că noi n-am putea să ne închipuim spațiul altfel decît continuu, eu aș pune la îndoială acest lucru și aș atrage atenția asupra faptului că se cere o rafinată cultură științifică, cît mai înaintată, numai pentru a recunoaște clar esența continuității și pentru a înțelege că în afară de rapoartele raționale între mărimi se pot imagina și rapoarte iraționale, că în afara celor algebrice se pot imagina și rapoarte transcendente. Mie mi se pare cu atît mai frumos că omul se poate ridica pînă la a crea un domeniu continuu, pur al numerelor, fără ca să posede vreo reprezentare a mărimilor măsurabile, numai într-un sistem finit de pași mintali simpli; și numai cu ajutorul acestui instrument el are posibilitatea, după părerea mea, să elaboreze reprezentarea spațiului continuu pînă la a obține o reprezentare clară.

Între teoria ,,tăieturilor" a lui *Dedekind* despre numerele reale și teoria rapoartelor a lui *Eudoxos* din cartea a V-a a *Elementelor*, există o foarte strînsă înrudire. Totuși cele două teorii nu coincid, întrucît postulatul lui *Dedekind* despre existența tuturor ,,tăieturilor" și ,,numerelor reale" care generează tăieturile nu se găsește la *Eudoxos*, respectiv *Euclid*. Probabil că chiar îmbrăcarea axiomei măsurii (așa-numita ,,axiomă a lui Arhimede") într-o definiție (*Elemente*, V, def. 4) exprimă respingerea unui postulat de existență, așa de cuprinzător, ca al lui *Dedekind*.

Aceste chestiuni l-au preocupat chiar pe *Dedekind*, lucru despre care ne lămurește schimbul său de scrisori cu *R. Lipschitz* (1832—1903).

R. Dedekind către R. Lipschitz

1876. 6. 10

. . . .

. . . 3° În legătură cu nota mea asupra numerelor iraționale îmi scrieți: . . . ,,Trebuie să mărturisesc că eu nu neg justificarea definiției dv., dar sînt de părere că definiția dv. se deosebește numai în forma expresiei, dar nu și în obiect de ceea ce au stabilit cei vechi. Pot numai să spun că definiția dată de Euclid, V, def. 4, pe care o citez în latină:

> rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare,

precum și ceea ce urmează, o consider tot atît de satisfăcătoare ca și definiția dv."

Cu toate acestea, întrucît subiectul mă interesează, îmi voi permite să vă expun motivele pentru care nu mă pot ralia de loc la părerea dv. În acest sens eu admit ca bază, asupra căreia trebuie, natural, să cădem de acord, aritmetica numerelor raționale ca fiind solid fundamentată și nimic mai mult; în lucrarea mea arăt, fără nici un amestec de lucruri străine, că în domeniul numerelor raționale se poate indica un fenomen (tăietura) care poate fi folosit să completeze acest domeniu printr-o singură creație de numere noi, iraționale, și demonstrez că domeniul, astfel generat, al tuturor numerelor reale posedă particularitatea, în care eu văd esența continuității (§ 3) (dacă nu vrem să introducem numere noi, eu n-am nimic împotrivă); propoziția demonstrată de mine (§ 5, IV) sună atunci astfel: sistemul tuturor tăieturilor în domeniul discontinuu în sine al numerelor raționale formează o multiplicitate continuă); în continuare (§ 6), eu arăt că adunarea a două numere se poate defini cu toată precizia, și afirm că același lucru este valabil și pentru celelalte operații și că, sprijinindu-ne pe aceasta, s-ar putea demonstra cu toată rigoarea și propozițiile din care constă edificiul aritmeticii ...

De fapt cred acum că prin cele ce am spus m-am justificat suficient; dar eu nu vreau să scap ieftin și voi intra cu multă plăcere în celălalt aspect, cu totul diferit, pe care l-ați dat problemei; dv. nu susțineți că s-ar găsi undeva o demonstrație riguroasă a propoziției de mai sus, dar vă exprimați opinia că în celebra și pe drept cuvînt admirata definiție euclidiană a raportului (*ratio*, λόγος) mărimilor de același fel, ca și în restul conținutului cărții a V-a a *Elementelor*, s-ar cuprinde principiile necesare și suficiente pentru demonstrarea propoziției. Făcînd abstracție de faptul, pe care l-am observat mai înainte, că mie nu-mi place introducerea mărimilor în teoria pură a numerelor, trebuie să mă declar cu hotărîre contra acestei opinii; după părerea mea, baza amintită nu este suficientă dacă nu se adaugă la principiile euclidiene în plus și miezul lucrării mele, esența continuității (§ 3), care nu se găsește nicăieri în *Elemente*. Definiția lui *Euclid* sună astfel în terminologia noastră: mărimile de același fel A, B au același raport ca mărimile A_1, B_1 dacă pentru fiecare pereche de numere raționale întregi m, n sau avem în același timp $nA < mB$ și $nA_1 < mB_1$, sau în același timp $nA = mB$ și $nA_1 = mB_1$, sau în același timp $nA > mB$ și $nA_1 > mB_1$. Dacă această definiție are în genere un sens, atunci despre lucrurile care se numesc mărimi se fac două feluri de supoziţii şi numai două:

1° Dintre două mărimi de acelaşi fel distincte, totdeauna una se recunoaşte ca mai mare, cealaltă ca mai mică.

2° Dacă A este o mărime şi n un număr întreg, atunci există totdeauna o mărime $n A$ de acelaşi fel cu A, multiplul lui A corespunzător numărului n.

De altminteri, în afară de aceste supoziţii făcute tacit şi de cele conţinute în cuvintele dv. latine, nu aflăm nimic despre întinderea sau multiplicitatea unui domeniu de mărimi de acelaşi fel, iar definiţia ne spune numai cînd două elemente existente într-un domeniu de mărimi au acelaşi raport ca alte două. În plus, voi admite cu plăcere ca raportul să fie valabil ca definiţie generală a unui număr, deşi *Euclid* nu foloseşte niciodată λόγος şi ἀριθμός ca echivalente. Astfel, de pildă, dacă A este o anumită mărime, totalitatea multiplilor $n A$ formează un domeniu de mărimi care verifică numai pentru sine supoziţiile de mai sus şi nu se găseşte în această carte a lui *Euclid* nici cea mai slabă indicaţie că ar putea să existe domenii de mărimi şi mai complete; un astfel de domeniu de mărimi, prin rapoartele formate de cîte două din aceste mărimi, ar duce, evident, la definiţia tuturor numerelor raţionale; şi acest domeniu de numere nici nu s-ar mări mai mult cînd s-ar trece la domenii de mărimi cu o treaptă mai complete, domenii care constau din toate părţile precise ale unei mărimi determinate şi a multiplilor săi, deci din toate mărimile comensurabile cu o mărime. Un astfel de domeniu posedă deja o varietate impresionantă de mărimi gradate şi nici unui om nu i-ar trece prin gînd să pretindă domenii şi mai complete. Conceptul de număr ca raport de mărimi de acelaşi fel n-ar transcende niciodată raţionalul. Acum va zice oricine: dacă *Euclid* n-ar fi urmărit nimic altceva decît studiul acestor domenii de mărimi, atunci n-ar fi avut nevoie să dea o definiţie a raportului aşa de greoaie; el ar fi putut spune pur şi simplu: raportul dintre A şi B este egal cu acela dintre A_1 şi B_1 dacă există două numere întregi m, n astfel încît să avem în acelaşi timp $n A = m B$ şi $n A_1 = m B_1$. Deci se înţelege de la sine că *Euclid* a avut în vedere domenii de mărimi mai complete; şi de fapt în cartea a X-a este vorba şi de mărimi incomensurabile, cărora, în consecinţă, le corespund rapoarte noi, numere noi, iraţionale. Dar nicăieri nu se găseşte la *Euclid* sau la un scriitor ulterior încheierea acestei completitudini, conceptul de domeniu de mărimi continuu, adică cel mai complet posibil, a cărui esență constă în proprietatea: „Dacă toate mărimile unui domeniu de mărimi, continuu ordonat se împart în două clase astfel că fiecare mărime a primei clase este mai mică decît orice mărime din a doua clasă, atunci există sau în prima clasă o mărime maximă, sau în a doua clasă o mărime minimă. Dacă această proprietate nu este acceptată în mod explicit în conceptul de domeniu de mărimi, atunci și domeniul numeric corespunzător rămîne incomplet și de aceea definițiile universal valabile ale operațiilor aritmetice sînt imposibile, căci în astfel de domenii lacunare de numere, suma, diferența etc. care se deduc din două numere existente de fapt în ele poate nici nu există în același domeniu de numere ... După toate acestea, rămîn la afirmația mea că numai principiile euclidiene, fără adăugarea principiului continuității, care nu este conținut în ele, nu sînt în stare să fundamenteze o teorie completă a numerelor reale ca rapoarte de mărimi ... Reciproc însă, prin teoria mea despre numerele iraționale se creează un model perfect de domeniu continuu, care tocmai de aceea este în stare să caracterizeze orice raport de mărimi printr-un anumit element numeric conținut în el ...

1876. 7. 27.

... După ce ați discutat exemplul lui $\sqrt{2}$, adăugați cuvintele: „Cei vechi ne-au învățat și acest lucru și are oare definiția tăieturii dumneavoastră un conținut diferit de acela? Eu cred că nu. Ceea ce menționați despre completitudinea domeniului, care este dedusă din principiile dv., aceasta coincide în fond cu proprietatea principală a unei linii, fără de care nici un om nu-și poate reprezenta o linie". Prima jumătate a acestui pasaj, despre care vorbesc în primul rînd, sună exact ca și cum mi-ați atribui opinia că eu aș fi primul care am observat și am pus în evidență fenomenul căruia numai pentru concizie — fiind menționat așa de des în lucrarea mea — i-am dat numele special de tăietură. Această ipoteză vă rog s-o înlăturați complet; niciodată n-am crezut că am adus la lumină în lucrarea mea nici măcar un singur fenomen nou sau vreun nou obiect de cercetare matematică. Fenomenul tăieturii este citat aproape în orice manual de aritmetică cînd este vorba de a reprezenta numere iraționale prin numere raționale cu orice aproximație dorită (cu care ocazie se face, desigur, totdeauna o importantă greșeală logică). Tot așa de puțin mi-a trecut prin gînd că prin definiția pe care am dat-o numerelor iraționale am creat vreun număr care n-a mai fost conceput înainte, cu mai multă sau mai puțină claritate, de mintea vreunui matematician... Tendința întreagă a lucrării mele se îndreaptă mai degrabă pur și simplu spre a demonstra (ceea ce, după cîte știu, nu s-a făcut încă nicăieri), folosind fenomenul cunoscut în general al tăieturii, că numerele iraționale pot fi definite dintr-o dată bazîndu-ne exclusiv pe aritmetica numerelor raționale, deci fără invocarea conceptului, cam obscur și complicat, de mărime, și anume, ceea ce este foarte important, cu acea completitudine (continuitate) care este suficientă și totodată indispensabilă pentru o construcție absolut riguroasă, științifică a aritmeticii numerelor reale. Că aceasta a reușit cu adevărat, nu tăgăduiți, după cum cred (același lucru este valabil despre expunerile domnilor *Heine* și *Cantor* din Halle, care diferă de a mea numai în forma exterioară); deosebirea de păreri dintre noi se referă exclusiv la opinia exprimată de dv. că aceste principii, deși în alt veșmînt, ar fi conținute complet în *Elementele* lui *Euclid* și în ultima dv. scrisoare repetați această idee în parte explicit, în parte implicit prin faptul că în partea a doua a pasajului citat mai sus afirmați ca ceva de la sine înțeles tocmai completitudinea sau continuitatea — în jurul căreia se învîrtește și trebuia să se învîrtească toată lucrarea mea, dacă ar fi vorba să obțin rezultatul urmărit — în sfîrșit, în parte prin faptul că dv. scrieți: „Definiția ... egalității a două rapoarte ... decide totul dintr-o dată. Dacă dv. nu recunoașteți acest lucru, pot să-mi explic numai prin aceea că n-ați ținut seama că *Euclid* în acea definiție presupune existența rapoartelor care nu sînt egale cu raportul a două numere întregi. Dv. aveți intenția să presupuneți din capul locului numai numere raționale, precum și mărimi care sînt măsurate prin numere raționale. *Euclid* procedează aici altfel și acesta este chiar miezul deosebirii dintre dv. și *Euclid*. *Euclid* își imaginează o mărime determinată prin măsura unei linii definite precis, și din acest punct de vedere el poate arăta linii care față de o anumită linie se află într-un raport ce nu poate fi exprimat prin două numere întregi". Urmează analiza exemplului raportului dintre diagonala și latura pătratului, a cărui iraționalitate (în sensul modern) am menționat-o și eu în lucrarea mea ca ceva cunoscut vechilor greci. Cunosc pe *Euclid* de la vîrsta de 13 sau 14 ani, și îl admir, și nici azi nu văd cum m-aș găsi în opoziție față de el; chiar în ultima mea scrisoare am vorbit despre tratarea pe care el a dat-o mărimilor incomensurabile, fără nici o obiecție contra procedeului său, astfel încît eu îmi permit să resping cu drept cuvînt intenția pe care mi-ați atribuit-o în cele de mai sus. *Euclid* poate aplica definiția sa despre rapoarte egale la toate mărimile care intervin în sistemul său, adică a căror existență este evidentă din motive temeinice și aceasta este de ajuns pentru *Euclid*. Însă pentru scopul de a construi aritmetica pe conceptul raportului de mărimi (ceea ce n-a fost în intenția lui *Euclid*), aceasta nu este absolut de loc suficient. Deoarece completitudinea conceptului de număr depinde, la fundamentarea aritmeticii, mai degrabă numai de completitudinea conceptului de mărime și deoarece completitudinea continuă a numerelor reale este indispensabilă pentru construcția științifică a aritmeticii, este absolut necesar să știi dinainte cît este de complet domeniul mărimilor, căci nimic nu este mai periculos în matematică decît să accepți existențe fără demonstrație satisfăcătoare și în special atunci cînd te silește necesitatea, nevoia momentană. Prin ce se recunosc ipotezele de existență permise și cum se deosebesc ele de cele nepermise, care sînt nenumărate, ca, de pildă, de ipoteza existenței unei mărimi A, care ar fi dublul lui B și în același timp triplul jumătății lui B? Trebuie oare să depindă aceasta numai de reușita unei întîmplătoare observații privitoare la o contradicție internă? Dacă *Euclid* ar fi intenționat să ducă mai departe cercetările, decît a fost cazul în realitate, anume acele cercetări în care continuitatea joacă un rol esențial, și dacă în manuscrise printre definițiile sau axiomele cărții a V-a s-ar găsi conținutul pasajului de mai sus, atunci eu sînt de părere că n-ar exista nimeni care să-l declare superfluu sau de la sine înțeles; mai curînd cred că în acest caz, printre cei care vor să construiască aritmetica pe conceptul de număr ca raport de mărimi, s-ar fi găsit desigur cineva care și-ar fi dat seama și ar fi zis: „O dată cu această completitudine precis definită a conceptului de mărime este dată și completitudinea conceptului de număr care este suficientă și indispensabilă pentru construcția riguroasă a aritmeticii numerelor reale"... Dar *Euclid* păstrează o tăcere totală asupra acestui punct foarte important pentru aritmetică şi de aceea nu pot fi de acord cu părerea dv. că la *Euclid* ar trebui găsite bazele complete pentru teoria numerelor iraţionale. Dacă Euclid în enunţul din cartea a V-a, pe care dv. în penultima scrisoare l-aţi citat în latină, nu consideră superfluu să-i spună pe nume acelei proprietăţi aşa de simple a mărimilor, tot astfel el ar fi definit, desigur în felul său, caracterul mult mai complicat al continuităţii, dacă ar fi avut nevoie de ea în sistemul său. Dv. spuneţi că, dimpotrivă, această completitudine sau continuitate ar fi de la sine înţeleasă şi nu are deci nevoie să fie exprimată, căci nici un om nu şi-ar putea imagina o linie fără aceasta, deci fără proprietatea de mai sus. Deşi recurgerea la geometrie pentru fundamentarea aritmeticii pure, aşa cum aţi bănuit dinainte, este contrară părerii mele, totuşi acum mă voi situa chiar pe această poziţie ; dar chiar şi în acest caz nu pot fi de acord cu dv. ; eu pot să-mi reprezint tot spaţiul şi orice linie din el într-un mod absolut discontinuu, aşa cum m-am exprimat deja cu hotărîre la finele § 3 din lucrarea mea ; un al doilea om de acest fel va fi poate dl. prof. *Cantor* din Halle — cel puţin aşa pare să reiasă din lucrarea sa pe care am citat-o ; şi aş vrea să spun că orice om poate face asta. Mi se va replica, poate, că mă înşel asupra capacităţii mele de reprezentare a spaţiului, că anume cel care este capabil să-şi imagineze spaţiul continuu tocmai de aceea ar trebui să fie incapabil să şi-l reprezinte discontinuu, deoarece din capul locului în conceptul de spaţiu ar fi conţinută reprezentarea celei mai mari completitudini posibile. Însă acest lucru trebuie să-l contest ; pentru mine conceptul de spaţiu este mai curînd total independent, total separabil de reprezentarea continuităţii, şi proprietatea (de sus) serveşte numai să separe din conceptul general de spaţiu conceptul particular de spaţiu continuu. Cum stăm în această privinţă cu *Euclid* ? Să se analizeze toate supoziţiile, atît cele explicite cît şi cele tacite, supoziţii pe care se bazează tot edificiul geometriei lui *Euclid*, să se admită adevărul tuturor propoziţiilor sale, posibilitatea tuturor construcţiilor sale (o metodă care nu dă greş într-o astfel de analiză constă pentru mine în înlocuirea tuturor termenilor tehnici prin noi cuvinte arbitrare născocite, pînă atunci lipsite de sens ; edificiul poate să nu se prăbuşească prin aceasta, dacă este bine construit, şi eu susţin că, de pildă, teoria mea despre numerele reale rezistă la această probă) : niciodată, pe cît am cercetat eu, nu se ajunge în acest mod la continuitatea spaţiului ca o condiţie indisolubil legată de geometria lui *Euclid*; sistemul său se menţine intact şi fără continuitate — un rezultat care este, desigur, surprinzător pentru mulţi şi care de aceea mi s-a părut demn de a fi menţionat ...

În scrisoarea ce urmează către *Heinrich Weber* (1842—1913), *Dedekind* se pronunţă asupra caracterului creator al definiţei pe care el a dat-o numerelor iraţionale. Acestea nu sînt înseşi „tăieturile", ci le generează — poziţie care mai tîrziu a fost aspru criticată de *G. Frege* (1846—1925) şi de *B. Russell* (născut în 1872).

R. Dedekind către H. Weber

Braunschweig, 24 ianuarie 1888

... În afară de aceasta trebuie să-ţi mărturisesc că pînă în prezent eu consider mereu numărul ordinal, nu pe cel cardinal, ca fiind conceptul iniţial de număr ... Consider numărul cardinal numai ca o aplicaţie a celui ordinal şi chiar în acest ἀριθμητίζειν al nostru se ajunge la conceptul „cinci" numai prin conceptul „patru". Dacă vrem să mergem pe drumul tău — şi aş recomanda cu căldură să fie o dată parcurs în întregime — aş da totuşi sfatul ca prin număr (număr cardinal) mai bine să nu se înţeleagă însăşi clasa (sistemul tuturor sistemelor finite asemenea între ele), ci ceva nou (corespunzător acestei clase), pe care spiritul îl creează. Noi sîntem de spiţă divină şi posedăm, fără nici o îndoială, forţă creatoare nu numai în lucruri materiale (cale ferată, telegraf), ci mai ales în lucruri spirituale. Aceasta este tocmai aceeaşi problemă ca atunci cînd tu spui că numărul iraţional n-ar fi în genere altceva decît tăietura însăşi, în timp ce eu prefer să creez ceva nou (diferit de tăietură), care corespunde tăieturii şi despre care afirm că generează, produce tăietura. Avem dreptul să ne atribuim o astfel de forţă de creaţie şi, în plus, din cauza naturii identice a tuturor numerelor este mult mai adecvat să procedăm astfel. Numerele raţionale produc totuşi şi tăieturi, dar sigur că nu voi considera numărul raţional ca identic cu tăietura produsă de el; şi chiar după introducerea numerelor iraţionale se va vorbi despre fenomenele tăieturii adesea cu astfel de expresii, li se vor atribui atare atribute care dacă ar fi aplicate înseşi numerelor ar suna chiar ciudat. Ceva cu totul asemănător este adevărat şi despre definiţia numărului cardinal ca o clasă; se vor spune multe despre clasă (de pildă, se va spune că ea este un sistem cu o infinitate de elemente, anume sistemul tuturor sistemelor asemănătoare), ceea ce desigur nu i s-ar asocia de loc cu plăcere numărului (ca trăsătură principală). Se gîndește oare cineva la faptul că numărul 4 este un sistem cu o infinitate de elemente, sau nu va vrea oare să uite acest lucru cît mai repede? (Însă faptul că numărul 4 este copilul numărului 3 și tatăl numărului 5 va rămîne totdeauna în mintea fiecăruia.) ...

4. Definiția numerelor iraționale dată de G. Cantor

Pentru comparație imediată dăm aici teoria numerelor reale a lui **Georg Cantor** (1845—1918), care formează o parte (§ 9) din publicația sa mai mare *Bazele unei teorii generale a varietăților* (1883), asupra căreia vom relata mai mult în seria următoare de documente asupra teoriei mulțimilor. Fragmentul care urmează este independent, în esență, de restul tratatului și de aceea își găsește locul mai bine în strînsă legătură cu teoria lui *Dedekind* despre numerele reale.

§ 9

Dată fiind marea însemnătate care revine în teoria varietăților așa-numitelor numere reale, raționale și iraționale, n-aș vrea să mă abțin de a spune aici ceea ce este mai important despre definiția lor. Nu mai intru în discutarea introducerii numerelor raționale, căci asupra acestora s-au elaborat în multe feluri expuneri cu caracter aritmetic; dintre cele care îmi sînt mai apropiate subliniez pe acelea ale lui *H. Grassmann* (*Manual de aritmetică*, Berlin, 1861) și *J. H. F. Müller* (*Manual de aritmetică universală*, Halle, 1855). Dimpotrivă, aș dori să discut mai precis, pe scurt, cele trei forme principale de introducere aritmetică riguroasă a numerelor reale generale, pe care eu le cunosc și care sînt poate și singurele esențiale. Acestea sînt: mai întîi metoda de introducere folosită de dl. prof. *Weierstrass* de mulți ani în prelegerile sale asupra funcțiilor analitice și despre care se pot găsi unele indicații în lucrarea programatică a d-lui *E. Kossak* (*Elemente de aritmetică*, Berlin, 1872); în al doilea rînd, dl. *R. Dedekind* a publicat o formă proprie a definiției în scrierea sa *Continuitatea și numerele iraționale* (Braunschweig, 1872) și în al treilea rînd, eu am dat în anul 1871 („Math. Ann.", vol. V, p. 123) o formă de definiție care în exterior are o anumită asemănare cu aceea a lui *Weier-*

strass, așa încît dl. *H. Weber* („Zeitschrift für Mathematik und Physik", anul 27, secțiunea istorico-literară, p. 163) le-a putut confunda; după părerea mea, aceasta a treia formă a definiției, dezvoltată mai tîrziu și de dl. *Lipschitz* (*Bazele analizei*, Bonn, 1877), este cea mai simplă și cea mai naturală dintre toate, și ea reprezintă avantajul că se adaptează cel mai direct calculului analitic.

De definiția unui număr real irațional ține totdeauna o mulțime de numere raționale, mulțime infinită bine definită de puterea întîi; aceasta este partea comună a tuturor formelor de definiție, deosebirea dintre ele constînd în momentul generării prin care se asociază mulțimea cu numărul definit prin ea, precum și în condițiile pe care trebuie să le îndeplinească mulțimea ca să se poată adopta ca bază pentru definiția numărului respectiv.

Prima formă a definiției are la bază o mulțime de numere raționale pozitive a_ν, care este notată (a_ν) și care îndeplinește condiția că oricîte și oricare din numerele a_ν ar fi adunate în număr finit, această sumă ar rămîne totdeauna sub o limită care se poate indica. Dacă avem două astfel de ansambluri (a_ν) și (a'_ν), atunci se arată riguros că se pot întîmpla trei cazuri: sau fiecare parte $\frac{1}{n}$ din unitate este totdeauna la fel de des conținută în ambele ansambluri, în caz că elementele lor se însumează într-un număr finit, suficient, capabil de creștere; sau $\frac{1}{n}$ începînd de la un anumit n este mereu mai des în primul ansamblu decît în al doilea; sau, în al treilea caz, $\frac{1}{n}$ de la un anumit n este conținut totdeauna în al doilea ansamblu mai des decît în primul. Corespunzător acestor cazuri, dacă b și b' sînt numerele de definit prin ambele ansambluri (a_ν) și (a'_ν), punem $b = b'$ în primul caz, $b > b'$ în al doilea caz, $b < b'$ în al treilea caz. Dacă reunim cele două ansambluri într-unul nou (a_ν, a'_ν), acesta dă baza pentru definiția lui $b + b'$; dacă însă din cele două ansambluri (a_ν) și (a'_ν) se formează ansamblul nou $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ în care elementele sînt produse din toate numerele a_ν în toate a'_ν, atunci acest nou ansamblu este luat ca bază a definiției pentru produsul $b\, b'$.

Se vede aici că momentul generării, care asociază mulțimea cu numărul care se definește prin ea, rezidă în formarea sumei; totuşi trebuie să se sublinieze ca fapt esenţial că se aplică numai adunarea unui număr totdeauna finit de elemente raţionale şi nu se pune, de pildă, numărul b care trebuie definit din capul locului ca sumă Σa_ν a şirului infinit (a_ν); aici s-ar implica o greşeală logică, deoarece mai degrabă se obţine definiţia sumei Σa_ν numai prin egalarea cu numărul b gata definit necesarmente dinainte. Cred că această greşeală logică, evitată numai de dl. *Weierstrass*, era comisă mai de mult aproape în general şi n-a fost observată din cauză că ea aparţine cazurilor rare, în care greşeli reale nu pot provoca o pagubă mai importantă în calcul. Totuşi, după convingerea mea, de greşeala indicată se leagă toate dificultăţile care au fost găsite în conceptul iraţionalelor, în timp ce, evitîndu-se această greşeală, numărul iraţional se stabileşte cu aceeaşi determinare, claritate şi limpezime în spiritul nostru ca şi numărul raţional.

Forma definiţiei d-lui *Dedekind* se bazează pe totalitatea tuturor numerelor raţionale, aceasta însă fiind împărţită în două grupe, astfel încît dacă notăm numerele primei grupe cu A_ν, numerele celei de-a doua grupe cu B_μ, avem totdeauna $A_\nu < B_\mu$; dl. *Dedekind* numeşte o astfel de împărţire a mulţimii numerelor raţionale ,,tăietura'' mulţimii, o notează cu $(A_\nu | B_\mu)$ şi îi asociază un număr b. Dacă se compară două astfel de tăieturi $(A_\nu|B_\mu)$ şi $(A'_\nu|B'_\mu)$ între ele, există ca şi la prima formă a definiţiei în total trei posibilităţi, la care respectiv numerele b şi b', reprezentate prin ambele tăieturi, se pun sau egale între ele, sau $b > b'$, sau $b < b'$. Primul caz, făcînd abstracţie de anumite excepţii uşor de reglementat, excepţii care apar la caracterul raţional al numerelor care trebuie definite, are loc numai în cazul că ambele tăieturi sînt complet identice, şi aici apare superioritatea categorică incontestabilă a acestei forme de definiţie faţă de celelalte două, anume că oricărui număr b îi corespunde numai o singură tăietură, împrejurare căreia i se opune marele dezavantaj că în analiză numerele nu se prezintă niciodată sub formă de ,,tăieturi'', formă în care ele trebuie aduse cu mare artă şi precauţie.

Urmează acum şi aici definiţiile pentru suma $b + b'$ şi produsul bb' pe baza noilor tăieturi care rezultă din cele două tăieturi date.

Dezavantajul legat de prima şi a treia formă a definiţiei constînd din faptul că aici aceleaşi numere, adică numerele egale, se prezintă infinit de des şi, în consecinţă, nu se obţine imediat o privire de ansamblu clară asupra tuturor numerelor reale poate fi înlăturat cu cea mai mare uşurinţă prin particularizarea mulţimilor luate ca bază (a_ν), recurgîndu-se la oricare dintre formele de sisteme neechivoce cunoscute, precum sistemul zecimal sau simpla dezvoltare în fracţii continue.

Vin acum la a treia formă a definiţiei numerelor reale. Şi aici se pune la bază o mulţime infinită de numere raţionale (a_ν) de prima putere; se cere însă de la ea o altă calitate decît la forma definiţiei lui *Weierstrass*; eu cer ca, după admiterea unui număr raţional ε arbitrar de mic, să putem separa un număr finit de elemente ale mulţimii aşa încît elementele care rămîn să formeze, două cîte două, o diferenţă în mărime absolută mai mică decît ε. Orice mulţime de acest fel (a_ν), care mai poate fi caracterizată şi prin condiţia

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \quad (\text{pentru orice } \mu),$$

eu o numesc şir fundamental şi îi asociez un număr b care se defineşte prin el, pentru care se poate chiar întrebuinţa în acest scop semnul (a_ν), aşa cum a propus dl. *Heine*, care în aceste chestiuni mi s-a alăturat mie după multe discuţii verbale (să se compare J. Crelles, vol. 74, p. 172). Un astfel de şir fundamental, după cum se poate deduce riguros din conceptul său, prezintă trei cazuri: sau termenii săi a_ν pentru valori suficient de mari ale lui ν sînt în valoare absolută mai mici decît un număr arbitrar dat; sau de la un anumit ν ei sînt mai mari decît un număr raţional pozitiv ρ care se poate indica precis; sau de la un anumit ν ei sînt mai mici decît o mărime raţională negativă $-\rho$ care se poate indica. În primul caz spun că b este egal cu zero, în al doilea — că b este mai mare ca zero sau pozitiv, în al treilea — că b este mai mic decît zero sau negativ.

Acum vin operaţiile elementare. Dacă (a_ν) şi (a'_ν) sînt două şiruri fundamentale prin care sînt determinate numerele b şi b', se arată că şi $(a_\nu \pm a'_\nu)$ şi $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ sînt şiruri fundamentale, care determină deci trei numere noi, care îmi servesc ca definiţii pentru suma şi diferenţa $b \pm b'$ şi pentru produsul bb'.

Dacă apoi b este diferit de zero, pentru care s-a dat definiţia în cele precedente, se demonstrează că şi $\frac{a'_\nu}{a_\nu}$ este un şir fundamental, al cărui număr corespunzător furnizează definiția pentru cîtul $\frac{b'}{b}$.

Operațiile elementare dintre un număr b dat printr-un șir fundamental (a_ν) și un număr rațional dat direct sînt incluse în cele stabilite mai înainte, punînd $a_\nu = a$, $b = a$.

De-abia acum vin definițiile relațiilor egal, mai mic, mai mare dintre două numere b și b' (dintre care b' poate fi și $= a$), și anume se spune că $b = b'$, sau $b > b'$, sau $b < b'$ după cum $b - b'$ este egal cu zero, sau mai mare sau mai mic ca zero.

După toate aceste pregătiri rezultă ca primă propoziție riguros demonstrabilă că dacă b este numărul determinat printr-un șir fundamental (a_ν), atunci $b - a_\nu$ cu ν crescător devine mai mic în valoare absolută decît orice număr rațional posibil sau, ceea ce este același lucru, că

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

Să se dea atenție acestui punct cardinal, a cărui însemnătate poate fi ușor trecută cu vederea: în a treia formă a definiției numărul b nu este definit ca „limită" a termenilor a_ν ai unui șir fundamental (a_ν); căci aceasta ar fi o greșeală logică asemănătoare cu aceea subliniată în discuția primei forme a definiției, și anume din cauză că atunci existența limitei $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ ar fi prezumată; mai degrabă lucrurile stau invers, astfel încît prin definițiile noastre precedente conceptul b a fost dotat cu astfel de proprietăți și relații față de numerele raționale, încît de aici se poate trage concluzia, cu evidența logică: $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ există și este egală cu b. Să mi se ierte aici detalierea pe care o motivez cu observația că cei mai mulți trec pe lîngă această chestiune neînsemnată, măruntă, și apoi se încurcă ușor în îndoieli și contradicții de care ar fi cruțați dacă ar observa împrejurările puse aici în evidență; căci ar recunoaște atunci clar că numărul irațional datorită calității date prin definiții are în spiritul nostru o realitate la fel de determinată ca și cel rațional, ca și numărul rațional întreg însuși și că nu trebuie să-l obținem numai printr-un proces de limită, ci mai degrabă, dimpotrivă, posedîndu-l sîntem convinși în general despre posibilitatea și evidența procesului de limită; căci atunci se extinde cu ușurință propoziția, pe care tocmai am citat-o, în felul următor: Dacă (b_ν) este o mulțime oarecare de numere raționale sau iraționale cu proprietatea că $\lim (b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (oricare ar fi μ), atunci există un număr b determinat printr-un șir fundamental (a_ν), astfel încît

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b.$$

Se arată deci că aceleași numere b, care pe temeiul șirurilor fundamentale (a_ν) (aceste șiruri fundamentale le numesc de ordinul întîi) sînt definite astfel încît ele se dovedesc ca limite ale lui a_ν, se pot reprezenta în diferite moduri și ca limite ale șirurilor (b_ν), unde orice b_ν se definește printr-un șir fundamental de primul ordin $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ (cu ν fix.)

De aceea, o astfel de mulțime (b_ν), dacă are proprietatea că $\lim (b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (cu μ arbitrar), eu o numesc șir fundamental de ordinul al doilea.

Tot astfel se pot forma șiruri fundamentale de ordinul al treilea, al patrulea, al n-lea, dar șir șiruri fundamentale de ordinul α, unde α este un număr oarecare din clasa a doua de numere.

Toate aceste șiruri fundamentale dau exact același rezultat pentru determinarea unui număr real b ca și șirurile fundamentale de ordinul întîi; deosebirea constă numai în forma mai complicată, mai extinsă a datului existent. Cu toate acestea, în măsura în care vrem în genere să ne situăm din punctul de vedere al celei de-a treia forme de definiție, mie mi se pare extrem de potrivit să fixăm această deosebire în modul arătat, așa cum am făcut deja la locul citat („Math. Ann.", vol. V, p. 123) [II, 5, p. 92]. De aceea acum mă folosesc de modul acesta de exprimare: mărimea numerică b este dată printr-un șir fundamental de ordinul n, respectiv α. Dacă ne hotărîm să facem așa, obținem astfel un limbaj extraordinar de fluent și totodată accesibil pentru a descrie în modul cel mai simplu și mai pregnant bogăția țesăturii multiforme, adesea așa de complicată, a analizei, lucru prin care, după părerea mea, se obține un plus de claritate și transparență, care nu trebuie subapreciat. Cu aceasta vin în întîmpinarea îngrijorării pe care dl. *Dedekind* a exprimat-o în prefața la scrierea sa *Continuitatea și numerele iraționale* relativ la aceste distincții; nu mi-a fost străin gîndul de a introduce noi numere prin șirurile fundamentale de ordinul al doilea, al treilea etc., care nu s-ar putea determina prin șiruri fundamentale de primul ordin, dar am avut în vedere numai forma diferită conceptual a datului existent; aceasta reiese clar chiar din pasaje izolate ale lucrării mele.

Aş vrea să atrag aici atenţia asupra unei situaţii curioase, anume că în aceste ordine ale şirurilor fundamentale, ordine pe care eu le deosebesc prin numere din clasa întîi şi a doua de numere, toate formele avînd caracterul obişnuit de şir, putînd fi gîndite în general, găsite sau încă negăsite deja în analiză, sînt total epuizate, în sensul că nu există de loc şiruri fundamentale al căror număr de ordine ar putea fi eventual indicat printr-un număr din clasa a treia de numere, aşa cum voi demonstra riguros cu altă ocazie.

5. P. du Bois-Reymond: Metafizica şi teoria conceptelor fundamentale matematice: mărime, limită, argument şi funcţie

La începutul penultimului deceniu al secolului al XIX-lea, ca o ciudată anticipare a discuţiilor de mai tîrziu, a apărut un autor care îşi pune ca problemă ,,metafizica'' conceptelor analitice (mărime, argument, funcţie), căruia deci fundamentarea, atît de riguroasă în aparenţă, a analizei pe noţiunea clară de număr real (de mărime continuă) nu-i dă satisfacţie deplină. În timp, opera principală a lui **Paul du Bois-Reymond** (1831—1889) se situează între primele lucrări ale lui *Cantor* şi întîia fundamentare propriu-zisă a teoriei mulţimilor (1883); această operă este *Teoria generală a funcţiilor* din 1882.

Prezentăm extrase amănunţite din această operă ciudată, azi aproape uitată, în care se amestecă în chip original argumente matematice şi filozofice (adică mai ales psihologice, conform stilului de gîndire al epocii).

Îndeosebi este remarcabilă opoziţia dintre două concepţii fundamentale asupra bazelor analizei, puse în formă aproape dramatică în gura a doi interlocutori fictivi, ,,idealistul'' şi ,,empiristul''. Autorul însuşi nu ia nici o decizie. O introducere precedă dialogul propriu-zis; de asemenea, după dialog urmează o expunere rezumativă a autorului însuşi. Argumentările, foarte amănunţite şi adesea foarte plastice, vorbesc de la sine.

Din *Introducere*

Conceptul de limită analitică sau de limită a fracţiilor zecimale, la care se reduce pînă la urmă, ia naştere din anumite succesiuni de reprezentări. Atunci cînd aceste şiruri de reprezentări se întrerup în principiu sau cînd se introduce în gîndire finalul lor ideal, ia naştere o formă dublă de intuiţie, formă a cărei linie de separaţie poate fi continuată de-a lungul întregii speculaţii epistemologice (pp. IX—X).

Observînd în chipul cel mai stăruitor procesul nostru de gîndire şi relaţiile sale cu percepţia, nu ajungem la concluzia că există două feluri de concepţii complet diferite, care ar fi egal îndreptăţite de a fi considerate ca intuiţie fundamentală a ştiinţei riguroase, din cauză că nici una din aceste concepţii nu dă rezultate absurde, cel puţin în măsura în care este vorba de matematica pură (p. 2).

Totuşi rămîne un fenomen extrem de ciudat faptul că, după ce se înlătură tot ceea ce putea ascunde adevărul şi ne-am putea aştepta să privim în sfîrşit imaginea adevărului clară şi neechivocă, acest adevăr ne apare totuşi sub o dublă formă. Cel care a observat mai întîi prin cristalul limpede ca apa imaginea dublă a obiectului simplu n-ar fi putut arăta acest lucru prietenilor săi cu mai multă emoţie decît fac eu astăzi cînd trebuie să mă hotărăsc să dezvolt, după o foarte grijulie şi foarte perseverentă reflecţie, dubla perspectivă asupra bazelor ştiinţei noastre.

Aceste două moduri de reprezentare eu le denumesc *idealism* şi *empirism*, ca să folosesc nişte noţiuni cunoscute cu care ele nu mai au comun decît puţin, atunci cînd sînt dezvoltate în amănunt. Pentru a le caracteriza pe scurt pe amîndouă, idealismul crede în realitatea limitelor conceptelor neperceptibile, nereprezentabile, cerute de procesul nostru de gîndire. Empirismul este sistemul renunţării complete şi admite ca existent sau corespunzător existentului numai perceptibilul, deci nu coincide de loc cu pironismul clasic (p. 3).

Dacă însă în aceste demonstraţii ne întoarcem mereu la ideile elementare din care sînt compuse şi se pune din nou întrebarea dacă orice raţionament satisface complet, atunci se descoperă în fiecare dintre ele cel puţin un loc care corespunde unei lacune în şirul nostru de reprezentări, în care apare ceva absolut nemijlocit, a cărui existenţă de fapt nici nu se încearcă vreodată să se demonstreze. Acest ceva este însăşi *limita*. Ea se poate apropia oricît de mult de noi, însă totdeauna ne desparte de ea o prăpastie de netrecut, continuitatea reprezentărilor fiind întreruptă undeva. Săritura peste această prăpastie se numeşte, în chip de atenuare, trecere la limită, totuşi numele arată cît de mult se simte lacuna.

În realitate, dacă nu ... se cunoaște deja limita unui proces $f(x)$[1], dacă însă condiția principiului general este satisfăcută, și se afirmă că procesul trebuie să aibă o limită, atunci nu se afirmă nimic altceva decît că prin regula $f(x)$ s-a creat sau s-a produs o mărime despre care nu se știa nimic înainte și care fără operația $f(x)$ nici nu era nevoie să existe. În ce constă însă o mărime-limită astfel produsă? Cum ar trebui să ne-o imaginăm?

Nimeni n-a văzut rezultatul numeric al extragerii rădăcinii din 2, continuată în gînd pînă la infinit, operație pe care noi o notăm cu $\sqrt{2}$, pentru a întreprinde cu aceasta, într-un mod de asemenea naiv, toate operațiile de calcul pe care le facem, de exemplu, cu numărul 2 însuși. Dacă totuși se afirmă că aceste limite există, atunci această afirmație este sau falsă, sau necesită o completare, pe care o vom căuta zadarnic în literatura matematică de specialitate, cu atît mai puțin în scrierile filozofice înrudite cu această literatură.

Geneza limitei dintr-un proces $f(x)$ absolut nemărginit, așa cum îl presupunem pînă acum, este desigur totuși, ca însuși $f(x)$, o totalitate foarte cuprinzătoare de reprezentări în al căror domeniu de-abia în capitolul despre principiul general al convergenței și divergenței ne-am ostenit să introducem idei ordonatoare. Un caz particular al principiului general, conform căruia o funcție care se modifică numai în același sens, și nu crește nici nu descrește peste orice limită, trebuie să aibă o anumită limită, un caz care ca reprezentare mai simplă s-ar fi potrivit mai degrabă pentru studiul genezei limitei, conține în fine ca un caz cu totul special un mod mult mai îngrădit de formare a limitei, pînă la care, așa cum se arată în capitolul deja citat, se poate restrînge lacuna criticată existentă în deducerea propozițiilor universale. Mă refer la reprezentarea obișnuită a așa-numitelor iraționale prin fracții zecimale infinite. Ea contează deci ca cea mai scurtă expresie pentru tot ceea ce în analiza operațiilor infinite apare pînă la sfîrșit încă nedemonstrat (pp. 7—9).

---

[1] Se notează cu $f(x)$ un șir de reprezentări care este legat de un alt șir de reprezentări x în așa fel încît fiecărei reprezentări x îi aparține o reprezentare anumită $f(x)$ (p. 4).

Concepția idealistă și empiristă asupra limitei și mărimii în analiză

Sistemul idealist

IDEALISTUL:

După cît pot să-mi dau seama, există numai două puncte de vedere principale prin care s-ar putea demonstra existența concretă a limitei L a lui $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ După primul punct de vedere, punctul limită L este reprezentat ca limită a unui segment, a cărui lungime este infinit descrescătoare și poate fi oricît de mică vrem. După al doilea, punctul limită este înțeles ca punct de separație a două segmente (p. 60).

Dacă, deci, construim pe unitatea de lungime un segment care să unească punctele $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ și $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_{p+1})$ și să aibă lungimea $\frac{1}{10^p}$, atunci toate segmentele $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, oricît de mare ar fi n, se termină aici, așa încît și lungimea-limită L ipotetică, caracterizată prin faptul că diferența $L - 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \ldots \alpha_n$ poate deveni oricît de mică prin mărirea lui n, trebuie să intre în acest segment s_p. Dacă ne închipuim că alegem p din ce în ce mai mare, atunci s_p poate deveni oricît de mic, și orice s_p care urmează este conținut în toți s_p precedenți. În acest mod punctul ipotetic se poate include între limite din ce în ce mai înguste. Dacă acum facem ca segmentul s_p să se anuleze, atunci extremitățile sale coincid în sfîrșit și în punctul ipotetic L, a cărui existență concretă ar fi astfel dovedită.

Aceasta nu este totuși o demonstrație, ci o înșelătorie. De fapt segmentul s_p este mărginit de puncte date prin ipoteză și rămîne segment la nesfîrșit. Negreșit că pe baza supozițiilor noastre putem micșora segmentul la infinit. Acesta este însă un procedeu care nu schimbă în esență nimic în reprezentarea noastră. Mare sau mic, segmentul s_p rămîne totdeauna un segment între două puncte raționale. Dacă brusc, fără nici o motivare logică punem în locul segmentului un punct, aceasta este un act prin care noi introducem, evident în mod arbitrar, o nouă reprezentare pe care o facem să succeadă nemijlocit primei reprezentări și anticipăm exact ceea ce trebuia să fie demonstrat. O suprapunere *treptată* a două puncte, cum s-ar mai putea denumi acest proces, este o absurditate. Punctele sînt sau separate printr-un segment, sau există în realitate numai un punct; ceva intermediar nu există.

Celălalt procedeu de demonstrație este următorul:

Punctele pe care ni le imaginăm pe segmentul unitate se împart: 1) în cele care se găsesc într-unul din segmentele 0, α_1; 0, $\alpha_1\alpha_2$; 0, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ etc.; 2) în cele la care nu se întîmplă niciodată aceasta; 3) în puncte ipotetice care nu aparțin la nici una din cele două categorii. Mai întîi este ușor de arătat că la a treia categorie nu aparține nici un punct sau, cel mult, aparține unul. Căci următoarele două observații sînt valabile. *Întîi*: dacă un punct aparține primei categorii, același lucru este adevărat pentru toate punctele între zero și acel punct, și dacă un punct aparține celei de-a doua categorii, același lucru este adevărat pentru toate punctele dintre el și 1. *Al doilea*: toate punctele zecimale aparțin uneia din cele două categorii.

Din prima observație urmează că segmentele pe care sînt situate punctele uneia sau alteia din primele două categorii sînt legate unele de altele, astfel încît punctul de categoria a treia, dacă există, poate fi numai extremitatea comună celor două segmente. Dacă însă segmentul unitate se împarte în două segmente, cu punctele care o dată sînt acoperite, și cu puncte care niciodată nu sînt acoperite, atunci extremitatea lor comună poate fi în același timp limita ipotetică L, căci ea este un punct care îndeplinește condiția lim $(L - 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_p) = 0$, de unde mai urmează că un punct de categoria a treia este imposibil, căci punctul-limită nu este niciodată acoperit.

Oricît de convingător ar suna întreaga explicație, totuși și ea este o înșelătorie, deși mai puțin evidentă ca așa-zisa primă demonstrație; ba chiar mărturisesc că un timp eu însumi mă amăgeam că am descoperit cu adevărat demonstrația pentru conceptul de limită.

Pentru a caracteriza imediat cu un cuvînt punctul slab al demonstrației, am spune că ea ar fi perfect riguroasă dacă am lărgi conceptul de mărime geometrică cu un adaos: anume că lungimea constă din puncte.

Conceptul de mărime presupus nu ne dă altceva decît o lungime precisă 0 ... 1, și pe aceasta ne dă nenumărate puncte pe care ni le putem închipui, negreșit, oricît de dese. Dar, așa cum am observat, la fiecare act izolat de reprezentare (*effort* *d'imagination*) corespunzînd unei imagini anumite, care nu se desfăşoară nebulos totdeauna între puncte vecine, noi ne reprezentăm o porţiune de dreaptă, care este absolut egală — pînă şi în lungime — cu unitatea. Ceea ce spunem despre zecimale, anume că ele trebuie să aparţină sau categoriei întîi sau categoriei a doua, este adevărat despre orice categorie de puncte, din care se crede că ar consta punctele date pe segmentul unitate. Deci noi putem spune că punctele date aparţin pînă la un punct N inclusiv categoriei întîi şi pînă la un punct N' inclusiv categoriei a doua ; că N şi N' sînt oricît de apropiate ; în sfîrşit, că între ele nu poate fi situat nici unul din cele date prin ipoteză. Precis, absolut precis, numai acest lucru se va putea demonstra şi poate fi demonstrat în cele de mai sus.

Înşelătoria, în consecinţă, constă, evident, în aceea că noi admitem că nişte segmente sînt determinate prin punctele presupuse cunoscute, fără ca extremităţile lor să fie indicate. Un segment este determinat numai prin cele două extremităţi ale sale. Cele două segmente în care se împarte unitatea 0 . . . 1 au, desigur, extremităţile 0 şi 1 ; punctul de limitare comună nu este însă determinat prin prima parte a demonstraţiei. Un segment anumit este determinat numai pînă la un punct N al mulţimii de puncte reprezentate, celălalt segment este determinat de la un alt punct similar N' înainte. Despre parcurgerea lor între aceste două puncte nu se comunică nimic. Desigur că în reprezentare putem mări după voie desimea punctelor. Astfel vor apărea în locul segmentului $N \dots N'$ alte $N_1 \dots N'_1$, care aparţin totdeauna celor precedente şi pot deveni oricît de mici vrem. Ele rămîn totuşi segmente şi, aşa cum s-a subliniat cu insistenţă la primul procedeu de demonstraţie, prin acest proces de micşorare nimic nu s-a schimbat în esenţă în reprezentare ; anularea segmentului sau transformarea segmentului într-un punct este mai degrabă un act arbitrar, pe care o demonstraţie veritabilă nu-l tolerează.

Dacă însă schimbăm în chip esenţial reprezentarea lungimii şi n-o mai concepem ca suport al punctelor deja cunoscute, ci pur şi simplu ca un agregat de puncte, deci abandonăm ideea că linia şi punctul ar fi ceva absolut diferit, atunci evident că această critică adusă celui de-al doilea procedeu de demonstraţie se prăbuşeşte şi trebuie să-i recunoaştem acestui procedeu toată rigurozitatea. Negreşit că nu vom putea să ne imaginăm, probabil, în reprezentare toate punctele din care constă segmentul; dar este suficient ca ele să existe. Ele se vor împărți totdeauna în două categorii: cele care ajung o dată să acopere segmentul și cele care nu vor ajunge niciodată să-l acopere, iar dintre punctele de a treia categorie va putea exista numai unul, care însă, deoarece un punct n-are lungime, nu se ia în considerație sau care trebuie să coincidă cu extremitatea comună a celor două segmente.

Această reprezentare nu este însă precisă, limpede. Se poate, desigur, cita în favoarea ei imaginea creionului cu vîrful ascuțit care trasează o linie fină. Dar aici este implicată ideea de mișcare, linia este traiectoria vîrfului mobil. Reprezentarea calmă, fermă despre spațiu nu va permite niciodată ca imaginea unei linii exacte, uniforme să ia naștere din imaginea unui șir de puncte încă și mai des. Căci punctele sînt tocmai fără dimensiune, și de aceea un șir des oarecare de puncte nu poate niciodată să devină o distanță, ci distanța va fi privită totdeauna ca suma intervalelor dintre puncte.

Concepția despre linie ca șir de puncte izvorăște, de asemenea, din același salt logic, pe care l-am mai admonestat de două ori. Așadar, eu resping extinderea conceptului de mărime, conform căruia linia trebuie să fie compusă din puncte, suprafața din linii etc.

De fapt se cere chiar ceva imposibil atunci cînd o succesiune de puncte scoase dintre punctele date trebuie să determine un punct care nu ține de cele date. Eu consider acest lucru atît de inimaginabil, încît afirm că nici un efort intelectual n-ar putea să smulgă vreodată prin torturi dintr-un creier o astfel de demonstrație pentru existența concretă a punctului-limită, chiar dacă ar reuni darul de divinație al lui *Newton*, claritatea lui *Euler* și strivitoarea forță a spiritului lui *Gauss* (pp. 61—67).

Ca idealist eu cred în realitatea idealurilor mele. Eu cred în realitatea ideilor mele urmărite pînă în cele mai îndepărtate regiuni ale gîndirii mele, chiar dacă ele sînt nereprezentabile în toată veracitatea ca infinitul. Eu cred în infinit și în existența reală a figurilor geometrice exacte, sau — mai corect — în realitatea lor.

De aceea nu trebuie să ne întrebăm:

Putem noi oare, plecînd de la reprezentările noastre inițiale, să ajungem cu necesitate pe o cale oarecare la reprezentarea finală a unui punct-limită?

Ci: Există oare un punct-limită independent de existența unui subiect gînditor, dacă există segmentele 0, α_1; 0, $\alpha_1\alpha_2$; . . . ? (p. 68).

Despre conceptele „nemărginit” și „infinit”

Mulțimea punctelor componente ale segmentului unitate sau a segmentelor în care se descompune unitatea va fi denumită sau nemărginită, sau infinită (p. 69).

Noi numim nemărginit de mare ceva ce este finit și care totuși nu se poate depăși prin multipli de măsuri constante, pentru că ni-l închipuim în creștere, gata să scape din orice sferă de mărimi. Îndată ce ne reprezentăm o măsură și mai mare, ne imaginăm marele nemărginit și dincolo de aceasta. Dacă gîndul însoțitor lasă marele nemărginit liber, dacă el renunță să-și satisfacă nevoia de reprezentare, atunci nemărginitul devine conceptul a ceva ce este mare peste orice măsură și a ceva ce nu-ți mai poți reprezenta, anume infinitul. Este de cea mai mare importanță să reținem că nemărginitul este totdeauna finit, că infinit se numește ceea ce urmează după finit în direcția a ceea ce este gîndit ca nemărginit, și că de aceea el însuși nu este finit.

Astfel am răspuns și la întrebarea „care este numărul punctelor componente de pe segmentul unitate”: în reprezentare numărul lor este nemărginit de mare, deci în realitate este infinit de mare (p. 71).

Infinitul mic și proprietățile sale

Propoziția conform căreia numărul punctelor componente de pe segmentul unitate este infinit de mare dă naștere cu necesitate logică la credința în infinitul mic. Căci dacă susținem ceea ce înfățișam mai înainte ca fiind un adevărat concept de mărime, anume că punctele de pe o lungime nu se succed fără distanță între ele, deci nu se pot lovi unul de altul, ci totdeauna sînt separate prin segmente, deci că simple puncte nu pot forma niciodată un segment, atunci și punctele infinit de multe sînt separate prin infinit de multe segmente, și dintre aceste segmente nici unul nu poate să fie finit, cu alte cuvinte conținut de un număr finit de ori în segmentul unitate, deoarece prin faptul că unitatea de lungime este arbitrară, orice segment oricît de mic trebuie să fie de aceeași natură ca unitatea de lungime, astfel încît pe ea ar trebui să existe iarăși infinit de multe puncte componente.

Rezultă, așadar, că segmentul unitate se descompune în infinit de multe segmente componente, dintre care nici unul nu este finit.

Așadar, infinitul mic există realmente (pp. 71—72).

Scurtă recapitulare a sistemului idealist

Pentru a rezuma pe scurt, în încheiere, ideile mele fundamentale în matematică, ele stabilesc acest șir de mărimi:

Infinit mic, nemărginit de mic, finit, nemărginit de mare, infinit mare. Zero nu intră aici, el nu este mărime.

Dintre acestea, mărimile reale și existente în realitate independent de prezența unor ființe gînditoare sînt: infinit mici, finite, infinit mari.

Gîndirea idealistă presupune o lume care nu numai că este corelată într-un fel cu reprezentările noastre, ba chiar cu cele mai abstracte intuiții și concepte, dar este o lume care, dincolo de aceste reprezentări, posedă un conținut real și chiar dacă omenește nereprezentabil, totuși pentru noi adînc întipărit în conștiință (pp. 85—86).

Critica empiristă a sistemului idealist

EMPIRISTUL:

Idealistul conchide în felul său că chiar mulțimea numerelor întregi ar fi infinită, *a fortiori* mulțimea tuturor numerelor. Prin aceeași logică se ajunge la un rezultat ciudat. Să considerăm fracțiile zecimale < 1, deci de forma

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots$$

Deoarece, în cazul că ar fi să le putem continua la infinit, este necesar să se dea o regulă, o lege potrivit căreia să se efectueze această continuare, atunci atît șirul nemărginit, cît și legea sa sînt oarecum concepte identice. De fapt, o operaţie infinită, fără o regulă după care ea trebuie continuată, este o *contradictio in adjecto*. Căci dacă prin infinit se înţelege că ceea ce merge înainte se desprinde oarecum de persoana umană însoţitoare şi continuă în mod independent drumul la nesfîrşit, atunci, dacă mersul înainte ar fi să aibă loc într-un anumit mod, trebuie să i se dea pe parcurs o regulă precisă.

Dacă împreună cu idealistul mă întreb asupra numărului acestor legi, trebuie să-mi dau răspunsul: infinit, căci forma legii este prescrisă, deci este de acum înainte independentă de omul care gîndeşte; în consecinţă, nu mai rămîne, desigur, după modul idealist de raţionament, nici un alt răspuns. Dacă, acum, în reprezentare numărul nemărginit al mărimilor arbitrare *a* este de fapt infinit, atunci de aici urmează că şi numărul mărimilor α_ν este tot infinit, pe scurt, întregul şir 0, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ este arbitrar şi, extins pînă la infinit, nu se supune nici unei legi. Dacă unui spirit extrem de ager i s-ar pune la dispoziţie cifrele acestora într-un număr arbitrar, el n-ar putea stabili nimic asupra succesiunii lor.

Într-un cuvînt, acestea n-ar fi numere căci, desigur, este permis să folosim acest cuvînt în sensul gîndit de om pentru părţi de unităţi scrise pe hîrtie şi pentru acele părţi de unitate care nu se pot scrie în cifre, dar care sînt determinate totuşi printr-o lege de succesiune a cifrelor, lege care se poate scrie pe hîrtie.

Şirurile neperiodice 0, $\alpha_1\alpha_2 \ldots$ nu sînt, în consecinţă, numere. Ar putea ele corespunde unor numere? În sens idealist, fără îndoială ... Idealistul trebuie deci să ajungă la concluzia că o dată fixată unitatea, există nenumărate părţi din unitate care nu se pot reprezenta prin numere (pp. 88—89).

IDEALISTUL:

Sînt pregătit să ascult astfel de concluzii din ipotezele mele fundamentale, ele nu mă sperie absolut de loc. Empiristul conchide foarte corect că eu trebuie să admit şirurile de numere care nu pot da niciodată o lege pentru continuarea lor şi totuşi merg înainte la infinit. Desigur, acest lucru este nereprezentabil, dar nu nereprezentabil într-o măsură mai mare decît „infinit” şi „etern”. Numerele care nu se pot scrie sînt o consecinţă a concepției general umane despre esența lucrurilor, consecință la fel de inevitabilă ca și infinitatea spațiului și eternitatea timpului.

Dacă plecăm de la reprezentarea mărimilor, atunci toate lungimile mai mici decît unitatea de lungime sînt de aceeași natură în reprezentare. Să ne imaginăm puse în fața noastră unitatea și o lungime mai mică. Dacă raportul dintre lungimea mai mică și unitate este determinat prin măsurători, cifrele zecimale se stabilesc succesiv și, operînd în acest fel, negreșit în ipoteza că folosim instrumente satisfăcătoare, se va putea continua deci să se dezvolte empiric o fracție zecimală nemărginită oricît de mult vrem. În acest proces de generare a unei fracții zecimale nimic totuși nu condiționează o lege care să domine șirul său de cifre.

Am putea să ne gîndim la următorul mod de generare a unui număr infinit neperiodic: fiecare cifră va fi pur și simplu trasă la sorți. Deoarece totuși se poate face ipoteza că acest joc de noroc are loc de o veșnicie sau pentru toată veșnicia, prin aceasta s-ar produce ideea de număr neperiodic (pp. 90—91).

EMPIRISTUL:

Ipoteza fundamentală idealistă este demascată

Acum mă ocup de ipotezele doctrinei idealiste.

Ipoteza inițială a idealismului, de-abia subliniată de către idealist, este existența măsurii precise. Ea stă la baza tuturor considerațiilor și raționamentelor sale. El deduce infinitul mic, cu care face demonstrația limitei, din reprezentarea lungimii exacte. Din această reprezentare decurge scala sa infinită a categoriilor de mărimi. El se sprijină pe aceeași reprezentare pentru a face posibilă în gîndire generarea fracțiilor zecimale infinite neperiodice.

Astfel idealistul leagă deducțiile sale cele mai importante de conceptul de lungime exactă și de faptul că natura sa este identică în toate părțile ei componente care pot fi gîndite oricît de mici; din toate acestea se obține întreruperea bruscă a unei linii, divizibilitatea sa infinită și toate celelalte.

Aici, la măsura exactă se despart drumurile noastre. Eu o consider ca ceva nereal, imposibil de conceput, pe scurt, ca un cuvînt golit de conținut (pp. 92—93).

IDEALISTUL:

În descrierea empirică a procesului psihologic care duce la ideal nu se menţionează deci presiunea irezistibilă care ne împinge în diferite direcţii din domeniul reprezentabilului. Da, dacă ne ataşăm de ideile aşa de fireşti pentru noi, empiristul vede în aceasta o rătăcire a instinctului de cunoaştere. Se poate ca această concepţie a sa să-l ferească de a se înşela: totuşi renunţarea pe care şi-o impune nu este pentru oricine. În timp ce lasă curs liber gîndurilor sale numai în cadrul acestor reprezentări şi concepte, care corespund percepţiilor sau sînt derivate din acestea, el acţionează ca un băiat cuminte care nu sare gardul grădinii. Ideea idealistă, ca un băiat zburdalnic, îşi bate joc de îngrădiri, declară tot domeniul de reprezentări şi de presimţiri ca al său, şi-i place să se urce pe înălţimi cu perspective îndepărtate, trecînd prin mărăciniş şi peste stînci. S-ar putea să se rătăcească, dar sigur că va putea să vadă mai mult decît băiatul cuminte (pp. 112—113).

Sistemul empirist

EMPIRISTUL:

Tot ceea ce are temei ştiinţific, orice cunoştinţă sigură pleacă de la percepţii nemijlocite şi trebuie să se poată reduce din nou la sistemul nostru de reprezentări corespunzător domeniului perceptibil. Aici înţeleg prin percepţii tot ceea ce devine pentru noi conştient, deci nu numai percepţiile senzoriale, ci şi cele care se referă la procesele noastre de gîndire (p. 114).

Prima mea sarcină este să lămuresc empirist conceptul de limită, care din punct de vedere idealist trebuie privit ca axiomă. În matematica empiristă nu există axiome. Acolo unde ea are nevoie de ele, înseamnă că fundamentele sale sînt insuficient cercetate.

Demonstraţia mea pentru existenţa limitei rezultă din reprezentările mele geometrice fundamentale. O reprezentare este *reală* dacă eu îmi imaginez o figură geometrică corespunzătoare descrierii sale din ce în ce mai precise. Îmi permit să las liberă fantezia mea dacă ea idealizează la infinit trăgătoarea de linii, fibra hîrtiei, tuşul. Idealizarea este din punct de vedere empirist perfect justificată chiar acolo unde nu există nici un ideal reprezentabil. Căci idealizînd, eu transform reprezentările mele treptat în sensul voit de mine, ele rămînînd însă totdeauna reprezentări reale. Față de idealul însuși eu fac cale întoarsă.

Astfel, nimic nu ne împiedică să făurim în cadrul reprezentărilor reale imaginea din ce în ce mai perfectă a unei drepte. Este absolut interzis fanteziei noastre de a deriva ideea unei drepte perfect exacte din reprezentări reale.

Astfel, deosebirea de păreri dintre mine și idealist se rezumă la opoziția: exactitate perfectă și exactitate oarecare (pp. 117—119).

Punctul este ceva spațial comun la două drepte concurente. Dacă rămînem la această definiție, care reclamă numai reprezentarea liniei, atunci urmează imediat că, gîndind empirist, lungimea constă din puncte sau poate fi gîndită compusă. Oricît de fină mi-aș imagina eu linia, ea are totdeauna o grosime, care, de asemenea, nu este, desigur, exactă, dar trebuie să se afle într-un raport finit față de lungimea liniei. De aceea, dacă reprezentările mele pleacă de la linie, atunci punctul va fi o porțiune din linie, de o lungime egală cu grosimea liniei, iar dimensiunile sale se vor afla într-un raport finit față de unitatea de lungime.

Dacă $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ reprezintă o fracție zecimală infinită, atunci din inegalitatea $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_{p+1})$, valabilă pentru orice p, s-a tras concluzia că extremitățile tuturor lungimilor

$$0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{p+\nu} \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

se găsesc în segmentul s_p, care unește punctele $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ și $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_{p+1})$.

Orice segment $s_{p+\nu}$, care urmează, intră în segmentul s_p precedent. Dreapta pe care o numim segmentul unitate este, în reprezentarea noastră, oricît de subțire vrem și o porțiune din ea, tot atît de scurtă pe cît de subțire, o concepem ca un punct pe segment. Însă oricît de subțire ne-am imagina dreapta, totdeauna va exista un p dat nemijlocit prin această subțirime, astfel încît segmentul s_p nu este mai lung decît ne reprezentăm noi subțirimea dreptei, și atunci $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ este linia-limită $(0, \alpha_1\alpha_2 \ldots)$ cu precizia cu care noi gîndim chiar în această clipă. Această exactitate depinde de voința noastră și este atribuită în egală măsură lungimilor raționale, celor iraționale construite într-un fel oarecare și altor limite determinate prin fracții zecimale infinite, între care nu există, la urma urmelor, cea mai mică deosebire.

Așa cum observam mai înainte, noi sîntem idealiști inconștienți; poate ar fi mai bine să spunem: idealiști înnăscuți.

În desen, de pildă, ne reprezentăm limita în felul următor: ne imaginăm extremitățile segmentelor 0, α_1; 0, $\alpha_1\alpha_2$ ... purtate începînd de la punctul zero, însemnate prin liniuțe fine scurte, duse transversal pe segment. Aceste liniuțe se îndesesc din ce în ce mai mult și la un moment dat trebuie să înceteze, pentru că pînă la sfîrșit dispozitivele de tras semne distincte nu mai funcționează și, în genere, nu se pot trage liniuțe în număr nelimitat. Separată de liniuțele 0, $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ printr-un scurt segment pe care îl vom numi ,,segment iluzoriu'' și formînd extremitatea șirului de puncte, urmează acum o liniuță fină netă, ceva mai lungă decît liniuțele precedente, care reprezintă limita. În segmentul iluzoriu dinaintea limitei își plimbă umbra tot felul de strigoi filozofici. Aici sofismele faimoase își fac jocul; acest segment este ceea ce idealistul descompune în *quantitates infinitesimas*.

Desenul empirist arată oarecum altfel. Liniuțele sînt continuate, chiar dacă dispozitivele de tras semne nu mai permit liniuțe distincte. Liniuțele se contopesc, în semn că lățimea lor este mai mare decît distanța segmentului 0, $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ pînă la limită. Desenarea mai departe a liniuțelor încetează dacă nu se mai poate observa trasarea mai departe a liniuțelor și dacă celelalte liniuțe ar fi trase mereu prin același loc. Aceasta este atunci limita (pp. 122—123).

Deoarece pentru empirist infinitul mic și infinitul mare în sensul idealistului nu există, aceste cuvinte, în cazul cînd el ar trebui să se servească uneori de ele, nu înseamnă în gura sa nimic altceva decît nemărginit de mic sau de mare, fără limită, fără sfîrșit, nemăsurat, și orice alte denumiri mai există care înseamnă suprimarea îngrădirilor pentru pătrunderea fanteziei noastre într-o direcție dată.

În loc de a spune despre o mărime variabilă că devine infinit mare sau mică, empiristul preferă să spună că ei i se asociază valori suficient de mari sau suficient de mici, adecvate scopului dat (pp. 123—124).

Dacă ne imaginăm nu numai o mărime fixă dată în ambele feluri, ca lungime și ca subunitate de lungime exprimată numeric, ci ne închipuim totalitatea mărimilor incluse între două limite, atunci din punct de vedere empirist echivalența între concepția geometrică și aritmetică despre argumentul [unei funcții] se izbește de dificultăți. Aici nu are nici o însemnătate faptul că eu resping numerele infinite neperiodice ale idealistului. Numai următoarele reflecții au pondere în favoarea unei concepții, cu precădere aritmetică, despre argument.

Deoarece eu nu-mi imaginez că o lungime ar avea un sfîrșit exact, ci un sfîrșit de o neexactitate oricît de mică, aș transpune asupra tuturor mărimilor imprecizia pornind în același timp de la reprezentarea geometrică. Dacă îmi imaginez idealizarea dreptelor dusă oricît de departe, toate părțile lor, raționale și iraționale, sînt totuși molipsite de aceeași imprecizie; în realitate există numai fracțiile raționale ale dreptelor, ai căror numitori reduși nu depășesc o anumită mărime. În consecință, din toate porțiunile posibile 0, α_1 α_2 ... aș putea pune la bază ca imagine cantitativă a argumentului numai pe acelea care posedă un număr de cifre determinat, deși oricît de mare. Evident, aceasta este o concepție absolut nesatisfăcătoare, extrem de mărginită.

Pentru a păstra conceptului de argument toată generalitatea, sau trebuie ca numărul cu legea sa progresivă să formeze valoarea particulară a argumentului, sau, ceea ce înseamnă același lucru, trebuie ca lungimea parțială a segmentului unitate să fie gîndită cu o precizie arbitrar de mare, independentă de reprezentarea segmentului unitate întreg. Numai astfel se dovedesc justificate și din punct de vedere empirist concepția aritmetică și concepția geometrică a argumentului.

Dacă, în consecință, analistului care gîndește empirist îi este probabil cel mai comod să lase în liniște acele distincții geometrice plicticoase și să dea preferință concepției numerice despre argument, totuși nu trebuie să se uite că această concepție nu poate fi decît proteron. Mărimea matematică liniară este și rămîne proton. Căci numai necesitatea împărțirii, îndeosebi în ocupația de a măsura, a putut produce numărul și, în consecință, legile sale de formare. Arta măsurării împarte unitatea mai întîi în părți egale, apoi reclamă împărțirea incomensurabilă a unității pentru a stabili în mod aritmetic relații geometric intuitive; conceptul de irațional și cel de legi ale sale iau naștere. Iar generalizarea științifică și sinteza acestui proces produc, în sfîrșit, conceptul de argument.

Idealistul ajunge în aparență mult mai repede la țintă. Punerea pe același plan — justificată logic — a argumentului geometric și aritmetic îl dispensează, s-ar putea subînțelege, de considerații asemănătoare cu cele pe care le-am expus mai înainte. Dacă totuși el privește mai atent, va afla că ele nu-i sînt dăruite. Tocmai natura identică a părților geometrice ale unității și natura diferită a părților sale exprimate aritmetic îl silesc și pe el să ia în considerare semnificația aritmetică a punctelor argumentului. În geometrie și mecanică nimic nu ne împiedică deocamdată să concepem geometric argumentul, caz în care supozițiile empiriste nu se vor dovedi mai puțin utilizabile decît cele idealiste. În analiză se deschid însă domenii pentru care concepția pur geometrică este insuficientă și unde numărul trebuie asociat argumentului (pp. 126—128).

Despre o concepție intermediară a diferențialei

Între concepția idealistului, care lasă pe dx să fie pe drept infinit de mic, dar leagă de aceasta ideea a ceva imobil, invariabil, și concepția mea, care presupune pe dx finit și suficient de mic, dar de asemenea imobil, intervine încă o a treia concepție, potrivit căreia, așa cum se spune de obicei, dx este o mărime pe cale de dispariție (*quantité évanouissante*), așadar o mărime care variază continuu în direcția lui zero. Această idee de mărime care se găsește într-o continuă curgere mi se pare categoric că este contrară omului. Nu-mi vine să accept ideea că avem în formule simboluri pentru mărimi care se pun în mișcare și aleargă spre zero, pe care totuși ele nu-l pot ajunge decît la sfîrșitul operației. Atîta vreme cît cartea este închisă, domnește o liniște adîncă. Din momentul cînd o deschid, începe cursa spre ținta zero între mărimile prevăzute cu d (pp. 140—141).

IDEALISTUL:

(Despre funcțiile anortoide, adică nediferențiabile)

Infinitatea punctelor corespunzătoare infinității valorilor argumentului constituie *echivalentul geometric* al acestor funcții. Nu spun imagine, deoarece în acest echivalent este conținut ceva nereprezentabil, infinitul mic. Dacă luăm o lege anortoidă, de pildă legea care dă un punct de inflexiune între două valori ale argumentului, oricît de apropiate vrem, așa cum se poate întîmpla cu maximele și minimele repetate extrem de des, și dacă ne întrebăm în mod idealist ,,care va fi distanța între punctele de inflexiune vecine", așa cum s-a arătat destul de bine, ,,nemărginit de mică" ar fi un răspuns fals, căci acest cuvînt se referă la reprezentarea pe care ne-o formăm noi, nu la distanțele existente independent de noi. Distanțele punctelor de inflexiune sînt infinit de mici.

Și astfel echivalentul geometric al funcțiilor anortoide este oarecum reprezentarea geometrică a infinitului mic (pp. 147—148).

Fragment din „Considerațiile finale" ale însuși autorului „asupra idealismului și empirismului":

Deoarece nu este posibil un mod deprezentare care să corespundă felului de gîndire atît al idealistului, cît și al empiristului, trebuie să căutăm un mod de prezentare alcătuit numai din ceea ce nu contrazice nici unul din cele două feluri de gîndire; prin aceasta modului neutral de prezentare i se impun următoarele îngrădiri:

Toate conceptele care aparțin numai uneia din cele două concepții fundamentale trebuie scoase din uz. Așadar, mai întîi întreaga metafizică idealistă, infinitul mare și infinitul mic și ceea ce ni se va dezvălui prin cercetare ulterioară ca ficțiuni idealiste. Pentru a evita contradicția empiristului nu ne este permis să părăsim domeniul reprezentabilului. Cu ideea empiristă de exactități oarecare procedăm ca și cu ficțiunile idealiste, adică nu o vom utiliza de loc în prezentarea neutrală, ci mai degrabă vom întrebuința conceptele de mărime, valoare, lungime, segment, interval întocmai cum ar face idealistul. Empiristul se poate consola cu faptul că aceste expresii conțin implicit contrariul.

În consecință, respectînd aceste îngrădiri, mă voi servi de un mod de exprimare empirist. El are tocmai avantajul de a nu fi contestabil din nici un punct de vedere, deoarece nu foloseşte niciodată expresii care să însemne alte concepte decît cele scoase din percepţii şi care se referă la percepţii.

Dimpotrivă, în ceea ce priveşte *dezvoltarea logică* a unei astfel de teorii şi efectuarea demonstraţiilor sale, ea trebuie considerată în rîndul celor *idealiste*, deoarece noi nu excludem reprezentarea idealistă a mărimilor atunci cînd vorbim de valori. Căci demonstraţiile care mulţumesc pe idealistul încrezător în exactitatea perfectă trebuie să satisfacă *a fortiori* pe empirist, care îşi imaginează denumirile mărimilor ca fiind numai de o exactitate oarecare.

Aşadar, limbaj empirist, demonstraţii idealiste. Astfel navighează corabia noastră Argo fără teamă printre Symplegadele[1] periculoase (pp. 155—156).

Prima treaptă de dezvoltare a conceptului de limită

Mă refer la forma raţionamentului lui *Zenon*, eleatul, după care ceea ce se mişcă uniform nu parcurge nici o distanţă, de pildă săgeata lansată nu poate atinge ţinta.

Săgeata aruncată trebuie să străbată distanţa dintre arc şi ţintă succesiv pe jumătate, pe trei sferturi, şapte optimi din ea etc. Oricît de multe părţi din distanţă ar putea să străbată, totdeauna va mai avea de parcurs un număr nemărginit din aceste fragmente. Deoarece ea trebuie să le fi parcurs pe toate cînd urmează să atingă ţinta, ea nu poate, evident, s-o atingă niciodată.

Paradoxul spune că, deoarece săgeata trebuie să parcurgă de fapt punctele $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ *in indefinitum*, ea rămîne în reprezentarea noastră totdeauna în aceeaşi poziţie faţă de acest şir de puncte, atîta vreme cît mai are de trecut încă în continuare un număr nemărginit de puncte. În această privinţă niciodată nu se poate schimba ceva. Dar săgeata iese deodată, brusc din acest şir de reprezentări şi se găseşte absolut imediat în ţintă.

Ceea ce te surprinde, ceea ce este paradoxal se află deci în contradicţia dintre un şir de reprezentări, care după natura sa este nemărginit (de aceea nu numai că nu cere o încheiere, dar nici nu posedă așa ceva), și încheierea șirului de reprezentări care intervine totuși conform experienței (pp. 160—162).

---

[1] Σύμπλεγάδες — două stînci la intrarea în Pontul Euxin (Marea Neagră). — *C. V.*

Din capitolul :

Despre argument

Fie ca valoarea particulară a unui argument să însemne deci o lungime și semnul său să fie un punct sau un număr ; totuși argumentul, considerat ca totalitatea valorilor sale, nu trebuie identificat necondiționat cu o lungime arbitrară. Între segmentul argumentului și lungime există mai degrabă o deosebire care formează o parte esențială a conceptului de argument. Ea apare la lumină la împărțirea segmentului argumentului.

O valoare particulară a argumentului x_1 poate împărți valorile argumentului din intervalul (0,1) în următoarele trei feluri :

$$0 \leqslant x \leqslant x_1 \quad \text{și} \quad x_1 < x \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant x < x_1 \quad \text{și} \quad x_1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant x < x_1, \quad x_1, \quad x_1 < x \leqslant 1.$$

Această dificultate apare atunci cînd acele trei moduri de împărțire sînt privite ca un procedeu de a descompune segmentul unitate în părți. Atunci ceea ce ele confirmă este numai faptul că dintre cele două părți ale segmentului unitate sau unul nu posedă un sfîrșit, cel puțin nu un sfîrșit care poate fi reprezentat sau indicat, sau că același lucru este valabil și despre cealaltă parte, sau că ambele părți sînt fără sfîrșit, în timp ce punctul care ar trebui să constituie sfîrșitul se separă de cele două părți. Aceasta nu corespunde reprezentării noastre obișnuite despre împărțire, operație prin care vrem să vedem producîndu-se părți de aceeași natură cu întregul, diferite de întreg numai după mărime.

Procedeul nostru de mai sus de împărțire nu s-a referit la lungimea în sine, ci la lungime ca argument, la segmentul argumentului. Căci identificăm o valoare particulară a argumentului cu o lungime, numai că un segment al argumentului înseamnă un șir de valori ordonate după mărimea lor, ordonare în care o mărime determinată numeric poate să apară numai o dată, așa cum în șirul numerelor întregi fiecare număr apare numai o dată. Această parte componentă a conceptului de argument dă cu necesitate acele împărțiri lipsite de un sfîrșit care ar putea fi reprezentat (pp. 180—181).

Prima și cea mai generală împărțire a sistemelor de puncte

Distribuția punctelor dintr-un interval — aici ne gîndim mereu la segmentul unitate (0,1) — poate fi în primul rînd de două feluri.

O dată determinarea, căreia i se subsumează un gen de puncte, poate fi de așa natură încît ea include puncte de genul său în fiecare segment component, oricît de mic, din interval. O astfel de distribuție a punctelor am numi-o pantahică, de la πανταχῆ, πανταχοῦ. O distribuție de puncte pantahică o vom numi, pe scurt, pantahie (pp. 182—183).

Dacă presupun că se dă o determinare *Z*, care produce un număr de puncte arbitrar de mare dar finit, din care — dacă mărim numărul dispunînd convenabil asupra mărimilor oarecare ale determinării — nu mai rămîne liber pînă la sfîrșit nici un interval oricît de mic, atunci vom numi această determinare de puncte o pantahie nemărginită. Limita pantahiei nemărginite, adică totalitatea punctelor posibile, să se numească pantahie completă (p. 184).

Critica idealistă-empiristă a teoriei argumentului

Conceptul empirist al multiplicităților de puncte sau mulțimilor de puncte nemărginit de mare și conceptul multiplicităților numărabile de puncte sînt, evident, perfect identice.

Multiplicitățile numărabile și în special pantahiile nemărginite sînt, în sens empirist, reprezentări și aparțin de drept matematicii empiriste. S-ar pune întrebarea cît de departe ajungem din punct de vedere empirist dacă nerenunțînd niciodată la reprezentare, căutăm să ne apropiem de limita acestor reprezentări cît mai mult posibil.

Fie şirul de puncte

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \ldots \text{ sau } \frac{2^{n-1}-1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

şi punctul $\frac{1}{2}$ să nu aparţină acestei multiplicităţi. Această determinare de puncte va putea fi concepută atît în mod idealist, cît şi empirist. Din punct de vedere idealist ea cuprinde toate punctele determinării în acelaşi timp. Distanţele punctelor devin pînă la urmă infinit mici. Din punct de vedere empirist ne imaginăm punctele ca existînd numai pînă la cel de rangul n şi ne imaginăm numărul n oricît de mare, după necesităţi. Este important acum să verificăm dacă multiplicitatea idealistă este o limită reală a multiplicităţii empiriste, adică dacă multiplicitatea empiristă se apropie aşa de mult de cea idealistă, încît primeşte în ea pînă la sfîrşit orice punct care îi aparţine. Aşa este tocmai cazul aici, pentru că am exclus punctul $\frac{1}{2}$ din multiplicitate (pp. 200—201).

Aici facem abstracţie de şirurile neperiodice ca de o ficţiune pur idealistă luată pînă acum suficient în consideraţie. Apoi trebuie să privim analitic pantahia completă ca totalitatea legilor posibile de succesiune a semnelor 0,1 puse în şirul

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

în locul lui α. Idealistul va admite totalitatea ca existînd în realitate, fiecare lege care mai rămîne de descoperit fiind totdeauna independentă de subiectul gînditor. Empiristul îşi imaginează între acestea legile deja cunoscute, precum şi cadrul pentru cele care mai sînt încă de găsit. Totuşi, să ne întoarcem la imaginea geometrică a pantahiei complete unde fiecărui şir particular $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ îi corespunde un punct particular.

Idealistul a ajuns evident la ţel. Toate valorile Z el le ordonează ca puncte ideale pe dreapta ideală şi între punctele izolate sînt situate segmentele infinit mici de toate ordinele.

El renunţă să-şi facă o imagine a acestei mulţimi de puncte, deci nici nu va insista să-şi reprezinte devenirea lor. Pantahia completă este pentru el limita existentă în realitate a pantahiei nemărginite, în sensul că o infinitate de valori particulare ale acesteia există împreună, întocmai ca şi un număr finit de mărimi. El acordă deci conceptului

$$„\lim\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{4}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}\right)$$

pentru toate combinaţiile lui α" acelaşi drept ca limitei fracţiei zecimale infinite. El preia acest concept printre existenţele în care trebuie să creadă din punct de vedere logic.

Acum să examinăm cum trebuie să-şi imagineze lucrurile empiristul. Mai înainte el trebuie să respingă pantahia completă ca multiplicitate, existentă concomitent, a tuturor cantităţilor posibile. Căci această multiplicitate nu poate fi finită, ea nici nu poate fi nemărginit de mare, deoarece conţine deja toate valorile particulare finite, ea este deci infinită, deci nereprezentabilă şi neexistentă din punct de vedere empirist. Ea ar putea fi deci numai o limită nereprezentabilă. A cui însă?

Empiristul îşi îngăduie să-şi imagineze pantahia numai în devenire, anume ca multiplicitate crescătoare de puncte, care se apropie nemărginit de pantahia completă şi el se întreabă dacă şi cum se poate imagina o mulţime de puncte mereu finită, crescătoare, a cărei limită este pantahia completă.

Răspunsul sună astfel:

Nu există nici o multiplicitate crescătoare de puncte, la care, de pildă, unei mulţimi iniţiale, finite, de puncte i se pot adăuga tot mereu puncte noi după o regulă oarecare şi care s-ar apropia nemărginit de pantahia completă astfel încît fiecare valoare particulară să apară în ea o dată.

Demonstraţia respectivă s-a făcut deja. Multiplicitatea de puncte finită mereu crescătoare este numărabilă. Aşadar, ea produce în orice interval foarte mic valori care nu-i aparţin[1]. De aceea, aceste valori, formînd o pantahie, sînt străine de imaginea empiristă a oricărei multiplicităţi de puncte care umple argumentul. Aceste valori nou adăugate nici nu sînt de natură asemănătoare ca punctele de acumulare ale anumitor apantahii, despre care am vorbit mai înainte, care de asemenea nu aparțin imaginii empiriste, dar au putut fi înglobate în ea. Ele formează mai degrabă majoritatea dominantă, deoarece, așa cum am arătat înainte, pantahia completă nu devine mai săracă în valori particulare prin neglijarea multiplicităților numărabile.

---

[1] Autorul se referă aici la demonstraţia lui *Cantor* pentru nenumărabilitatea continuului.

Deci urmează:

Pantahia idealistă completă sau continuul numeric nu este o limită reală a unui șir empirist oarecare de reprezentări.

De aceea, pentru empirist continuul numeric nu numai că nu există ca limită, dar nici măcar ca țintă de care să ne apropiem, deci pentru el nu există absolut de loc. Aceasta nu este valabil numai în actualul stadiu al științei, ci va fi totdeauna așa (pp. 202—205).

Dacă continuul numeric ar fi o limită de reprezentări reale, așa cum triunghiul ideal trebuie privit ca limită a triunghiurilor empiriste de exactitate oarecare, atunci într-o expunere neutrală a analizei am putea să lăsăm la o parte aceste distincții, aducîndu-ne aminte de ele totuși în expresiile: mărime, valoare, lungime etc. Cînd ar veni vorba despre continuul numeric, unul s-ar gîndi la limita ideală, altul la o treaptă premergătoare limitei. Deoarece continuul numeric nu este o limită reală, expunerii neutrale nu-i rămîne altă alegere decît să-l dea de o parte și să se alăture concepției empiriste (p. 209).

C. Teoria mulțimilor

Problema argumentului unei funcții reale (și a „domeniului de valori" care îi aparține) nu s-a epuizat cîtuși de puțin o dată cu definiția precisă a numerelor reale. Funcțiile manifestă din cînd în cînd o comportare particulară în anumite puncte din domeniul lor de definiție, care în cazurile cele mai importante este un interval; ele posedă acolo „singularități". *H. Hankel* se ocupase deja cu astfel de chestiuni și expusese principiul său de „condensare a singularităților". Astfel de puncte singulare scot în relief, în intervalul care formează argumentul funcției, anumite „varietăți" sau totalități care deși constituie numai o parte a punctelor intervalelor, cu toate acestea pot conține infinit de multe elemente. Se ridică problema structurii unor astfel de varietăți sau mulțimi (de puncte) infinite.

Pe această cale a ajuns *Georg Cantor* (1845—1918) la a sa teorie a mulțimilor. La extinderea teoremei de unicitate a reprezentărilor seriilor trigonometrice în cazul că pentru un număr infinit de valori seria nu este convergentă, el s-a văzut nevoit încă din 1872 să anticipeze anumite discuții, chiar dacă numai „aluzive", care „pot servi să pună în lumină relații ce apar totdeauna atunci cînd se dau mărimi numerice în număr finit sau infinit". (Este vorba de concepte ca „punct de acumulare", „punct-limită", „derivare" la mulțimile de puncte ș. a.)

Totuși, înainte de a ajunge la teoria mulțimilor a lui *Cantor*, avem de citat unii precursori ai săi. Cele mai vechi considerații care se referă la un „paradox al infinitului" provin chiar din perioada finală a antichității ; ele se găsesc în comentariul lui *Proclos* asupra lui *Euclid*, însă nu sînt descoperite, ci numai relatate de el, din nefericire fără să numească un nume.

1. Proclos despre un paradox al infinitului

(Comentariu asupra lui Euclid, pp. 158, 1—20)

Așadar, diametrul împarte cercul în două părți egale. Dar, dacă un diametru generează două semicercuri și dacă se duc prin centru o infinitate de diametre, (semicercurile) vor deveni ca număr de două ori mai multe decît infinitatea (diametrelor). Acest lucru a fost resimțit de unii ca o aporie la împărțirea infinită a cantităților. Noi însă spunem că, desigur, cantitățile se împart la infinit, dar nu într-o infinitate de părți (ἐπ' ἄπειρον, οὐκ εἰς ἄπειρα δέ, *ad infinitum sed non in infinita*). În primul caz se permite ca părțile infinit de multe să existe în act, în al doilea caz însă numai în potențialitate ; prima dă infinitului existența (substanțială), a doua îi dă numai devenire.

În același timp cu un diametru iau naștere două semicercuri și diametrele nu vor fi niciodată (în act) infinit de multe, chiar dacă sînt „luate" la infinit. Astfel încît niciodată nu vor exista de două ori mai mult ca infinit de multe, ci cele care apar (în continuu) de două ori mai multe vor fi totdeauna de două ori mai mult decît cele multe în număr finit. Căci totdeauna diametrele „luate" (adică construite în act) sînt în număr finit.

Şi cum să nu aibă fiecare cantitate diviziuni în număr finit, de vreme ce numărul există înaintea cantităţii, determină toate părţile ei, anticipează nemărginirea şi delimitează totdeauna existentul (părţile subzistente)?

Argumentaţia comunicată de *Proclos* constă în faptul că par să existe mulţimi infinite de diferite mărimi, ceea ce se consideră ca paradox dar se lămureşte oarecum prin referire la natura infinitului care este „potenţială", avînd „existenţa în devenire" (după *Aristotel*).

Paradoxe asemănătoare, care rezultă în ipoteza unui continuu alcătuit din puncte infinit de multe în act, au fost foarte mult discutate spre sfîrşitul evului mediu. De pildă, s-a atras atenţia că punctele circumferinţelor a două cercuri concentrice se pot asocia biunivoc cu ajutorul razelor, deşi o circumferinţă este, evident, mai lungă decît cealaltă. Acelaşi lucru este valabil pentru diagonala şi latura pătratului atunci cînd se asociază punctele lor prin perpendiculara pe latură (cf. *A. Maier, Die Vorläufer Galileis*, pp. 135—179, în special p. 164 şi urm., asupra aşa-numitelor „demonstraţii geometrice").

Galilei a considerat apoi în ale sale *Discorsi* (Ziua întîi, traducere de *V. Oettinger*, în „Ostwalds Klassiker", nr. 11, pp. 30—31) asocierea biunivocă a numerelor pătrate cu rădăcinile lor, reprezentînd la rîndul lor toate numerele, astfel încît mulţimea tuturor numerelor trebuie „să corespundă" uneia din submulţimile ei stricte, anume mulţimii numerelor pătrate. Consideraţii analoge se găsesc adesea la *Leibniz*.

Cea mai amănunţită tratare a unor astfel de paradoxe ale infinitului, înainte de *Cantor*, a dat însă *Bolzano* într-o scriere a sa din 1851.

2. Din Paradoxele infinitului de B. Bolzano (Praga 1851)

§ 19

Înseşi exemplele de infinit considerate pînă acum ne-au putut permite să înţelegem că nu toate mulţimile infinite ar trebui tratate la fel din punctul de vedere al multiplicităţii lor şi că, dimpotrivă, unele din ele ar fi mai mari (sau mai mici) decît altele, adică una ar include în sine pe alta ca pe o parte (sau, dimpotrivă, ar fi ea însăşi o simplă parte a celeilalte). Chiar şi această afirmaţie sună ca un *paradox*. Şi, desigur, toţi care definesc infinitul ca ceva care nu mai este susceptibil de mărire trebuie să găsească ideea că un infinit ar fi mai mare decît alt infinit nu numai paradoxală, ci chiar contradictorie. Însă noi am arătat mai înainte că această opinie se sprijină pe un concept despre infinit care nu concordă de loc cu întrebuințarea lingvistică a cuvîntului. După explicația noastră, corespunzătoare nu numai întrebuințării lingvistice dar și scopului științei, nimeni nu poate găsi ceva contrariu, nici măcar surprinzător, în ideea că o mulțime infinită ar fi mai mare decît alta. Cine n-ar admite, de pildă, ca evident că lungimea dreptei care se prelungește nemărginit în direcția *aR* (fig. 56) este infinită? Sau că, din contră, dreapta *bR*, care se prelungește tot în aceeași direcție din punctul *b*, trebuie considerată mai mare cu porțiunea *ba* decît *aR*? Și că dreapta care se prelungește nemărginit în ambele părți, *aR* și *aS*, ar trebui considerată mai mare cu o mărime care este ea însăși infinită? ș.a.m.d.

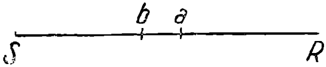


Fig. 56

§ 20

Să trecem acum la studierea unei particularități extrem de interesante care poate apărea în raportul a două mulțimi, dacă ambele sînt infinite, particularitate care de fapt apare totdeauna, dar pînă acum a fost trecută cu vederea în paguba cunoașterii anumitor adevăruri importante ale metafizicii, atît ca fizică dar și ca matematică, și pe care și acum, cînd o voi exprima, o vom găsi atît de paradoxală încît ar putea fi foarte necesar să zăbovim ceva mai mult la considerarea ei. Eu afirm că două mulțimi care sînt amîndouă infinite pot fi una față de alta într-un astfel de raport, încît pe de o parte este posibil ca orice lucru care aparține unei mulțimi să fie unit într-o pereche cu un lucru care aparține celeilalte, astfel încît să rezulte că nici un lucru din cele două mulțimi nu rămîne neîmperecheat și nici un lucru nu apare în două sau mai multe perechi; pe de altă parte este totuși posibil ca una din aceste mulțimi să cuprindă în sine pe cealaltă ca pe o simplă parte, așa încît multiplicitățile pe care ele le reprezintă, dacă noi considerăm toate lucrurile din ele ca egale, adică drept unități, să aibă între ele cele mai variate rapoarte.

Voi face demonstrația acestei afirmații cu ajutorul a două exemple în care are loc în mod indubitabil ceea ce am spus.

1. Să luăm două cantități (abstracte) oarecare, de exemplu 5 și 12: este evident că mulțimea cantităților care există între zero și 5 (sau care sînt mai mici ca 5), ca și mulțimea cantităților mai mici decît 12, este infinită ; și tot așa, desigur, se poate spune că ultima mulțime este mai mare ca prima, deoarece aceasta este, incontestabil, numai o parte din cealaltă. Orice alte cantități am pune în loc de 5 și 12, am fi nevoiți să apreciem că cele două mulțimi nu păstrează una față de alta totdeauna același raport, ci mai degrabă că între ele apar cele mai variate rapoarte. Însă nu este mai puțin adevărat următorul lucru : dacă x înseamnă o cantitate oarecare între zero și 5 și dacă determinăm raportul dintre x și y prin ecuația

$$5y = 12x,$$

atunci și y este o cantitate între zero și 12; și reciproc, ori de cîte ori y este între zero și 12, x se află între zero și 5. Din acea ecuație mai rezultă și faptul că la orice valoare a lui x corespunde numai o valoare a lui y și invers. Din aceste două lucruri rezultă clar că pentru fiecare cantitate x, situată în mulțimea cantităților dintre zero și 5, există o cantitate y în mulțimea cantităților situate între zero și 12, cele două cantități putîndu-se uni într-o pereche, rezultînd de aici că nici unul din lucrurile din care constau cele două mulțimi nu rămîne neîmperecheat și nici un lucru nu apare în două sau mai multe perechi.

2. Al doilea exemplu este luat de la un obiect din spațiu. Acela care știe că natura spațiului se bazează pe aceea a timpului, iar proprietățile timpului se bazează pe acelea ale numerelor și mărimilor abstracte, n-a avut, desigur, nevoie să vadă neapărat dintr-un exemplu că astfel de mulțimi infinite, așa cum tocmai am găsit în genere printre mărimi, ar exista chiar și în timp și în spațiu. Totuși, din cauză că trebuie să aplicăm corect principiul nostru, în cele ce urmează este nevoie să studiem în particular cel puțin un caz în care există astfel de mulțimi. Fie deci a, b, c trei puncte oarecare pe o dreaptă, și fie raportul distanțelor $ab:ac$ un raport oarecare, totuși astfel încît ac să fie mai mare. Atunci (fig. 57), deși mulțimile punctelor situate în ab și ac sînt ambele infinite, totuși mulțimea punctelor din ac va depăși mulțimea punctelor din ab, deoarece în ac pe lîngă toate

punctele lui *ab* se mai află și toate punctele din *bc* care nu se întîlnesc în *ab*. Dacă raportul distanțelor *ab* :*ac* este modificat arbitrar, sîntem nevoiți să apreciem că și raportul celor două mulțimi va fi foarte diferit. Cu toate acestea și la aceste două mulțimi este valabil ceea ce s-a demonstrat mai înainte despre cele două mulțimi de cantități situate între zero și 5 și între zero și 12, în privința perechilor care se pot forma din cîte un lucru dintr-o mulțime și cîte unul din cealaltă mulțime. Căci

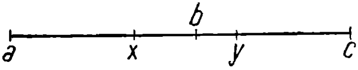


Fig. 57

fie x un punct oarecare în *ab* ; atunci, dacă luăm punctul y pe direcția *ax* astfel încît să existe relația

$$ab : ac = ax : ay,$$

va fi și y un punct pe *ac*. Și dacă, reciproc, y este un punct pe *ac*, dacă determinăm numai pe *ax* din *ay* prin aceeași ecuație, x va fi un punct al lui *ab*. Și orice alt x va determina un alt y și, reciproc, orice alt y va determina un alt x. Din aceste două adevăruri din nou se vede că se poate alege pentru fiecare punct al lui *ab* un punct al lui *ac* și pentru fiecare punct al lui *ac* un punct al lui *ab*, rezultînd că putem afirma despre perechile pe care le formăm din cîte două astfel de puncte că nici în mulțimea punctelor *ab*, nici în mulțimea punctelor *ac* nu există un singur punct care să nu apară într-una din aceste perechi și că nu există nici un singur punct care să apară tot în aceeași pereche de două sau mai multe ori.

§ 21

Așadar, numai pentru motivul că raportul între două mulțimi A și B este astfel încît fiecărei părți a situate în A, procedînd după o anumită regulă, îi putem alege și o parte b situată în B, rezultînd că toate perechile (a, b) pe care le formăm astfel conțin fiecare lucru situat în A sau B și pe fiecare îl conțin o singură dată, numai ținînd seamă de această împrejurare nu este permis să conchidem că cele două mulțimi, dacă sînt infinite, sînt egale cu privire la multiplicitatea părţilor lor (adică făcînd abstracţie de toate diversităţile lor); în ciuda acelui raport dintre ele, care este în sine negreşit acelaşi din ambele părţi, cele două mulţimi pot fi într-un raport de neegalitate privitor la multiplicităţile lor, astfel încît una din ele poate să reiasă ca întreg, cealaltă ca o parte. Este permis să se conchidă că aceste multiplicităţi sînt egale numai dacă se mai adaugă încă un motiv oarecare, ca, de pildă, faptul că ambele mulţimi sînt determinate pe aceeaşi bază, de exemplu prin acelaşi mod de generare.

3. Georg Cantor: Teoria mulţimilor

Ajungem acum la o serie de extrase amănunţite din scrierile clasice ale lui *Cantor* asupra teoriei mulţimilor, fundată de el.

Mai întîi o lucrare din 1874 care conţine două rezultate importante şi surprinzătoare pentru timpul cînd au fost descoperite: numărabilitatea mulţimii numerelor algebrice prin şirul obişnuit de numere şi nenumărabilitatea mulţimii tuturor numerelor reale prin acest şir.

G. Cantor, *Despre o proprietate a totalităţii numerelor algebrice reale* (1874)

§ 1

Dacă ne întoarcem la ecuaţia pe care o verifică un număr algebric ω şi care este complet determinată, suma valorilor absolute ale coeficienţilor săi, mărită cu numărul $n-1$, unde n indică gradul lui ω, este numită înălţimea numărului ω şi notată cu N. Folosind un mod de notare devenit obişnuit, avem

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|.$$

Înălţimea N este, prin urmare, pentru orice număr algebric real un număr întreg pozitiv determinat; reciproc, pentru fiecare valoare numerică întreagă pozitivă a lui N există numai un număr finit de numere reale algebrice cu înălţimea N; fie numărul acestora $\varphi(N)$; de pildă, $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Numerele totalităţii (ω), adică toate numerele reale algebrice, se pot deci ordona în felul următor: se ia ca prim număr ω_1 numărul cu înălţimea $N = 1$; după el să urmeze crescînd numerele reale algebrice $\varphi(2) = 2$ cu înălţimea $N = 2$ şi să le notăm

ω_2, ω_3; la acestea se pot adăuga în ordine crescătoare numerele $\varphi(3) = 4$ cu înălțimea $N = 3$; după ce toate numerele din (ω) pînă la o anumită înălțime $N = N_1$ sînt astfel numărate și aranjate într-un loc determinat, pot urma în general după ele numerele algebrice reale cu înălțimea $N = N_1 + 1$, și anume în ordine crescătoare; astfel se obține totalitatea (ω) a numerelor algebrice reale de forma

$$\omega_1, \quad \omega_2, \; \ldots, \; \omega_\nu \; , \ldots$$

și avînd în vedere această ordine putem vorbi despre al n-lea număr algebric real neomițîndu-se nici un singur număr din totalitatea (ω).

§ 2

Dacă există un șir infinit, dat printr-o lege oarecare, de cantități numerice reale diferite între ele

$$\omega_1, \quad \omega_2, \; \ldots . \; \omega_\nu, \; \ldots$$

în orice interval $(\alpha \ldots \beta)$ dat dinainte se poate determina un număr η (și, prin urmare, un număr infinit de astfel de numere), care nu apare în acest șir; aceasta trebuie acum demonstrat.

În acest scop pornim de la intervalul $(\alpha \ldots \beta)$ care ne este dat în prealabil arbitrar, și fie $\alpha < \beta$; primele două numere din șirul nostru, care sînt situate în interiorul acestui interval (exceptînd limitele), se pot nota cu α', β' și fie $\alpha' < \beta'$; de asemenea, să notăm în șirul nostru primele două numere situate în interiorul lui $(\alpha' \ldots \beta')$ cu α'', β'', și fie $\alpha'' < \beta''$; după aceeași lege să formăm intervalul următor $(\alpha''' \ldots \beta''')$ ş.a.m.d. Aici deci α', α'', ... sînt prin definiție anumite numere ale șirului nostru, ai căror indici se găsesc în continuă creștere, și același lucru este valabil despre numerele β', β'', ...; mai departe numerele α', α'', ... cresc continuu în mărime, numerele β', β'', ... descresc continuu în mărime; dintre intervalele $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ... fiecare include pe toate cele următoare. Aici se pot imagina acum două cazuri.

Sau că numărul intervalelor astfel formate este finit, ultimul din ele fie $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$; deoarece în interiorul intervalului se poate afla cel mult un număr din șirul nostru, atunci se poate admite un număr η în acest interval, număr neconținut în șir, și astfel propoziția este demonstrată pentru acest caz.

Sau că numărul intervalelor formate este infinit de mare; atunci numerele $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, deoarece ele cresc continuu în mărime, fără a creşte la infinit, au o limită determinată α^{∞}; acelaşi lucru este valabil pentru numerele $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ deoarece ele descresc continuu în mărime; fie β^{∞} limita lor; dacă $\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$ (un caz care intervine totdeauna la totalitatea (ω) a numerelor algebrice reale), uitîndu-ne numai la definiţia intervalelor, ne convingem uşor că numărul $\eta=\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$ nu poate fi conţinut în şirul nostru[1]; dacă însă $\alpha^{\infty}<\beta^{\infty}$, atunci orice număr η din interiorul intervalului $(\alpha^{\infty} \ldots \beta^{\infty})$ sau chiar de la marginile lui satisface condiţia cerută de a nu fi conţinut în şirul nostru.

Fragmentul următor dintr-un articol al lui *Cantor* din 1879 conţine prima introducere a unei numărări care ,,depăşeşte infinitul'', adică obiectiv vorbind, prima apariţie a numerelor ordinale transfinite la care Cantor n-a ajuns printr-o construcţie din fantezie pură, ci care i s-au impus cu ocazia unei probleme absolut concrete, problemă care priveşte ,,derivatele'' mulţimilor de puncte. Chiar aici s-ar putea face trimitere la un citat (dintr-un autor rămas necunoscut), pe care *Cantor* mai tîrziu, în anul 1895, l-a pus în fruntea marii sale lucrări *Fundamentarea teoriei mulţimilor transfinite: ,,Neque enim leges intelectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus''.*

Despre varietăţile liniare infinite de puncte (1879)

Nr. 1

... Diferite puncte de vedere şi principii de clasificare legate de ele ne conduc să împărţim mulţimile liniare de puncte în anumite grupe. Ca să începem cu unul din aceste puncte de vedere, să ne amintim de conceptul de derivată a unei mulţimi de puncte P dată ...

Derivata P' a unei mulţimi liniare de puncte P este varietatea tuturor acelor puncte care posedă proprietatea de punct-limită al lui P, fără să ne intereseze dacă punctul-limită este sau nu totodată un punct din P.

---

[1] Dacă numărul ar fi conţinut în şirul nostru, am avea $\eta = \omega_p$, unde p este un indice determinat; ceea ce nu este însă posibil, căci ω_p nu este situat în interiorul intervalului $(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)})$, în timp ce numărul η este situat prin definiţie în interiorul acestui interval.

Deoarece astfel derivata unei mulţimi de puncte P este iarăşi o anumită mulţime de puncte P', se poate căuta şi derivata acesteia, care se numeşte deci derivata a doua a lui P şi este notată cu P''; prin continuarea acestui procedeu se obţine derivata a n-a a lui P, care se notează cu $P^{(\nu)}$.

Aici se poate însă întîmpla ca procesul derivatelor P', P'', ... să ducă la o derivată $P^{(n)}$, provenind din puncte care în orice domeniu finit apar numai în număr finit, astfel încît $P^{(n)}$ nu are nici puncte-limită şi deci nici o derivată; în acest caz spunem despre mulţimea de puncte P că este de prima specie şi de al n-lea fel. Dacă însă şirul derivatelor lui P, şirul P', P'', P''' ... $P^{(\nu)}$ nu se termină, spunem că mulţimea de puncte P este de specia a doua ...

Nr. 2

Mulţimile de puncte de prima specie se pot caracteriza perfect prin conceptul de derivată; pentru mulţimile de specia a doua acesta nu este suficient, aici fiind necesar să extindem acest concept, ceea ce se obţine în mod firesc atunci cînd aprofundăm lucrurile.

Să observăm că în şirul derivatelor P', P'', P''', ... ale unei mulţimi P fiecare termen este un divizor al termenului precedent, fiecare nouă derivată $P^{(\nu)}$ provine din cea precedentă $P^{(\nu-1)}$ prin înlăturarea anumitor puncte, fără ca să se adauge noi puncte.

Dacă P este de specia a doua, P' se va compune din două mulţimi de puncte Q şi R esenţial diferite, astfel încît

$$P' \equiv (Q, R);$$

mulţimea Q constă din acele puncte ale lui P' care se pierd atunci cînd se parcurge suficient şirul P', P'', P''', ... cealaltă mulţime R cuprinde punctele care se păstrează în toţi termenii şirului P', P'', P''', ... deci R este definit prin formula

$$R \equiv D(P', P'', P''', \ldots).$$

Avem însă, evident, şi

$$R \equiv D(P'', P''', \ldots)$$

şi, în general,

$$R \equiv D(P^{(n_1)},\ P^{(n_2)},\ P^{(n_3)},\ \ldots),$$

unde $n_1, n_2, n_3, \ldots$ este un şir oarecare de numere pozitive, întregi, infinit crescătoare.

Mulţimea R de puncte care ia naştere din mulţimea P se exprimă prin semnul

$$P^{(\infty)}$$

şi se numeşte ,,derivata lui P de ordinul ∞''.

(În locul simbolului ∞ ambiguu, Cantor a folosit mai tîrziu simbolul ω.)

Prima derivată a lui $P^{(\infty)}$ să se noteze cu $P^{(\infty+1)}$, a n-a derivată a lui $P^{(\infty)}$ cu $P^{(\infty+n)}$. $P^{(\infty)}$ va avea şi o derivată de ordinul ∞, în general diferită de zero, pe care o numim $P^{(2\infty)}$. Prin continuarea acestor construcţii de concepte se ajunge la derivate care, în mod consecvent, se vor nota prin

$$P^{(n_0\infty+n_1)},$$

unde n_0, n_1 sînt numere întregi, pozitive. Noi le depăşim şi pe acestea, formînd

$$D(P^{(\infty)},\ P^{(2\infty)},\ P^{(3\infty)}, \ldots)$$

şi stabilind simbolul $P^{(\infty^2)}$.

De aici, prin repetarea aceleiaşi operaţii şi prin combinaţia cu cele obţinute mai înainte, rezultă conceptul mai general

$$P^{(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)}$$

şi prin continuarea acestui procedeu se ajunge la

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)},$$

unde $n_0, n_1 \ldots n_\nu$ sînt numere întregi pozitive. La alte concepte se ajunge făcînd variabil pe ν; să se pună

$$P(\infty^\infty) = D(P^{(\infty)},\ P^{(\infty^2)},\ P^{(\infty^3)},\ \ldots).$$

Mergînd mai departe în mod consecvent se obţin succesiv alte concepte :

$$P^{(\infty^{\infty}+1)},\ P^{(\infty^{\infty}+n)},\ P^{(\infty^{n\infty})},\ P^{(\infty^{\infty^{n}})},\ P^{(\infty^{\infty^{\infty}})} \text{ etc. ;}$$

aici vedem o producere dialectică de concepte, care duce totdeauna mai departe şi rămîne totuşi nearbitrară, necesară în sine şi consecventă.

Urmează definiţia dată de *Cantor* unei „mulţimi”.

Nr. 3

O varietate (o totalitate, o mulţime) de elemente, care aparţin unei sfere oarecare de concepte, o numesc bine definită, dacă pe baza definiţiei sale şi ca o consecinţă a principiului logic al terţului exclus, trebuie privită ca determinată intern nu numai dacă un obiect oarecare aparţinînd acestei sfere de concepte aparţine sau nu ca element acestei varietăţi, dar şi atunci cînd două obiecte care aparţin mulţimii sînt egale între ele sau nu în ciuda deosebirii formale în felul în care există ca date.

În general, deciziile corespunzătoare nu se pot efectua în realitate sigur şi exact cu metodele sau posibilităţile care ne stau la dispoziţie ; nu este însă vorba aici despre aceasta, ci numai despre determinaţia internă care în cazuri concrete, cînd o cer scopurile, trebuie transformată într-o determinaţie actuală (externă) prin perfecţionarea mijloacelor ajutătoare.

În cadrul marii serii de cercetări pe care *Cantor* le-a publicat din 1879 pînă în 1884 în „Analele matematice”, sub titlul colectiv *Despre varietăţile liniare infinite de puncte*, nr. 5 cu titlul *Fundamentele unei teorii generale a varietăţilor* formează miezul propriu-zis, care a apărut şi separat.

Din această operă principală din prima mare perioadă de creaţie a lui *Cantor* — după anticiparea teoriei numerelor reale — prezentăm introducerea numerelor transfinite. Apoi urmează şi precizarea dată de *Cantor* conceptului de infinit.

Mai întîi *Cantor* dă o introducere prealabilă la „Extinderea conceptului de număr întreg real dincolo de graniţele sale de pînă acum”.

Nr. 5

Fundamentele unei teorii generale a varietăților (1883)

§ 1

Expunerea de până acum a cercetărilor mele în teoria varietăților a ajuns într-un punct unde continuarea lor devine dependentă de o extindere a conceptului de număr întreg real dincolo de granițele sale de pînă acum, și anume această extindere are loc într-o direcție în care nu a fost căutată pînă înprezent — după știința mea — de nimeni.

Atît de mare este dependența în care mă văd pus de această extindere a conceptului de număr, încît fără extindere nu mi-ar fi posibil să fac nestînjenit nici cel mai mic pas mai departe în teoria mulțimilor; în această împrejurare s-ar putea să se găsească o justificare sau — dacă este necesar — o scuză pentru faptul că eu introduc în considerațiile mele idei aparent străine. Căci este vorba de o lărgire, respectiv continuare a șirului de numere întregi reale dincolo de infinit; oricît ar părea acest lucru de îndrăzneț, eu pot exprima totuși nu numai speranța, ci convingerea fermă că această lărgire va trebui să fie privită cu timpul ca ceva absolut simplu, adecvat, natural. În această privință nu consider nici un secret faptul că întreprinzînd acest lucru mă situez într-o anumită opoziție cu vederile larg răspîndite asupra infinitului matematic și cu părerile des reprezentate despre esența mărimii numerice.

În ce privește infinitul matematic, în măsura în care i s-a găsit pînă acum o întrebuințare justificată în știință și a contribuit la profitul acesteia, mie mi se pare că el apare mai întîi în semnificația unei cantități variabile, fie crescătoare peste orice limită, fie descrescătoare devenind oricît de mică, dar totdeauna rămînînd finită. Pe acest infinit îl numesc infinit impropriu.

Pe lîngă acestea însă, în epoca modernă și contemporană, atît în geometrie cît și în teoria funcțiilor mai ales, s-a elaborat alt gen de concepte despre infinitate tot așa de justificate, conform cărora, de pildă, a devenit necesar și în general obișnuit în cercetarea unei funcții analitice de o mărime variabilă complexă ca în planul care reprezintă variabila complexă să imaginăm un singur punct situat la infinit, adică infinit depărtat dar determinat și să examinăm comportarea funcției în apropierea acestui punct așa cum facem cu comportarea ei în apropierea oricărui alt punct; o dată cu aceasta se arată cum comportarea funcției în apropierea punctului infinit depărtat prezintă exact aceleași manifestări ca în oricare alt punct situat la distanța finită, astfel încît de aici se deduce o completă justificare de a gîndi infinitul în acest caz ca deplasat într-un punct cu totul determinat.

Dacă infinitul apare într-o astfel de formă determinată, eu îl numesc infinitul propriu-zis.

Pentru a înțelege cele ce urmează noi distingem cele două forme în care a apărut infinitul matematic, cele mai mari progrese fiind realizate în ambele forme în geometrie, în analiză și în fizica matematică.

În prima formă, ca infinit impropriu, el se prezintă ca un finit variabil; în cealaltă formă, în care îl numesc infinit propriu-zis, el apare ca un infinit absolut determinat. Numerele întregi reale infinite, pe care le voi defini în cele ce urmează și către care am fost condus încă de mulți ani, fără să am conștiința clară că în ele posedăm numere concrete de semnificație reală, nu au absolut nimic comun cu prima dintre cele două forme, cu infinitul impropriu; dimpotrivă, lor le este propriu același caracter de determinare pe care îl întîlnim la punctul infinit depărtat din teoria funcțiilor analitice; ele aparțin deci formelor și efectelor infinitului propriu-zis. — Însă în timp ce punctul de la infinitul planului numerelor complexe stă izolat față de toate punctele situate la distanță finită, noi obținem nu numai un singur număr infinit, ci un șir infinit de astfel de numere, deosebite între ele și care stau în relații conforme unor legi din teoria numerelor atît unele față de altele, cît și față de numerele finite, întregi ...

Cele două principii de generare cu ajutorul cărora, așa cum se va vedea, sînt definite noile numere determinat infinite, sînt de așa natură încît prin influența lor combinată poate fi străpunsă orice îngrădire în formarea conceptului de număr întreg real; din fericire lor li se opune însă, așa cum vom vedea, un al treilea principiu, pe care îl numesc principiul de inhibiție sau de îngrădire, prin care procesului de formare absolut nesfîrșit i se impun anumite îngrădiri succesive, așa încît noi obținem intervale (*Abschnitte*) naturale în șirul absolut infinit al numerelor întregi reale, intervale pe care eu le numesc clase de numere.

Prima clasă de numere (I) este mulţimea numerelor întregi finite 1, 2, 3, ... m, ... ; după ea urmează a doua clasă de numere (II), constînd din anumite numere întregi infinite care se succed într-o anumită ordine; numai după ce se defineşte a doua clasă de numere se ajunge la a treia, apoi la a patra etc.

Introducerea noilor numere întregi mi se pare a fi mai întîi de cea mai mare însemnătate pentru dezvoltarea şi precizarea conceptului de putere. Fiecărei mulţimi bine definite i se atribuie o anumită putere, iar la două mulţimi li se atribuie aceeaşi putere dacă ele se pot asocia biunivoc, element cu element.

La mulţimile finite puterea coincide cu numărul de elemente, deoarece astfel de mulţimi oricum ar fi ordonate au, după cum se ştie, acelaşi număr de elemente.

La mulţimile infinite, dimpotrivă, pînă acum n-a fost vorba, în genere, nici în lucrările mele nici în altă parte de un număr precis definit al elementelor lor; totuşi li se putea atribui şi lor o anumită putere, complet independentă de ordonarea lor.

Cea mai mică putere a mulţimilor infinite, după cum era uşor de justificat, trebuia să fie atribuită acelor mulţimi care se pot asocia biunivoc primei clase de numere şi de aceea să aibă aceeaşi putere cu ea. Dimpotrivă, pînă acum a lipsit o definiţie tot aşa de simplă, firească pentru puterile superioare.

Clasele noastre de numere menţionate mai sus, ale numerelor întregi reale determinat-infinite, se dovedesc acum reprezentanţi naturali, manifestîndu-se într-o formă unitară, ai puterilor mulţimilor bine definite, ordonate crescător în succesiune regulată. Eu arăt în modul cel mai precis că puterea celei de-a doua clase de numere (II) nu este numai diferită de puterea primei clase de numere, ci că ea este şi în realitate puterea imediat superioară; de aceea, putem s-o numim a doua putere sau puterea clasei a doua. La fel, a treia clasă de numere dă definiţia celei de-a treia puteri sau puterii clasei a treia etc.

Mai departe urmează observaţii istorice şi filozofice comparative pentru a caracteriza pe toate laturile noul concept de infinitate (infinitul actual gradat).

§ 4

....

Infinitul impropriu a fost numit adesea de către filozofii moderni infinitul „rău”, după părerea mea pe nedrept, căci în matematică şi în ştiinţele naturii el s-a dovedit un instrument foarte bun, extrem de folositor. Mărimile infinit mici, după cîte știu, au fost elaborate cu folos pînă acum în genere numai în forma infinitului impropriu și sînt susceptibile ca atare de toate acele variații, modificări și relații utilizate atît în analiza infinitezimală, cît și în teoria funcțiilor, căpătînd o expresie pentru a fundamenta tezaurul de adevăruri analitice din aceste discipline. Dimpotrivă, toate încercările de a constrînge acest infinit mic să devină un infinit propriu-zis ar trebui să fie abandonate pînă la sfîrșit ca lipsite de sens. Dacă pe de altă parte există, în genere, cantități infinit mici propriu-zise, adică definibile, ele nu se află, desigur, în directă legătură cu cantitățile obișnuite care devin infinit mici.

În opoziție cu încercările menționate asupra infinitului mic și cu confundarea ambelor forme de manifestare a infinitului, este mult răspîndită opinia despre esența și semnificația cantităților numerice, opinie conform căreia nu se concep ca existînd în realitate alte numere decît cele întregi reale finite din clasa noastră de numere (I).

În cel mai bun caz se acordă o anumită realitate numerelor raționale, provenind nemijlocit din ele. În ce privește pe cele iraționale, în matematica pură li se va atribui o semnificație pur formală, ele folosind oarecum numai ca semne de calcul pentru a fixa proprietățile grupelor numerelor întregi și a le descrie într-un mod simplu, unitar. Conform acestei opinii, materialul propriu-zis al analizei este format exclusiv din numere întregi, reale, finite, și toate adevărurile găsite în aritmetică și analiză sau care așteaptă încă să fie descoperite trebuie să fie înțelese ca relații reciproce între numere întregi finite; analiza infinitezimală și, o dată cu ea, teoria funcțiilor este considerată ca legalizată numai în măsura în care propozițiile ei se pot interpreta în mod demonstrativ ca legi care domină numerele finite întregi. Această concepție despre matematica pură, deși eu nu pot fi de acord cu ea, prezintă incontestabil anumite avantaje, pe care aş vrea să le pun în relief aici; totuși, pentru importanța sa pledează și împrejurarea că între reprezentanții ei se află o parte din matematicienii cei mai merituoși din prezent.

Dacă, așa cum se admite aici, numai numerele întregi finite sînt reale, iar celelalte nimic altceva decît forme de relații, atunci se poate pretinde ca demonstrațiile propozițiilor analitice să fie examinate în conținutul lor „aritmetic" și ca fiecare lacună care se manifestă în ele să fie umplută după principiile aritmeticii;

adevărata piatră de încercare pentru veracitatea și rigoarea perfectă a demonstrațiilor se vede în posibilitatea acestei completări. Nu trebuie să tăgăduim că pe această cale se perfecționează fundamentarea multor propoziții și se pot efectua și alte îmbunătățiri metodice în diferite părți ale analizei ; de asemenea, în aplicarea principiilor care decurg din acea intuiție se vede și o garanție contra oricărui fel de absurdități sau greșeli.

În acest mod se stabilește un anumit principiu recomandat tuturor ca fir conducător, chiar dacă este oarecum simplu și banal ; el trebuie să folosească pentru ca plăcerea înaripată de speculație și de concepție matematică să fie canalizată în adevăratele granițe, unde nu o pîndește pericolul de a ajunge în prăpastia „transcendentului", acolo unde, spre înfricoșare și groază salvatoare, se spune că „totul este posibil". O dată stabilite aceste lucruri, cine știe dacă nu tocmai punctul de vedere al finalității a fost singurul care a determinat pe autorii opiniei ca tuturor forțelor pline de năzuințe, care ajung așa de ușor în pericol prin aroganță și lipsă de moderație, să le fie recomandată finalitatea, ca un regulativ eficace de apărare contra greșelilor, deși în ea nu se poate găsi un principiu fecund ; căci ipoteza că ei înșiși în descoperirea noilor adevăruri ar fi plecat de la aceste principii este exclusă pentru mine, deoarece oricît de multe părți bune aș dobîndi din aceste maxime, luîndu-le riguros trebuie să le consider eronate ; acestora nu le datorăm nici un progres adevărat, și dacă s-ar fi întîmplat de fapt exact după ele, știința ar fi fost ținută pe loc sau totuși exilată în cele mai înguste granițe. Din fericire lucrurile nu stau așa de rău, și elogierea ca și aplicarea acelor reguli, folositoare în anumite condiții și ipoteze, nu au fost luate niciodată absolut textual ; de asemenea, este surprinzător că pînă acum a lipsit cineva care, după știința mea, să fi întreprins formularea lor mai complet și mai bine decît am încercat eu aici.

Dacă cercetăm istoria, vedem că opinii asemănătoare au fost reprezentate mai des și se întîlnesc chiar la Aristotel. Se știe că în tot evul mediu, la toți scolasticii întîlnim reprezentată propoziția irefutabilă provenită de la Aristotel „*infinitum actu non datur*". Însă dacă se consideră argumentele aduse de *Aristotel* împotriva existenței reale a infinitului (cf., de pildă, *Metafizica* sa, cartea a XI-a, cap. X), ele se pot reduce, în esență, la o ipoteză care implică o petitio principii, anume la ipoteza că există numai numere finite, ceea ce el a dedus din faptul că îi erau cunoscute numai numărări de mulţimi finite. Eu cred însă că am dovedit mai sus, şi voi arăta aceasta şi mai clar în cele ce urmează în lucrarea mea, că se pot admite numărări tot aşa de determinate nu numai la mulţimile finite, dar şi la cele infinite, presupunînd că se dă mulţimilor o anumită lege, după care ele devin mulţimi bine ordonate. Că fără o atare succesiune regulată a elementelor unei mulţimi nu se poate întreprinde în ea nici o numărare — acest lucru rezidă în natura conceptului de numărare; la mulţimile finite înseşi se poate efectua o numărare numai în cazul unei succesiuni determinate de elemente numărate, dar aici se arată, ca o proprietate particulară a mulţimilor finite, că rezultatul numărării — numărul — este independent de ordinea respectivă; în timp ce la mulţimile infinite, aşa cum am văzut, nu are loc o asemenea independenţă în general, ci numărul unei mulţimi infinite este un număr întreg infinit, determinat odată cu şi prin legea numărării; aici rezidă, şi numai aici, deosebirea esenţială bazată pe natura însăşi, şi de aceea niciodată anulabilă, dintre finit şi infinit; niciodată însă din cauza acestei distincţii nu este tăgăduită existenţa infinitului; dimpotrivă, aceea a finitului va putea fi menţinută; dacă lăsăm pe una să cadă trebuie să lichidăm şi pe cealaltă; unde am ajunge atunci pe acest drum?

Un alt argument folosit de *Aristotel* contra realităţii infinitului constă în afirmaţia că finitul ar fi suprimat şi distrus de infinit, dacă acesta ar exista, deoarece numărul finit se pretinde că este nimicit de un număr infinit; în realitate, aşa cum se va arăta clar mai departe, lucrurile se petrec astfel încît la un număr infinit, dacă este gîndit ca ceva determinat şi sfîrşit, se poate adăuga foarte bine unul finit şi poate fi reunit cu el fără ca astfel să se efectueze o suprimare a acestuia din urmă (mai degrabă numărul infinit suferă modificări prin adăugarea unui număr finit la el); numai procesul invers, adăugarea unui număr infinit la unul finit, dacă punem întîi pe cel finit, are ca efect suprimarea celui finit, fără ca să intervină o modificare a celui infinit. Această stare de lucruri adevărată privitoare la finit şi infinit, pe care *Aristotel* a ignorat-o complet, se cădea să ducă la noi imbolduri nu numai în analiză, ci şi în alte ştiinţe, îndeosebi în ştiinţele naturii.

La ideea de a considera infinitul mare nu numai în forma a ceea ce creşte nemărginit şi în forma strîns legată de aceasta a seriilor infinite convergente introduse mai întîi în secolul al XVII-lea, ci și la ideea de a-l fixa matematic prin numere în forma determinată a infinitului-sfîrșit, eu am ajuns aproape împotriva voinței mele, din cauza contradicției cu tradițiile devenite valoroase pentru mine, fiind constrîns logic în decursul străduințelor și încercărilor științifice care au durat mulți ani. De aceea, nici nu cred că ar putea să mi se opună argumente valabile pe care eu să nu știu să le preîntîmpin.

Observația lui *Cantor* la § 4.

.... Concepția lui *Platon* despre infinit este cu totul alta decît aceea a lui *Aristotel*. De asemenea, găsesc pentru concepțiile mele puncte de contact în filozofia lui *Nicolaus Cusanus*. Același lucru îl observ în raport cu *Giordano Bruno*, succesorul lui *Cusanus*.

O deosebire esențială constă însă în faptul că eu fixez de la început, ca noțiuni, diferitele trepte ale infinitului propriu-zis prin clasele de numere (I), (II), (III) etc., și apoi consider ca o problemă de rezolvat nu numai cercetarea din punct de vedere matematic a relațiilor numerelor transfinite, dar și constatarea și urmărirea lor peste tot unde apar în natură. Nu este nici o îndoială pentru mine că pe acest drum vom ajunge totdeauna mai departe, dar niciodată nu vom atinge o limită nedepășibilă și nici nu vom obține o înțelegere măcar aproximativă a absolutului. Absolutul poate fi numai recunoscut, dar niciodată cunoscut, nici măcar aproximativ. Căci așa cum înăuntrul primei clase numerice (I) pentru orice număr finit oricît de mare avem totdeauna aceeași putere a numerelor finite mai mari decît el, tot astfel după fiecare număr transfinit, oricît de mare, al oricăreia din clasele superioare (II) sau (III) etc. urmează o totalitate de numere și de clase de numere, care n-a pierdut cîtuși de puțin în putere față de întregul totalității numerice absolut infinite care începe de la 1. Prin aceasta se întîmplă la fel cu ceea ce spune *Albrecht von Haller* despre eternitate : ,,Eu îl scad (numărul uriaș) și Tu (eternitate) ești chiar în fața mea''. De aceea, șirul de numere absolut infinit îmi apare într-un anumit sens ca un simbol adecvat al absolutului ; dimpotrivă, infinitatea primei clase de numere (I), care pînă acum mi-a fost de folos numai pentru că am luat-o drept o idee (nu reprezentare) inteligibilă, apare ca un nimic cu totul evanescent în comparație cu acel şir. Demn de observat îmi apare şi faptul că fiecare clasă de numere, deci şi fiecare putere, este asociată unui număr cu totul determinat al totalităţii numerelor absolut infinite, şi anume astfel încît la fiecare număr γ transfinit există o putere numită puterea de rangul γ; aşadar, şi diferitele puteri formează un şir absolut infinit. Acest lucru este cu atît mai curios, cu cît numărul γ, care indică ordinea unei puteri (în caz că numărul γ are un număr imediat anterior), se află, faţă de numerele clasei de numere cu această putere, într-un raport de mărime a cărui micime desfide orice descriere, şi aceasta cu atît mai mult cu cît γ este considerat mai mare.

§ 5

Cînd vorbeam adineauri despre tradiţii, eu le înţelegeam nu numai în sensul mai îngust a ceva trăit, ci le raportam la fundamentarea filozofiei şi ştiinţelor naturii moderne. Pentru aprecierea problemei despre care este aici vorba, indic numai cîteva din izvoarele cele mai importante. Să se compare:

Locke, Essay on Human Understanding, lib. II, cap. XVI, XVII;

Descartes, Scrisori şi explicaţii la meditaţiile sale; *Principia* I, 26;

Spinoza, Scrisoarea XXIX, cogitata metaph., pars I et II;

Leibniz, ed. Erdmann, pp. 138, 244, 436, 744; ed. Pertz, II, 1, p. 209; III, 4, p. 218; III, 5, pp. 307, 322, 389; III, 7 p. 273[1].

Argumente mai puternice decît cele întîlnite aici contra introducerii numerelor întregi infinite nu se prea pot născoci nici în ziua de azi; de aceea, să fie examinate şi comparate cu ale mele pentru aceste numere. Îmi rezerv dreptul pentru altă ocazie să discut amănunţit şi profund aceste pasaje, şi anume scrisoarea cu un conţinut extrem de important a lui *Spinoza* către *L. Meyer*; aici mă mărginesc însă la următoarele:

Oricît de diferite ar fi doctrinele acestor scriitori, în aprecierea finitului şi infinitului din acele pasaje ei sînt în esenţă de acord că la conceptul de număr finitatea sa este parte componentă şi că, pe de altă parte, adevăratul infinit sau absolutul, care se găsește în Dumnezeu, nu permite nici un fel de determinații. În ce privește ultimul punct, eu sînt complet de acord cu el — n-ar putea să fie altfel — căci propoziția : „*omnis determinatio est negatio*" este pentru mine în afară de orice îndoială ; dimpotrivă, în ce privește primul punct, așa cum am mai spus înainte la discutarea argumentelor lui *Aristotel* contra lui „*infinitum actu*", eu văd în el o *petitio principii*, ceea ce explică unele contradicții care se găsesc la toți acești autori, și anume și la *Spinoza* și *Leibniz*. Ipoteza că în afara absolutului, care nu poate fi atins prin nici o determinație, și în afară de finitate, n-ar trebui să existe modificații, care deși nu sînt finite, totuși se pot determina prin numere și, în consecință, sînt ceea ce eu numesc infinitul propriu-zis — această ipoteză nu o găsesc prin nimic justificată și, după părerea mea, ea este în contradicție cu anumite propoziții stabilite de ultimii doi filozofi. Ceea ce eu afirm și cred că am demonstrat prin această lucrare, ca și prin încercările mele mai vechi, este faptul că după finit există un transfinit (pe care l-am putea numi chiar și suprafinit), adică o scară nemărginită gradată a anumitor moduri care prin natura lor nu sînt finite, ci infinite, putînd fi determinate însă, ca și finitul, prin anumite numere, bine definite și distincte unele de altele. De aceea, după convingerea mea, o dată cu cantitățile finite nu s-a închis domeniul cantităților definibile, și granițele cunoașterii noastre se pot extinde respectiv mai departe fără ca să fie necesar pentru aceasta să impunem vreo constrîngere naturii noastre. De aceea, în locul propoziției aristotelico-scolastice discutate în § 4 pun altă propoziție :

---

[1] Demn de notat este şi Hobbes, *De corpore*, cap. VII, 11; Berkeley, *Treatise on the Principles of Human Knowledge*, 128—131.

Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.

Foarte adesea se invocă finitatea intelectului uman ca temei al faptului că putem gîndi numai numere finite ; totuși, în această afirmație eu văd iarăși cercul vicios de care am vorbit. În mod tacit se subînțelege prin „finitatea intelectului" faptul că toată capacitatea sa referitoare la formarea numerelor este mărginită la numere finite. Dacă însă se arată că intelectul poate defini și distinge unele de altele și numerele infinite într-un anumit sens, adică cele transfinite, atunci sau trebuie să se dea cuvintelor „intelect finit" o semnificație lărgită, conform căreia acea concluzie nu mai poate fi trasă din ele ; sau trebuie să atribuim și intelectului uman predicatul „infinit" în anumite privințe, ceea ce după părerea mea este singurul lucru corect. Cuvintele „intelect finit", pe care le auzim așa de mult, nu se potrivesc, după cum cred eu, de loc: oricît ar fi de mărginită natura umană într-adevăr, îi este inerent așa de mult din infinit, și eu cred chiar că dacă ea însăși nu ar fi infinită în multe privințe, nu s-ar putea explica încrederea și siguranța fermă privitoare la existența absolutului, cu care sîntem toți de acord. Și îndeosebi eu reprezint opinia că intelectul uman are o predispoziție nemărginită pentru formarea etajată de clase întregi de numere care se află față de modurile infinite într-o anumită relație și ale căror puteri sînt de o tărie crescătoare.

Dificultățile principale în sistemele, desigur diferite în exterior dar absolut înrudite în interior, ale ultimilor doi gînditori se pot, cred eu, aduce mai aproape de soluție pe drumul deschis de mine și chiar unele din ele se pot rezolva și explica satisfăcător chiar acum. Aceste dificultăți au dat imbold criticismului ulterior, care cu toate avantajele sale nu pare să-mi garanteze un substitut satisfăcător pentru dezvoltarea moderată a doctrinelor lui *Spinoza* și *Leibniz*. Căci alături de explicația mecanică a naturii sau în locul ei, explicație care are la dispoziție în cadrul sferei toate mijloacele și avantajele analizei matematice, dar ale cărei unilateralitate și insuficiență au fost dezvăluite așa de nimerit de către *Kant*, o explicație organică a naturii înarmată cu aceeași rigurozitate matematică, depășind pe cea mecanică, nici măcar n-a început încă; eu cred că ea poate fi inițiată numai prin reluarea și continuarea lucrărilor și eforturilor acelora.

Un punct deosebit de dificil în sistemul lui *Spinoza* îl constituie raportul dintre modurile finite și modurile infinite; acolo rămîne nelămurit cum și în ce împrejurări și-ar putea afirma independența finitul față de infinit sau infinitul față de un infinit mai puternic. Exemplul atins deja în § 4 mi se pare că indică, în simbolica sa simplă, drumul pe care ne putem apropia poate mai mult de rezolvarea acestei probleme. Dacă ω este primul număr al clasei a doua de numere, atunci avem $1 + \omega = \omega$, dimpotrivă $\omega + 1 = (\omega + 1)$, în care $(\omega + 1)$ este un număr absolut diferit de ω. Așa cum se vede clar aici, totul depinde, așadar, de poziția finitului față de infinit; dacă apare finitul, el se revarsă în infinit și dispare în el; dacă însă se resemnează și își ia locul său în spatele infinitului, el se conservă și se unește cu infinitul devenind un infinit nou, fiindcă este modificat.

§ 7

Deşi în § 5 am citat multe pasaje din operele lui *Leibniz*, în care el se exprimă împotriva numerelor infinite, spunînd acolo printre altele : *„Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des touts véritables"*. *„L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu ; au contraire, dès qu'on modifie on se borne ou forme un fini"* (în ultimul pasaj, în legătură cu prima afirmaţie, eu sînt de acord cu el, în ce priveşte a doua afirmaţie însă, nu), pe de altă parte sînt în fericita situaţie de a putea indica afirmaţii ale aceluiaşi gînditor, în care el, oarecum în contradicţie cu sine însuşi, se pronunţă pentru infinitul propriu-zis (diferit de absolut) în modul cel mai neîndoielnic. El spune astfel (*Opera philos.*, ed. Erdmann, p. 118) :

> *„Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu' elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée ; et par conséquent la moindre particelle doit être considerée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes"*.

Totuşi infinitul propriu-zis, aşa cum îl întîlnim în mod exemplar în mulţimile bine definite sau în constituţia corpurilor formate din atomi punctuali (aici nu mă refer la atomii — democritici — de natură fizico-chimică, deoarece eu nu-i pot considera existenţi nici conceptual nici în realitate, oricîte foloase ar aduce această ficţiune pînă la o anumită limită), a găsit cel mai hotărît apărător într-un matematician şi filozof extrem de subtil din secolul nostru, în *Bernhard Bolzano*, care a dezvoltat opiniile sale respective mai ales în scrierea frumoasă şi bogată în conţinut, *Paradoxele infinitului* (Leipzig, 1851), scriere al cărei scop este de a arăta cum contradicţiile căutate în infinitate de scepticii şi peripateticii tuturor timpurilor nu există de loc dacă ne dăm numai osteneala, desigur nu totdeauna uşoară, de a înţelege în sine conceptele infinităţii cu toată seriozitatea potrivit conţinutului lor adevărat. În această scriere se găseşte de aceea şi o discuţie adecvată în multe privinţe asupra infinitului impropriu matematic, aşa cum el apare în forma diferenţialelor de primul ordin sau de ordin superior, sau în sumele de serii infinite sau în alte procese de trecere la limită. Acest infinit (numit de unii scolastici „infinitul sincategorematic"[1]) este un simplu concept auxiliar şi de relaţie al gîndirii noastre, care potrivit definiţiei sale include variaţia şi despre care, în consecinţă, niciodată nu se poate exprima „*datur*" într-un sens propriu.

Este foarte interesant că privitor la acest gen de infinit nici un fel de diferenţe esenţiale de opinii nu predomină nici printre filozofii prezentului, dacă mi se îngăduie să fac abstracţie de faptul că anumite şcoli moderne de aşa-numiţi pozitivişti sau realişti sau materialişti au convingerea că văd supremul concept în acest infinit sincategorematic, despre care ei înșiși trebuie să admită că nu are nici o existență propriu-zisă.

---

[1] Sincategorematic = care nu poate fi afirmat decît cu un alt lucru. Ca termen scolastic, raportat la infinit: acela care conţine elemente reale, actuale şi a căror multiplicitate este inepuizabilă, dar care nu constituie un tot prin adunare. În acest sens termenul este folosit şi de Leibniz, *Nouveaux Essais*, cartea a II-a cap. XVII, exact în continuarea pasajului citat mai sus de O. Becker: „Il est vrai qu'il y a une infinité de choses, c'est-à-dire qu'il y eu a toujours plus qu'on n'en puisse assigner. Mais il n'y a point de nombre infini de lignes ou autre quantité infinie, si on les prend pour de véritables touts, comme il est aisé de le démontrer. Les Ecoles ont voulu dire cela an admettant un infini syncatégorématique, comme elles parlent, et non pas l'infini catégorématique".

Deşi uneori s-a confundat infinitul sincategorematic cu infinitul potenţial şi infinitul categorematic cu cel actual (cf., de pildă, Goclenius, *Lex. phil.*, V°, *Infinitum*, 237: „Infinitum syncategorematice: potentia, mentali abstractione... Categorematice: actu"), distincţia scolastică între cele două infinite este riguros desfăşurată, între alţii, de Eustache de Saint-Paul, *Summa philosophiae*, partea a III-a, tr. III, 1611: „Celebris autem est infiniti partitio, in infinitum actu et infinitum potestate. Illud dicitur cujus partes omnes sunt actu, sive sint omnes actu separatae sive non, quod dicitur infinitum actu categorematicum, et infinitum actu syncategorematicum". Infinitul actual syncategorematic este diferit de infinitul potenţial, care se prezintă sub trei forme: infinit de succesiune, de adunare şi de scădere: „*succesione* sit esset tempus aut motus infinitae durationis; *additione* quo modo numerus dicitur potentia infinitus quia nullus cogitari potest, quo additis novis unitatibus, non possit major dari; denique detractione, quomodo quantitas continua potestate infinita est, quia nulla est tam exigua, quin detracta aliqua parte possit fieri semper exilior" *(ibidem)*. În continuare, Eustache de Saint-Paul, menţionează că infinitul sincategorematic nu este propriu-zis un infinit în act şi că unii îl numesc chiar infinit potenţial: „Ego vero existimarem istud posse dici infinitum partim actu partim potentia: actu quidem, quatenus suas omnes partes actu continet; potentia vero, quatenus partes illae non sunt actu separatae" *(ibidem)*. A se consulta şi Ernest A. Moody, *Truth and Consequence in Mediaeval Logic*, Introduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1953, p. 4 şi urm. — *C. V.*

Totuși chiar la *Leibniz* se găsește indicată, în esență, în mai multe pasaje adevărata situație; căci următorul pasaj din *Opera philos.* (ed. Erdmann, p. 436), de exemplu, se referă la acest infinit impropriu.

„Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse".

Bolzano este poate singurul la care numerele infinite ajung să aibă o oarecare legitimitate, cel puțin este vorba de mai multe ori despre ele; totuși, tocmai în felul cum le mînuiește, fără să poată prezenta o definiție justă despre ele, eu nu sînt de loc de acord cu el și consider, de pildă §§ 29—33 ale acelei cărți ca eronate și fără bază. Pentru înțelegerea reală a conceptului de numere determinat-infinite, autorului îi lipsește atît conceptul general de putere, cît și conceptul precis de număr. Ambele concepte apar la el în germen în pasaje izolate în formă de particularități; el, însă, ni se pare că nu le elaborează pînă la claritate și determinație completă și de aici se explică multe inconsecvențe și chiar unele erori ale acestei scrieri foarte valoroase.

Fără cele două concepte menționate nu se ajunge mai departe, după convingerea mea, în teoria varietăților și același lucru este, cred, valabil despre domeniile care intră în teoria varietăților sau au cel mai strîns contact cu ea, ca, de pildă, teoria modernă a funcțiilor de o parte, și logica și teoria cunoașterii de altă parte. Dacă eu concep infinitul astfel, așa cum am făcut aici precum și în încercările mele mai vechi, atunci de aici decurge pentru mine o adevărată plăcere, căreia mă dedic plin de mulțumire, văzînd cum întregul concept de număr, care în infinit are numai fundalul de număr, se despică oarecum în două concepte atunci cînd ne ridicăm spre infinit, anume în conceptul de putere, independentă de ordinea în care o mulțime este dată, și în conceptul de număr care este legat în chip necesar de o ordine conformă unei legi a mulțimii, ordine datorită căreia această mulțime devine bine ordonată. Și dacă iarăși cobor de la infinit la finit, atunci văd tot așa de clar și bine cum cele două concepte devin unul și se revarsă împreună în conceptul de număr întreg finit.

§ 8

Putem vorbi în două sensuri despre realitatea sau existența numerelor întregi, a celor finite ca și a celor infinite; mai exact, sînt însă aceleași două puncte de vedere din care poate fi considerată în general realitatea unor concepte și idei oarecare. Mai întîi putem privi numerele întregi ca reale în măsura în care ele ocupă în intelectul nostru un loc precis determinat pe baza definițiilor, deosebindu-se cel mai bine de toate celelalte componente ale gîndirii noastre, aflîndu-se în anumite relații față de ele și modificînd deci substanța spiritului nostru într-un anumit mod; să-mi fie îngăduit să numesc acel fel de realitate a numerelor noastre realitatea lor intrasubiectivă sau imanentă. Apoi se poate însă atribui și numerelor realitate în măsura în care ele trebuie să fie considerate ca expresie sau imagine a proceselor și relațiilor din lumea exterioară opusă intelectului și, mai departe, în măsura în care diferitele clase de numere (I), (II), (III) etc. sînt reprezentanți ai puterilor, care apar de fapt în natura materială și spirituală. Acest al doilea fel de realitate eu îl numesc realitatea transsubiectivă sau chiar transientă a numerelor întregi.

Baza considerațiilor mele fiind absolut realistă, dar totodată nu mai puțin idealistă, nu am nici o îndoială că ambele feluri de realități se găsesc totdeauna împreună, în sensul că un concept care trebuie considerat ca existent în prima privință posedă totdeauna o realitate transientă în anumite privințe, ba chiar într-o infinitate de privințe, realitate a cărei stabilire aparține, desigur, celor mai penibile și mai dificile probleme de metafizică și adesea trebuie lăsată epocilor în care evoluția naturală a uneia din celelalte științe dezvăluie semnificația transientă a conceptului în discuție.

Conexiunea celor două realități se bazează pe unitatea totului căruia îi aparținem noi înșine.

Invocarea acestei conexiuni are aici scopul de a deduce din ea o consecinţă care mi se pare foarte importantă pentru matematică, anume că matematica în alcătuirea materialului său de idei trebuie să ţină seama exclusiv numai de realitatea imanentă a conceptelor sale şi de aceea nu are nici o obligaţie de a le examina şi în privinţa realităţii lor transiente. Din cauză că matematica are o poziţie aparte, prin care se deosebeşte de toate celelalte ştiinţe şi care explică felul relativ uşor şi degajat caracteristic îndeletnicirii cu ea, această ştiinţă merită pe deplin numele de matematică liberă, o denumire căreia, dacă aş avea de ales, i-aş da preferinţă faţă de aceea, devenită uzuală, de matematică „pură".

Matematica este complet liberă în dezvoltarea sa şi legată numai de grija — de la sine înţeleasă — ca toate conceptele ei să fie pe de o parte necontradictorii în sine, iar pe de altă parte să se afle în relaţii ferme, ordonate prin definiţii faţă de conceptele formate mai înainte, deja existente şi verificate. Îndeosebi la introducerea noilor numere ea are datoria de a a da despre ele definiţii prin care să li se acorde o atare determinaţie, şi, cînd este cazul, o atare relaţie faţă de numerele mai vechi încît ele sà se poată deosebi precis între ele în anumite cazuri. Îndată ce un număr satisface toate aceste condiţii, el poate şi trebuie să fie considerat în matematică ca existent şi real. În aceasta văd eu motivul arătat în § 4 pentru care numerele raţionale, iraţionale şi complexe trebuie privite tot aşa de existente ca şi numerele întregi pozitive finite.

Eu cred că nu este nevoie să ne temem că aceste principii prezintă vreun pericol pentru ştiinţă, cum se întîmplă cu multe: pe de o parte condiţiile arătate, singurele sub care se poate exercita libertatea de a forma numere, sînt de aşa natură încît nu permit arbitrarului să joace decît un rol extrem de neînsemnat; apoi fiecare concept matematic implică în sine corectivul necesar; dacă un concept nu este fecund sau util, acest lucru se manifestă prin faptul că nu este utilizabil şi apoi el va fi părăsit din cauza lipsei de succes. Dimpotrivă, orice îngustare superfluă a impulsului de cercetare matematică mi se pare că aduce cu sine un pericol mult mai mare, şi cu atît mai mare cu cît pentru aceasta din esenţa ştiinţei nu se poate aduce în realitate nici un fel de justificare; căci esenţa matematicii rezidă tocmai în libertatea ei.

Dacă această caracteristică a matematicii n-ar rezulta pentru mine din motivele menţionate, atunci întreaga evoluţie a ştiinţei însăşi, aşa cum se observă în secolul nostru, ar trebui totuşi să mă ducă la exact aceleaşi păreri.

Dacă *Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite* şi *Riemann* ar fi fost obligaţi să supună totdeauna ideile lor noi unui control metafizic, nu ne-am fi bucurat de monumentalul edificiu al teoriei moderne a funcţiilor, edificiu care, deşi s-a proiectat şi ridicat complet liber şi fără scopuri transiente, totuşi îşi dezvăluie chiar acum semnificaţia sa transientă în aplicaţii la mecanică, astronomie şi fizică matematică, aşa cum era de aşteptat ; noi n-am fi văzut marele avînt din teoria ecuaţiilor diferenţiale datorită lui *Fuchs*, *Poincaré* şi mulţi alţii, dacă aceste forţe excepţionale ar fi fost frînate şi îngrădite prin influenţe străine; şi dacă *E.E.Kummer* nu şi-ar fi asumat libertatea plină de consecinţe de a introduce în teoria numerelor aşa-numitele numere ,,ideale'', n-am fi azi în situaţia de a admira lucrările algebrice şi aritmetice excelente, aşa de importante, ale lui *Kronecker* şi *Dedekind*.

Dacă matematica este atît de îndreptăţită de a se mişca liberă de toate lanţurile metafizice, eu nu pot totuşi — pe de altă parte — să recunosc acelaşi drept matematicii ,,aplicate'', ca de pildă, mecanicii analitice şi fizicii matematice; aceste discipline sînt, după părerea mea, metafizice atît în fundamentele lor, cît şi în scopurile lor; dacă încearcă să se elibereze de aceasta, aşa cum a propus de curînd un celebru fizician, ele degenerează într-o ,,descriere a naturii'', căreia trebuie să-i lipsească respiraţia proaspătă a gîndirii matematice libere, precum şi forţa explicaţiei şi aprofundării fenomenelor naturii.

Acum *Cantor* ajunge în sfîrşit la miezul întregii lucrări, introducerea propriu-zisă a numerelor ordinale şi a claselor de numere transfinite.

§ 11

Vom arăta acum cum se ajunge la definiţiile noilor numere şi în ce mod rezultă intervalele (Abschnitte) naturale din şirul absolut infinit al numerelor întregi reale, pe care eu le numesc clase de numere. La această explicaţie aş adăuga apoi numai propoziţiile supreme despre a doua clasă de numere şi despre raportul dintre ea și prima clasă. Șirul (I) al numerelor întregi reale pozitive 1, 2, 3, ..., ν, ... ia naștere prin punerea și reunirea repetată a unităților fundamentale, considerate egale; numărul ν este expresia atît pentru un anumit număr finit de astfel de puneri succesive, cît și pentru reunirea într-un întreg a unităților puse. Deci, formarea numerelor reale întregi finite se bazează pe principiul adăugirii unei unități la un număr existent deja format; acest moment, care, așa cum vom vedea imediat, joacă un rol esențial și la producerea numerelor întregi superioare, îl numesc primul principiu de producere. Numărul numerelor ν din clasa (I) care se formează astfel este infinit și între ele nici unul nu este cel mai mare. De aceea oricît ar fi de contradictoriu să vorbim despre cel mai mare număr al clasei (I), nu este, pe de altă parte, nimic scandalos în a ne imagina un nou număr, pe care l-am numi[1] ω, care ar trebui să fie expresia faptului că întreaga totalitate (I) este dată conform regulii în succesiunea sa naturală. (Tot așa cum ν este o expresie pentru faptul că un anumit număr finit de unități este reunit într-un întreg.) Este permis chiar ca să ne imaginăm noul număr creat ω ca o limită către care tind numerele ν, dacă prin acest lucru nu se înțelege altceva decît că ω trebuie să fie primul număr întreg care urmează după toate numerele ν, adică trebuie să fie numit mai mare decît oricare dintre numerele ν. Lăsînd să urmeze după punerea numărului ω alte puneri de unități, cu ajutorul primului principiu de producere se obțin numerele următoare:

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots,\ \omega + \nu,\ \ldots;$$

deoarece astfel tot nu se ajunge la cel mai mare număr, ne imaginăm un nou număr, care poate fi numit 2ω și care va trebui să fie primul număr urmînd după toate numerele de pînă acum ν și $\omega + \nu$; dacă se aplică numărului 2ω primul principiu de producere, se ajunge la continuarea numerelor de pînă acum

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \ldots,\ 2\omega + \nu,\ \ldots$$

---

[1] Semnul ∞, pe care l-am folosit în nr. 2 al acestui articol, îl înlocuiesc de acum încolo cu ω, deoarece semnul ∞ este deja mult întrebuințat pentru notarea infinităților nedeterminate (adică potențiale).

Funcția logică care ne-a furnizat cele două numere ω și 2ω este, evident, diferită de primul principiu de producere; eu o numesc al doilea principiu de producere a numerelor reale întregi și îl definesc mai precis prin aceea că dacă există o succesiune oarecare determinată de numere reale întregi definite, dintre care nici unul nu este cel mai mare, atunci pe baza celui de-al doilea principiu de producere se creează un nou număr care este gîndit ca limită a acelor numere, adică este definit ca cel mai mare număr imediat după toate aceste numere.

Prin aplicarea combinată a ambelor principii de producere se obțin, de aceea, succesiv următoarele continuări ale numerelor deja căpătate:

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots,\ 3\omega+\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \ldots,\ \mu\omega+\nu,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Totuși, nici prin aceasta nu se obține vreo încheiere, căci nici unul dintre numerele $\mu\omega+\nu$ nu este cel mai mare.

De aceea, al doilea principiu de producere ne determină să introducem un număr care să urmeze imediat după toate numerele $\mu\omega+\nu$, care poate fi numit ω^2; la acest număr se adaugă într-o succesiune anumită numerele

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu,$$

și atunci, evident, se ajunge, urmînd ambele principii de producere, la numere de forma următoare:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu;$$

totuși, al doilea principiu de producere ne determină atunci să punem apoi un număr nou, care trebuie să fie cel mai mare număr imediat după acestea și pe care îl notăm convenabil cu

$$\omega^\omega.$$

Formarea de noi numere nu are, după cum se vede, nici un sfîrșit; urmînd ambele principii de producere se obțin totdeauna iarăși noi numere și șiruri de numere care au o succesiune complet determinată.

De aceea, s-ar părea mai întîi ca și cum, prin acest mod de formare a unor noi numere întregi determinat-infinite, noi ar trebui să ne pierdem în nemărginit, nefiind în stare să dăm acestui proces fără sfîrşit o anumită încheiere provizorie pentru a dobîndi o îngrădire asemenea acesteia care într-un anumit sens exista de fapt în privinţa clasei mai vechi de numere (I); acolo s-a făcut uz numai de primul principiu de producere şi, în consecinţă, o ieşire din şirul (I) a devenit imposibilă. Al doilea principiu de producere, însă, nu numai că a trebuit să ducă dincolo de domeniul de numere existent, ci s-a dovedit negreşit ca un mijloc care în unire cu primul principiu de producere dă capacitatea de a străpunge orice barieră în formarea conceptelor numerelor întregi reale.

Dacă observăm însă că toate numerele obţinute pînă acum şi cele care urmează imediat după ele îndeplinesc o anumită condiţie, atunci cînd această condiţie este pusă ca cerinţă pentru toate numerele care trebuie formate imediat după ele, ea se dovedeşte a fi un nou principiu, al treilea alături de celelalte două, numit de mine principiu de frînare sau de îngrădire, şi care — aşa cum voi dovedi — are ca efect faptul că cea de-a doua clasă de numere (II), definită cu ajutorul acestui principiu, nu numai că primeşte o putere mai înaltă decît (I), ci primeşte chiar tocmai pe cea imediat superioară deci puterea a doua.

Condiţia menţionată, pe care orice număr infinit definit pînă acum o îndeplineşte, aşa cum ne convingem imediat, constă în faptul că mulţimea numerelor precedente acestui număr în şir este de puterea primei clase de numere (I). Dacă luăm, de pildă, numărul ω^ω atunci numerele precedente acestuia sînt conţinute în formula:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

unde μ, ν_0, ν_1, $\dots$ pot primi toate valorile numerice întregi pozitive finite inclusiv zero şi exclusiv relaţia $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_\mu = 0$.

După cum se ştie, această mulţime se poate pune sub forma unui şir simplu infinit şi are deci puterea lui (I).

Deoarece, trecînd mai departe, orice şir de mulţimi, în care fiecare mulţime este de puterea întîi, şirul însuşi fiind de puterea întîi, dă iarăşi o mulţime de puterea lui (I), atunci este evident că la continuarea şirului nostru de numere se obţin în primul rînd în realitate totdeauna numai astfel de numere, la care acea condiţie este îndeplinită de fapt.

De aceea, definim a doua clasă de numere (II) ca totalitatea tuturor numerelor care se pot forma cu ajutorul celor două principii de producere şi care sînt într-o succesiune progresivă determinată $\alpha, \omega, \omega+1, \ldots, \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+$ $+\nu_\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots \alpha \ldots$, fiind supuse condiţiei ca toate numerele de la 1 înainte, care premerg numărului α, să formeze o mulţime de puterea clasei de numere (I).

Ca supliment dăm şi definiţia continuului, care în lucrarea originală întrerupe oarecum prezentarea teoriei numerelor transfinite.

§ 10

Conceptul „continuului" a jucat în evoluţia ştiinţelor peste tot nu numai un rol însemnat, ci a provocat totdeauna şi cele mai mari divergenţe de opinii şi chiar controverse violente. Aceasta se explică, probabil, prin aceea că ideea care-i stă la bază a căpătat, atunci cînd a apărut la părţile disputante, un conţinut diferit din cauză că nu li s-a transmis definiţia exactă şi completă a conceptului; poate însă şi prin faptul — care mi se pare cel mai plauzibil — că ideea continuului nu a fost gîndită cu claritate şi completitudine nici de acei greci care au putut s-o înţeleagă mai întîi, ceea ce ar fi fost necesar pentru a se exclude din partea urmaşilor posibilitatea de concepţii diferite. Astfel, vedem că *Leucip*, *Democrit* şi *Aristotel* consideră continuul ca un „*compositum*" care constă „*ex partibus sine fine divisibilibus*"; dimpotrivă, *Epicur* şi *Lucreţiu* alcătuiesc continuul din atomii lor ca lucruri finite, de aici născîndu-se apoi o mare dispută între filozofi, unii urmînd pe *Aristotel*, alţii pe *Epicur*. Alţii, pentru a rămîne departe de controversă, au statuat iarăşi, cu *Toma din Aquino*, că acest continuu nu constă nici din părţi infinit de multe, nici dintr-un număr finit de părţi, ci din ceva fără părţi; această ultimă părere mie mi se pare că ar conţine mai puţin o explicaţie obiectivă decît o mărturisire tacită că nu s-a mers pînă la fondul problemei şi se preferă să se eschiveze cu eleganță de la el. Aici vedem originea medievală-scolastică a unei opinii, și azi reprezentată, după care continuul ar fi un concept nedecompozabil sau chiar, așa cum se exprimă unii, o intuiție pur apriorică, care n-ar fi accesibilă unei determinări prin concepte; orice încercare aritmetică de determinare a acestui mister este privită ca o încălcare nepermisă și respinsă cu vigoarea cuvenită; firile timide capătă astfel impresia oarecum că la „continuu" nu ar fi vorba de un concept matematico-logic, ci mai degrabă de o dogmă religioasă.

Este departe de mine intenția de a mai reîmprospăta aceste controverse, și pentru o discuție mai precisă a chestiunii în acest cadru îngust mi-ar lipsi spațiul; mă consider numai obligat ca pe conceptul de continuu, oricît de chibzuit l-aș concepe din punct de vedere logic și l-aș utiliza în teoria varietăților, să-l dezvolt aici cît se poate de scurt și numai din punctul de vedere al teoriei matematice a mulțimilor. Această elaborare nu mi-a fost ușoară, pentru că dintre matematicienii pe a căror autoritate mă sprijin cu plăcere, nici unul nu s-a ocupat cu continuul mai precis în sensul în care am nevoie eu aici.

Punînd la bază una sau mai multe mărimi continue reale sau complexe (sau, exprimîndu-mă, cred, mai corect: mulțimi de mărimi continue), conceptul de continuu depinzînd de ele univoc sau plurivoc, adică conceptul de funcție continuă în cele mai diverse sensuri, s-a elaborat foarte bine și astfel a luat naștere teoria așa-numitelor funcții analitice, ca și a funcțiilor mai generale cu proprietățile lor extrem de curioase (ca nediferențiabilitatea și altele asemenea); dar însuși continuul independent este admis de autorii matematicieni numai în cea mai simplă formă de manifestare și nu a fost supus unui studiu mai amănunțit.

Mai întîi trebuie să declar că, după părerea mea, implicarea conceptului de timp sau a intuiției timpului în analiza conceptului, care este mult mai primitiv și mai general, nu este în regulă; timpul este, după părerea mea, o reprezentare care pentru explicarea ei clară presupune conceptul de continuitate independent de ea, reprezentare care poate fi concepută chiar cu ajutorul acestui concept nu obiectiv ca o substanță, nici subiectiv ca o formă de intuiție apriorică necesară, ci numai ca un concept auxiliar și corelativ, prin care se stabilește relația dintre diferitele mișcări care apar în natură și sînt observate de noi. Ceva în genul timpului obiectiv sau absolut nu apare nicăieri în natură și de aceea timpul nu poate fi privit ca măsură a mișcării, ci mai degrabă mișcarea ca măsură a timpului, dacă acestei ultime concepții nu i s-ar opune faptul că timpul însuși, în rolul modest de formă a intuiției apriorice necesare, n-a putut s-o aducă la o prosperitate utilă, incontestabilă, deși pentru aceasta ar fi avut timp suficient de la *Kant* pînă acum.

De asemenea, convingerea mea este că nu se poate iniția nimic cu așa-numita formă de intuiție a spațiului pentru a căpăta o înțelegere asupra continuului, pentru că și spațiul și figurile imaginate în el numai cu ajutorul unui continuu gata pregătit din punct de vedere conceptual dobîndesc acel conținut prin care ele pot deveni obiect nu numai de contemplare estetică sau de subtilitate filozofică sau de analogii neprecise, ci și de cercetări matematice de sobră exactitate.

În consecință, nu-mi mai rămîne altceva decît să încerc, cu ajutorul conceptelor de numere reale definite în § 9, un concept aritmetic pur cît mai general de continuu punctual. Ca bază îmi servește, firește, spațiul aritmetic plan n-dimensional G_n, adică totalitatea sistemelor de valori

$$(x_1|x_2| \ldots |x_n),$$

în care fiecare x, independent de celelalte, poate primi toate valorile numerice reale de la $-\infty$ la $+\infty$. Orice astfel de sistem particular de valori îl numesc un punct aritmetic al lui G_n. Distanța a două astfel de puncte se definește prin expresia

$$\left|\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}\right|,$$

și printr-o mulțime de puncte aritmetice P conținută în G_n se înțelege orice totalitate de puncte din spațiul G_n dată conform unei reguli. Cercetarea revine deci la a stabili o definiție categorică și totodată cît mai generală posibil, cînd P trebuie numit un continuu.

În *J. Crelles*, vol. 84, p. 242 (*Ges. Abh.*, III, 2, p. 119), am demonstrat că toate spațiile G_n, oricît de mare ar fi așa-numitul număr n de dimensiuni, au aceeași putere și deci sînt de aceeași putere ca și continuul liniar, așadar ca, de pildă, totalitatea numerelor reale din intervalul $(0 \ldots 1)$. De aceea, cercetarea și stabilirea puterii lui G_n se reduc la aceeaşi întrebare, particulariaztă pe intervalul $(0\ldots 1)$, şi sper să pot în curînd răspunde printr-o demonstraţie riguroasă că puterea căutată nu este alta decît puterea celei de-a doua clase de numere (II). De aici va urma că toate mulţimile infinite de puncte P au sau puterea primei clase de numere (I), sau puterea celei de-a doua clase. Se mai poate deduce de aici şi consecinţa că totalitatea funcţiilor de una sau mai multe variabile, reprezentabile în formă de serie infinită dată în prealabil, indiferent care, posedă absolut numai puterea clasei a doua de numere (II) şi de aceea este numărabilă prin numere din a treia clasă de numere (III). Această propoziţie se va referi deci la totalitatea, de pildă, a funcţiilor ,,analitice'', adică a funcţiilor de una sau mai multe variabile generate prin continuarea seriilor convergente de puteri, sau la mulţimea tuturor funcţiilor de una sau mai multe variabile reale, care se pot reprezenta prin serii trigonometrice.

Pentru a înţelege mai bine conceptul general de continuu situat în interiorul lui G_n, amintesc de conceptul derivatei $P^{(1)}$ a unei mulţimi oarecare date P de puncte, aşa cum acest concept a fost dezvoltat mai întîi în lucrarea ,,Math. Ann.'', vol. 5 (*Ges. Abh.*, II, 5, p. 92), apoi în cursul acestei lucrări şi se găseşte lărgit pînă la conceptul unei derivate P^{γ}, unde γ poate fi un număr întreg oarecare dintr-una din clasele (I), (II), (III) etc. (vezi mai sus, pp. 310—312 . . .).

Mulţimile de puncte P se pot acum împărţi în două clase, după puterea primei lor derivate $P^{(1)}$. Dacă $P^{(1)}$ are puterea lui (I), se vede, aşa cum am arătat deja în § 3 al acestei scrieri, că există un număr întreg α al primei sau al celei de-a doua clase de numere (II), pentru care $P^{(\alpha)}$ se anulează. Dacă însă $P^{(1)}$ are puterea celei de-a doua clase de numere (II) [adică dacă $P^{(1)}$ nu este numărabil], atunci $P^{(1)}$ se poate descompune totdeauna, şi anume numai într-un singur fel, în două mulţimi R şi S, astfel încît

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

unde R şi S sînt de naturi extrem de diferite.

R are proprietatea că printr-un proces repetat de derivare este capabil de o continuă reducere pînă la anihilare, astfel că există totdeauna un număr întreg γ al claselor de numere (I) sau (II), pentru care

$$R^{(\gamma)} = 0\,;$$

astfel de mulțimi R de puncte le numesc reductibile.

Dimpotrivă, S are proprietatea că la această mulțime de puncte procesul de derivare nu produce nici o schimbare, avînd

$$S \equiv S^{(1)}$$

și în consecință, avem de asemenea

$$S \equiv S^{(\gamma)}\,;$$

astfel de mulțimi S le numesc mulțimi perfecte de puncte. De aceea, putem spune: dacă $P^{(1)}$ este de puterea clasei a doua (II) de numere, atunci $P^{(1)}$ se descompune într-o mulțime de puncte determinată reductibilă și într-una determinată perfectă.

Deși cele două predicate ,,reductibil'' și ,,perfect'' nu sînt compatibile în una și aceeași mulțime de puncte, totuși pe de altă parte ireductibil nu este tot una cu perfect și nici imperfect același lucru cu reductibil, așa cum se observă ușor cu oarecare atenție.

Mulțimile perfecte de puncte S nu sînt de loc totdeauna în interiorul lor ceea ce am numit ,,dense peste tot'' în lucrările mele amintite mai înainte; de aceea, ele nici nu se potrivesc încă exclusiv pentru definiția completă a unui continuu de puncte, chiar dacă trebuie imediat admis că acest continuu de puncte trebuie totdeauna să fie o mulțime perfectă.

Mai degrabă pentru a defini continuul este nevoie de încă un concept pe lîngă cel dinainte, și acesta este conceptul de mulțime conexă de puncte T.

Numim T o mulțime conexă de puncte dacă la fiecare două puncte t și t' din ea, pentru orice număr ε oricît de mic dat există în mai multe feluri totdeauna un număr finit de puncte $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ din T, astfel încît toate distanțele $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}$, $\ldots$, $\overline{t_\nu t'}$ sînt mai mici decît ε. Este vorba deci despre o proprietate ,,metrică'' a continuului.

Toate continuurile punctuale geometrice cunoscute de noi se subsumează, așa cum se vede ușor, și ele sub acest concept de mulțime conexă de puncte; cred însă că și în aceste două predicate „perfect" și „conex" pot recunoaște semnele caracteristice necesare și suficiente ale unui continuu punctual și de aceea definesc un continuu punctual în interiorul lui G_n ca o mulțime perfect conexă. Aici „perfect" și „conex" nu sînt simple cuvinte, ci sînt predicate ale continuului, absolut generale, caracterizate conceptual în modul cel mai categoric prin definițiile pe care le-am dat în prealabil.

Definiția dată de *Bolzano* continuului nu este, desigur, justă (*Paradoxele*, § 38); ea exprimă unilateral numai o proprietate a continuului, care însă este și îndeplinită la mulțimile generate din G_n prin faptul că ne imaginăm o mulțime oarecare de puncte „izolată" la distanță de G_n [să se compare „Math. Ann"., vol. 21, p. 51 (*Ges. Abh.*, p. 157)]; de asemenea, ea este îndeplinită la mulțimi care constau din mai multe continuuri separate; evident că în astfel de cazuri nu există nici un continuu, deși după *Bolzano*, ar exista. Așadar, aici vedem o violare a principiului: „*ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest*".

De asemenea, mi se pare că și în scrierea domnului *Dedekind* (*Continuitatea și numerele iraționale*) este pusă în evidență unilateral numai o altă proprietate a continuului, anume aceea pe care o are în comun cu toate mulțimile „perfecte", așadar „nelacunaritatea" de care vorbește *Hausdorff*.

Ambițiosul edificiu al teoriei mulțimilor a lui *Cantor*, care părea că are fundament solid, a dus pînă la urmă la contradicții datorită unei prea mari lărgiri a principiilor de producere pentru mulțimile infinite. Ele ating mulțimile oarecum „atotcuprinzătoare", ca mulțimea tuturor numerelor ordinale și a tuturor puterilor a diferitelor clase de numere (așa-numitele „alefuri"), precum și mulțimea tuturor lucrurilor sau a tuturor mulțimilor.

Scrisorile care urmează, adresate de *Cantor* lui *Dedekind*, tratează despre astfel de mulțimi „inconsistente". Din punct de vedere istoric este de observat că antinomia mulțimii tuturor numerelor ordinale a fost publicată mai întîi de Burali-Forti în 1897 (*Rend. Circ. Math.*, Palermo, XI), însă a fost comunicată încă din 1896 printr-o scrisoare a lui *Cantor* către *Hilbert* (după cele spuse de *F. Bernstein*, în „Math. Ann.", vol. 60, p. 187). În secolul al XX-lea această antinomie, împreună cu o serie întreagă de paradoxe înrudite, a dus la o criză în cercetarea fundamentelor matematicii, ba chiar a logicii formale (despre care se va trata în cap. V).

1. *Cantor către Dedekind*

Halle, 28 iulie 1899

...... Știți că încă de mulți ani am ajuns la un șir bine ordonat de puteri sau numere cardinale transfinite, pe care le numesc „alefuri"

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_{\omega_0}, \ldots$$

$\aleph_0$ înseamnă puterea mulțimilor „numărabile" în sens obișnuit, $\aleph_1$ este numărul cardinal imediat mai mare, $\aleph_2$ următorul mai mare etc.; $\aleph_{\omega_0}$ este numărul imediat următor după toate $\aleph_\nu$ (adică imediat mai mare) și egal cu

$$\lim_{\nu \to \omega_0} \aleph_\nu$$

etc.

Marea întrebare era dacă în afară de alefuri există și alte puteri de mulțimi; încă de acum doi ani sînt în posesia unei demonstrații că nu există altele, așa încît continuului liniar aritmetic (totalității numerelor reale) i se asociază un anumit alef ca număr cardinal.

Plecînd de la conceptul de multiplicitate determinată (sistem, totalitate) de lucruri, a reieșit pentru mine necesitatea de a distinge două feluri de multiplicități (am în vedere totdeauna multiplicități determinate).

Natura unei multiplicități poate fi astfel încît ipoteza unei „coexistențe" a tuturor elementelor sale să ducă la o contradicție, fiind imposibil să concepi multiplicitatea ca o unitate, ca „ceva determinat". Astfel de multiplicități le numesc multiplicități absolut infinite sau inconsistente.

După cum ne convingem ușor, de pildă, „totalitatea a tot ceea ce poate fi gîndit" este o astfel de multiplicitate; mai tîrziu vom întîlni și alte exemple.

Dacă, dimpotrivă, totalitatea elementelor unei multiplicități poate fi gîndită fără contradicție ca fiind „coexistente", astfel încît este posibil ca totalitatea să fie concepută în ansamblu ca „un lucru", eu o numesc o multiplicitate consistentă sau o „mulțime" (în franceză și italiană acest concept se exprimă convenabil prin cuvintele „*ensemble*" și „*insieme*").

Două multiplicităţi echivalente sînt sau ambele „mulţimi" sau ambele inconsistente.

Fiecare multiplicitate parţială a unei mulţimi este o mulţime.

Fiecare mulţime de mulţimi este, dacă le desfacem pe acestea din urmă în elementele lor, tot o mulţime.

Dacă se dă o mulţime M, conceptul general care îi corespunde ei şi, de asemenea, numai tuturor mulţimilor echivalente cu ea, eu îl numesc numărul ei cardinal sau puterea ei şi îl notez cu m. La sistemul tuturor puterilor, care se va vedea mai tîrziu că este o multiplicitate inconsistentă, eu ajung pe calea următoare.

O multiplicitate se numeşte „simplu ordonată" dacă între elementele ei există o astfel de ordonare încît la fiecare două elemente din ea unul este anterior, celălalt posterior şi la fiecare trei elemente din ea unul este primul, altul intermediar şi cel care mai rămîne este ultimul după rang între ele.

Dacă multiplicitatea simplu ordonată este o mulţime, atunci prin tipul său μ înţeleg conceptul general care cuprinde atît această mulţime, cît şi toate mulţimile ordonate *asemenea* cu ea. (Conceptul de asemănare îl folosesc într-un sens mai restrîns decît dv.; căci eu numesc asemenea nişte mulţimi simplu ordonate dacă pot fi puse în corespondenţă biunivocă, astfel încît raportul rangurilor elementelor corespunzătoare în cele două mulţimi este acelaşi).

O mulţime se numeşte bine ordonată dacă îndeplineşte condiţiile ca fiecare multiplicitate parţială să aibă un prim element; o astfel de multiplicitate o numesc, pe scurt, „şir".

Fiecare parte a unui „şir" este un „şir".

Dacă un şir F are caracter de mulţime, eu numesc tipul lui F „numărul său ordinal" sau, pe scurt, „numărul" său; astfel că dacă în cele ce urmează vorbesc numai despre numere, voi avea în minte numai numere ordinale, adică tipuri de mulţimi bine ordonate.

Am în vedere acum sistemul tuturor numerelor şi îl notez cu Ω.

În „Math. Ann.", vol. 49, p. 216 (*Ges. Abh.*, III, 9, p. 320) se demonstrează că dintre două numere α şi β unul este totdeauna mai mic, celălalt mai mare şi că dacă între trei numere avem $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, atunci şi $\alpha < \gamma$.

Ω este deci un sistem simplu ordonat.

Dar din propozițiile demonstrate în § 13 despre mulțimile bine ordonate se deduce ușor că orice multiplicitate de numere, adică orice parte din Ω conține și pe cel mai mic număr.

Sistemul Ω formează, de aceea, un „șir" în ordinea naturală a mărimilor sale.

Dacă adăugăm la acest șir și pe zero ca element, și anume punîndu-l în primul loc, obținem un șir Ω';

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \omega_0,\ \omega_0+1,\ \ldots,\ \gamma,\ \ldots$$

despre care ne convingem ușor că orice număr din el este tipul șirului tuturor elementelor care îl precedă (inclusiv zero). (Șirul Ω are această proprietate de-abia pentru $\omega_0 + 1$.)

Se poate ca Ω' (în consecință și Ω) să nu fie multiplicitate consistentă; dacă Ω' ar fi consistentă, i s-ar asocia un număr δ ca unei mulțimi bine ordonate, număr care ar fi mai mare decît toate numerele sistemului Ω; în sistemul Ω apare însă și numărul δ, pentru că el cuprinde toate numerele; deci δ ar fi mai mare ca δ, ceea ce este o contradicție. Așadar:

A. Sistemul Ω al tuturor numerelor este o multiplicitate inconsistentă, absolut infinită.

Deoarece asemănarea mulțimilor bine ordonate fundamentează în același timp echivalența lor, fiecărui număr γ îi aparține un anumit număr cardinal $\aleph(\gamma) = \bar{\gamma}$, anume numărul cardinal al mulțimilor bine ordonate, al căror tip este γ.

Numerele cardinale, care li se atribuie în acest sens numerelor transfinite ale sistemului Ω, le numesc „alefuri" și sistemul tuturor alefurilor se numește ת (tav, ultima literă din alfabetul ebraic).

Sistemul tuturor numerelor γ, care aparțin aceluiași număr cardinal $\mathfrak{c}$, eu îl numesc o „clasă de numere", și anume clase de numere $Z(\mathfrak{c})$. Se vede ușor că în fiecare clasă de numere există cel mai mic număr γ_0 și că există un număr γ_1 care nu aparține lui $Z(\mathfrak{c})$, așa încît condiția

$$\gamma_0 \leqslant \gamma < \gamma_1$$

echivalează cu apartenența numărului γ la clasa de numere

$Z(\mathfrak{c})$. Fiecare clasă de numere este deci un „interval" determinat din şirul Ω[1].

Anumite numere ale sistemului Ω formează fiecare în parte cîte o clasă de numere; ele sînt numerele „finite" 1, 2, 3, ... cărora le corespund diferitele numere cardinale 1, 2, 3, ...

Fie ω_0 cel mai mic număr transfinit; notez aleful care îi corespunde prin $\aleph_0$, astfel încît

$$\aleph_0 = \overline{\omega}_0;$$

$\aleph_0$ este cel mai mic alef şi determină clasa de numere

$$Z(\aleph_0) = \Omega_0.$$

Numerele α ale lui $Z(\aleph_0)$ îndeplinesc condiţia

$$\omega_0 \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$$

şi prin aceasta sînt caracterizate; aici ω_1 este cel mai mic număr transfinit, al cărui număr cardinal nu este egal cu $\aleph_0$. Dacă facem

$$\overline{\omega}_1 = \aleph_1,$$

atunci nu numai că $\aleph_1$ este diferit de $\aleph_0$, ci el este aleful imediat mai mare, căci se poate demonstra că nu există nici un număr cardinal între $\aleph_0$ şi $\aleph_1$. Astfel se obţine clasa de numere imediat următoare lui Ω_0, anume $\Omega_1 = Z(\aleph_1)$. Ea cuprinde numerele β care îndeplinesc condiţia

$$\omega_1 \leqslant \beta < \omega_2;$$

aici ω_2 este cel mai mic număr transfinit, al cărui număr cardinal este diferit de $\aleph_0$ şi $\aleph_1$.

$\aleph_2$ este aleful care urmează imediat în mărime după $\aleph_1$ şi determină clasa de numere $\Omega_2 = Z(\aleph_2)$ care urmează imediat după Ω_1, constînd din toate numerele γ, cele $\geqslant \omega_2$ şi $< \omega_3$, unde ω_3 este cel mai mic număr transfinit, al cărui număr cardinal este diferit de $\aleph_0$, $\aleph_1$ și $\aleph_2$ etc. Mai subliniez încă relațiile următoare, care sînt ușor de demonstrat:

---

[1] Aici se foloseşte în permanenţă propoziţia menţionată deja (p. 341) că orice totalitate de numere, deci orice multiplicitate parţială a lui Ω, are un minim, un cel mai mic număr.

$$\overline{\overline{\Omega}}_0 = \aleph_1, \ \overline{\overline{\Omega}}_1 = \aleph_2, \ \ldots, \overline{\overline{\Omega}}_\nu = \aleph_{\nu+1}; \ \sum \aleph_{\nu'} = \aleph_\nu$$
$$\nu' = 0, 1, 2, \ldots$$

Între numerele transfinite ale sistemului Ω, cărora nu li se atribuie ca număr cardinal nici unul dintre $\aleph_\nu$ (cu ν finit), există iarăși unul cel mai mic, pe care îl numim ω_{ω_0} și cu el căpătăm un nou alef

$$\aleph_{\omega_0} = \overline{\overline{\omega}}_{\omega_0},$$

care se poate defini și prin ecuația

$$\aleph_{\omega_0} = \sum \aleph_{\omega_0}$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

și care se recunoaște ca număr cardinal imediat mai mare decît toți $\aleph_\nu$.

Ne convingem că acest proces de formare a alefurilor și a claselor de numere ale sistemului corespunzătoare lor este absolut nemărginit.

B. Sistemul ת al tuturor alefurilor

$$\aleph_0, \aleph_1 \cdots \aleph_{\omega_0}, \aleph_{\omega_0+1} \cdots \aleph_{\omega_1} \cdots$$

formează în ordinea lor de mărime un șir asemenea sistemului și, de aceea, de asemenea inconsistent, absolut infinit.

Se pune întrebarea acum dacă în acest sistem ת sînt conținute toate numerele cardinale transfinite. Cu alte cuvinte, există oare o mulțime a cărei putere nu este un alef?

La această întrebare trebuie să dăm un răspuns negativ și motivul constă în consistența, recunoscută de noi, a sistemelor Ω și ת.

Demonstrație. Dacă luăm o multiplicitate oarecare V și presupunem că ei nu-i atribuim nici un alef ca număr cardinal, conchidem că V trebuie să fie inconsistent.

Căci se recunoaşte uşor (1) că în ipoteza pe care am făcut-o întregul sistem Ω poate fi proiectat în multiplicitatea V, adică trebuie să existe o multiplicitate parţială V' a lui V, echivalentă sistemului Ω.

V' este inconsistent pentru că Ω este inconsistent, deci trebuie să afirmăm acelaşi lucru şi despre V (cf. p. 341).

Prin urmare, orice multiplicitate consistentă transfinită, orice mulţime transfinită trebuie să aibă un anumit alef ca număr cardinal. Deci:

C. Sistemul ת al tuturor alefurilor nu este altceva decît sistemul tuturor numerelor cardinale transfinite.

De aceea, toate mulţimile sînt într-un sens larg „numărabile", în particular toate „continuurile".

Mai departe, din C. recunoaştem validitatea propoziţiei formulate în „Math. Ann.", vol. 46 (*Ges. Abh.*, II, 9, § 2, p. 285):

„Dacă a şi b sînt numere cardinale oarecare, avem $a = b$, sau $a < b$, sau $a > b$".

Căci alefurile au, aşa cum am văzut, acest caracter de mărimi.

2. *Cantor către Dedekind*

Hahnenklee, 28 august, 1899

. . . Se poate pune întrebarea de unde ştiu eu că multiplicităţile sau şirurile bine ordonate, cărora eu le atribui numerele cardinale

$$\aleph_0, \aleph_1 \cdots \aleph_{\omega_0}, \cdots \aleph_{\omega_1} \cdots,$$

ar fi şi în realitate „mulţimi". N-ar fi oare posibil ca chiar aceste multiplicităţi să fie inconsistente şi contradicţia ipotezei unei „coexistenţe a tuturor elementelor sale" să fie numai încă neobservabilă? Răspunsul meu este că această întrebare trebuie extinsă, de asemenea, la multiplicităţile finite şi că o examinare precisă duce la rezultatul că chiar pentru multiplicităţi finite nu trebuie făcută o „demonstraţie" a „consistenţei" lor. Cu alte cuvinte: faptul „consistenţei" multiplicităţilor finite este un adevăr simplu nedemonstrabil, este „axioma aritmeticii" (în sensul vechi al cuvîntului). Şi, de asemenea, „consistenţa" multiplicităţilor, cărora eu le atribui alefurile numerelor cardinale, este „axioma aritmeticii transfinite lărgite".

3. *Cantor către Dedekind*

Hahnenklee, 31 august 1899

... „Mulțimile" echivalente le vom atribui uneia și aceleiași clase de puteri, mulțimile neechivalente — claselor diferite, și considerăm sistemul S al tuturor claselor care pot fi gîndite.

Prin $\mathfrak{a}$ înțeleg în același timp numărul cardinal sau puterea mulțimilor clasei respective, care pentru toate aceste mulțimi este una și aceeași.

Fie $M_{\mathfrak{a}}$ o mulțime determinată a clasei $\mathfrak{a}$.

Afirm că sistemul S bine definit complet determinat nu este „mulțime".

Demonstrație. Dacă S ar fi o mulțime, atunci și

$$T = \Sigma M_{\mathfrak{a}},$$

această sumă efectuată pe toate clasele $\mathfrak{a}$ ar fi o mulțime; deci T ar aparține unei anumite clase, vom spune clasei $\mathfrak{a}_0$.

Acum însă este valabilă următoarea propoziție:

„Dacă M este o mulțime oarecare cu numărul cardinal $\mathfrak{a}$, atunci se poate deduce din ea totdeauna o altă mulțime M', al cărei număr cardinal $\mathfrak{a}'$ este mai mare ca $\mathfrak{a}$."

Propoziția că $\mathfrak{a}$ este egal cu $\aleph_0$ (numărabilitatea în sensul obișnuit al cuvîntului) și egal cu $\mathfrak{c}$, unde $\mathfrak{c}$ înseamnă puterea continuului aritmetic, am demonstrat-o pentru cazurile cele mai la îndemînă printr-un procedeu echivalent în primul volum de comunicări ținute la Deutsche Mathematikervereinigung (*Ges. Abh.*, III, 8, p. 278). Acest procedeu se poate transpune fără nici o dificultate la un $\mathfrak{a}$ oarecare. Semnificația acestei metode se poate exprima pur și simplu prin formula

$$2^{\mathfrak{a}} < \mathfrak{a}.$$

De aceea, fie $\mathfrak{a}_0'$ un număr cardinal oarecare mai mare decît $\mathfrak{a}_0$. Atunci T cu puterea $\mathfrak{a}_0$ conține ca parte mulțimea $M_{\mathfrak{a}_0'}$ de putere mai mare $\mathfrak{a}_0'$, ceea ce este o contradicție.

De aceea, sistemul T, deci și sistemul S, nu sînt mulțimi. Există, așadar, anumite multiplicități, care nu sînt totodată unități, adică atare multiplicități la care o reală „coexistență a tuturor elementelor sale" este imposibilă. Pe ele le numesc eu „sisteme inconsistente", pe celelalte le numesc însă „mulţimi".

Observaţia lui **E. Zermelo**:

(1) [La p. 343] Tocmai aici se află slăbiciunea demonstraţiei schiţate. Faptul că întregul şir de numere Ω ar trebui să fie „proiectibil" în orice multiplicitate *V*, care nu are nici un alef ca număr cardinal, nu se demonstrează, ci este dedus dintr-o „intuiţie" oarecum vagă. Momentan, *Cantor* îşi imaginează elemente succesive şi arbitrare din *V* asociate numerelor din Ω astfel încît fiecare element din *V* este folosit numai o dată. Acest procedeu ar trebui sau să se încheie, epuizîndu-se toate elementele lui *V* şi atunci *V* ar fi asociat unei porţiuni din şirul de numere, iar puterea sa ar fi un alef contrar ipotezei. Sau, dimpotrivă, *V* ar rămîne neepuizabilă şi ar conţine atunci o parte componentă echivalentă cu întregul Ω, deci inconsistentă. Aici se întrebuinţează deci intuiţia timpului într-un proces care depăşeşte orice intuiţie şi plăsmuieşte o fiinţă care ar putea să facă alegeri arbitrare succesive şi astfel să definească o submulţime *V'* a lui *V*, care nu se poate însă defini prin condiţiile puse. De-abia prin aplicarea „axiomei alegerii", care postulează posibilitatea unei alegeri simultane şi pe care *Cantor* o aplică peste tot inconştient şi instinctiv, dar nicăieri n-o formulează explicit, *V'* ar putea să fie definit ca submulţime a lui *V*. Dar şi atunci ar mai exista temerea că demonstraţia operează cu mulţimi „inconsistente", ba poate chiar cu concepte contradictorii şi de aceea ar fi din punct de vedere logic chiar inadmisibilă. Căci scrupule de această natură au determinat cîţiva ani mai tîrziu pe editor să demonstreze propoziţia de bună ordonare („Math. Ann.", 59, 1904 p. 514) numai pe baza axiomei alegerii fără să utilizeze multiplicităţile inconsistente.

În problema multiplicităţilor „inconsistente", „absolut infinite", pe care *Cantor* le tratează în prima sa scrisoare către *Dedekind*, trebuie să observăm că este o strînsă legătură pe de o parte între conceptele folosite de el şi reflecţiile provocate de el şi, pe de altă parte, o idee a lui **J. von Neumann**, prin care acesta evită antinomiile teoriei mulţimilor şi în acelaşi timp demonstrează propoziţia că orice mulţime poate fi bine ordonată, adică este un „alef" (cf. *J. v. Neumann, Asupra unei probleme de necontradicţie din teoria axiomatică a mulţimilor,* în „Journ. f. reine u. angewandte Math". vol. 160, 1929, pp. 227, 229).

Pentru a evita paradoxele, toate mulțimile „prea mari" nu sînt admise de el ca elemente la formarea altor mulțimi:

> O mulțime este „nu prea mare" atunci și numai atunci cînd ea are o putere mai mică decît mulțimea tuturor lucrurilor în genere. [Așadar, unei mulțimi „prea mari" îi corespunde mulțimea „absolut infinită", „inconsistentă" a lui *Cantor*.]
>
> Mulțimea tuturor numerelor ordinale este paradoxală [după *Cantor*, „inconsistentă"] căci ea duce la antinomia *Burali-Forti*, deci este „prea mare", deci echivalentă cu mulțimea tuturor lucrurilor. Această mulțime a tuturor lucrurilor este, prin urmare, echivalentă cu o mulțime bine ordonată, deci ea însăși se poate bine ordona; orice altă mulțime este submulțime a ei, deci se poate, de asemenea, bine ordona.

[Așadar, din teza lui *J. v. Neumann* că tocmai mulțimile „prea mari" — și de aceea mulțimi paradoxale — sînt mulțimile echivalente cu mulțimea tuturor lucrurilor, decurge propoziția de bună ordonare pentru toate mulțimile.]

În încheiere împărtășim și o anecdotă nostimă pe care o relatează **Emmy Noether**, după mărturia lui *F. Bernstein*; ea caracterizează într-un mod foarte intuitiv atitudinea de simțăminte diferite a lui *Dedekind* și *Cantor* față de reprezentarea unei mulțimi actual infinite.

F. Bernstein transmite și următoarele observații:

> ... De un deosebit interes ar putea fi următorul episod: *Dedekind* spunea în legătură cu conceptul de mulțime: el își reprezintă o mulțime ca un sac închis care ar conține anumite lucruri determinate, dar care nu s-ar vedea și despre care nimic nu s-ar ști, afară de faptul că ele există și sînt determinate. Cîtva timp mai tîrziu *Cantor* își exprimă reprezentarea sa despre mulțime: el își îndreptă în sus statura sa colosală, descrise cu brațul ridicat un gest măreț și spuse privind în gol: „o mulțime mi-o reprezint ca un abis".

În sfîrșit, urmează așa-numita „demonstrație" vestită a lui *Dedekind* pentru existența mulțimilor infinite, a cărei idee fundamentală se găsește, de altfel, și la Bolzano.

Dedekind, *Ce sînt și ce reprezintă numerele?* § 5, Propoziția a 66-a

Există sisteme infinite

Demonstrație. Lumea ideilor mele, adică totalitatea S a tuturor lucrurilor care pot fi obiectul gîndirii mele, este infinită. Căci dacă s înseamnă un element al lui S, atunci ideea s' că s poate fi obiectul gîndirii mele este ea însăși un element al lui S. Dacă o considerăm pe ea însăși ca imaginea $\varphi(s)$ a elementului s, atunci aplicația φ a lui S determinată astfel are proprietatea că imaginea S' este o parte a lui S, și anume S' este o parte strictă a lui S, deoarece există elemente în S (de pildă, propriul meu eu) care diferă de orice atare idee s' și de aceea nu sînt conținute în S'. În sfîrșit, este evident că dacă a, b sînt elemente diferite ale lui S, și imaginile lor a', b' sînt diferite, că deci aplicația φ este evidentă (asemenea). Prin urmare, S este infinit. q.e.d

CAPITOLUL V

CERCETAREA FUNDAMENTELOR ÎN SECOLUL AL XX-LEA

A. Logicismul

Cercetarea fundamentelor în secolul al XX-lea diferă esențial de toate eforturile anterioare în acest domeniu prin faptul că barierele dintre matematică și logica formală cad și se tinde la o fundamentare a matematicii prin logică sau, în orice caz, prin acea că relațiile dintre cele două discipline devin cea mai specifică problemă a fundamentelor.

Aceasta se datorește pe de o parte apariției unei logici formale modelate după principii matematice, a unui calcul logic, în decursul secolului al XIX-lea, începînd cu lucrarea lui *George Boole*(1815—1864), intitulată *Mathematical Analysis of Logic*, în 1847 (desigur și *Leibniz* avusese concepții largi despre un „*calculus ratiocinator*" și parțial le și tradusese în fapt, dar nu le publicase; de aceea n-au avut nici o înrîurire asupra contemporanilor și posterității). Pe de altă parte, s-a născut necesitatea unei fundamentări riguroase a celei mai fundamentale discipline matematice, a teoriei pure a numerelor, îndeosebi necesitatea demonstrației necontradicției sale; aceasta a condus însă din nou la logica formală.

1. Critica lui G.Frege relativă la o demonstrație a lui Leibniz și definiția conceptului de număr prin mijloace pur logice

Gottlob Frege (1846—1925) trebuie considerat ca un surprinzător precursor mai vechi, aparținînd cu începuturile sale încă secolului al XIX-lea (scrierea sa *Begriffsschrift* a apărut în 1879). Din opera sa extrem de interesantă, intitulată *Bazele aritmeticii* (1884), dăm mai întîi expunerea și critica unei încercări de demonstrație provenită de la *Leibniz* pentru propoziția aritmetică elementară:

$$2 + 2 = 4.$$

§ 6. Alți filozofi și matematicieni au afirmat chiar și demonstrabilitatea formulelor numerice. *Leibniz* spune (*Nouveaux Essais*, IV, § 10):

„Nu este un adevăr nemijlocit că 2 și cu 2 fac 4; presupunem că 4 înseamnă 3 și 1. Putem să demonstrăm, și anume astfel:

Definiții: 1) 2 este 1 și 1
2) 3 este 2 și 1
3) 4 este 3 și 1

Axiomă: Dacă punem în loc cantități egale, ecuația se menține.

Demonstrație: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$

Def. 1 Def. 2 Def. 3

Deci, conform axiomei: $2 + 2 = 4$“.

Această demonstrație pare în primul rînd să fie construită numai din definiție și din axioma citată. Și aceasta ar putea fi transformată într-o definiție, așa cum însuși *Leibniz* a făcut într-un alt loc („*Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*”, *Erdm.*, p. 94; *Gerh. Phil.*, VII, p. 228). Se pare că nu este nevoie să știm ceva mai mult despre 1, 2, 3, 4 decît ceea ce este conținut în definiții. La un studiu mai precis se descoperă totuși o lacună acoperită prin abandonarea parantezelor. Mai precis ar trebui anume scris:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1),$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Aici lipsește propoziția

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

care este un caz particular al relației

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Dacă presupunem această lege, atunci se vede ușor că fiecare formulă a adunării poate fi astfel demonstrată.

Urmează acum celebra definiție dată de *Frege* numărului cu mijloace pur logice, adică reducerea conceptului de număr la concepte pur logice — o realizare care pînă atunci a fost considerată absolut imposibilă.

Pentru a dobîndi conceptul de număr trebuie să stabilim sensul unei ecuații numerice

§ 62. Cum trebuie să ne fie dat atunci un număr dacă nu putem avea nici o reprezentare sau intuiție a lui ? Cuvintele au un sens numai în contextul unei propoziții. Așadar, ar fi vorba de a explica sensul unei propoziții în care apare un numeral. Mai întîi aceasta dă arbitrarului încă multă libertate. Însă noi am stabilit deja că prin numerale vom înțelege obiecte independente. Prin aceasta ne este dată o specie de propoziții care trebuie să aibă un sens, propoziții care exprimă o recunoaștere. Dacă pentru noi semnul *a* va desemna un obiect, trebuie să avem o caracteristică care decide totdeauna dacă *b* este același lucru ca *a*, chiar dacă nu stă totdeauna în puterea noastră să aplicăm această caracteristică. În cazul nostru trebuie să explicăm sensul propoziției.

> ,,numărul atribuit conceptului *F* este același care este atribuit conceptului *G*'',

adică trebuie să redăm conținutul acestei propoziții în alt mod fără a întrebuința expresia

> ,,numărul atribuit conceptului *F*''.

Prin aceasta noi indicăm o caracteristică generală pentru egalitatea numerelor. După ce am obținut astfel un mijloc de a exprima un anumit număr și de a-l recunoaște, putem să-i dăm un numeral ca nume propriu.

§ 63. *Hume* indică deja un astfel de mijloc: ,,Dacă două numere sînt astfel combinate încît unul are totdeauna o unitate care corespunde fiecărei unități a celuilalt, atunci noi le indicăm ca egale". Se pare că în epoca modernă a găsit mult ecou printre matematicieni opinia că egalitatea numerelor ar trebui definită cu ajutorul corespondenței univoce. Dar în primul rînd se ridică obiecții și dificultăți logice, pe lîngă care nu ne este permis să trecem fără să le examinăm.

Raportul de egalitate nu apare numai la numere. De aici pare să urmeze că el nu trebuie să fie explicat special pentru acest caz. Ar trebui să ne gîndim că noțiunea de egalitate ar fi stabilită dinainte și că apoi din ea și din conceptul de număr ar trebui să reiasă cînd numerele ar fi egale unele cu altele fără a mai fi nevoie pentru aceasta de încă o definiție specială.

Împotriva acestui lucru este de observat că pentru noi conceptul de număr nu este încă stabilit, ci trebuie să fie determinat numai cu ajutorul explicației noastre. Intenția noastră este să formăm conținutul unei judecăți, conținut care se poate concepe ca o ecuație, încît fiecare parte a ecuației să fie un număr. Așadar, noi n-am vrea să explicăm egalitatea propriu-zis pentru acest caz, ci cu ajutorul conceptului deja cunoscut de egalitate să obținem ceva ce trebuie privit ca egal. Negreșit că aceasta pare să fie un mod foarte neobișnuit de definiție care nu este luat în seamă încă suficient de către logicieni; că un astfel de mod nu este însă nemaiauzit, se poate vedea din cîteva exemple.

§ 64 Judecata: ,,dreapta a este paralelă cu dreapta b'', în semne:

$$a \| b,$$

poate fi concepută ca ecuație. Dacă facem aceasta, obținem conceptul de direcție și spunem: ,,direcția dreptei a este egală cu direcția dreptei b''. Deci înlocuim semnul $\|$ prin semnul mai general $=$, distribuind conținutul special al primului semn la a și b. Noi despicăm conținutul într-o altă formă decît în cea originală și obținem prin aceasta un nou concept. Evident că adesea se concepe lucrul invers și anumiți profesori dau definiția: dreptele paralele sînt cele care au aceeași direcție. Propoziția ,,dacă două drepte sînt paralele cu a treia ele sînt paralele între ele'' se poate apoi demonstra foarte comod sprijinindu-mă pe propoziția egalității care sună la fel. Păcat numai că situația reală este pusă cu capul în jos! Căci tot ce este geometric trebuie totuși să fie la origine intuitiv. Acum întreb dacă cineva are o intuiție despre direcția unei drepte. Admitem că are despre dreaptă! dar distingem în intuiția acestei drepte și direcția ei? Greu de spus! Acest concept este găsit numai printr-o activitate spirituală legată de intuiție. Dimpotrivă, orice om are o reprezentare a dreptelor paralele. Acea demonstrație rezultă numai printr-un truc presupunînd prin folosirea cuvîntului ,,direcție'' ceea ce este de demonstrat; căci dacă propoziția: ,,dacă două drepte sînt paralele cu a treia, ele sînt paralele între ele'' ar fi neadevărată, nu am putea transforma $a \| b$ într-o ecuație.

§ 65. Acum, pentru a ajunge, de pildă, de la paralelism la conceptul de direcție, să încercăm următoarea definiție: fie ca propoziția

„dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*"

să aibă același sens cu propoziția

„direcția dreptei *a* este egală cu direcția dreptei *b*".

Această enunțare se abate de la exprimarea obișnuită, deoarece pare că determină relația deja cunoscută a egalității, în timp ce în realitate ea trebuie să introducă expresia „direcția dreptei *a*", expresie care apare numai ca secundară. De aici se naște a doua obiecție, dacă nu cumva stabilind aceasta n-am putea fi implicați în contradicții cu cunoscutele legi ale egalității. Care sînt acestea? Ele vor putea fi dezvoltate ca adevăruri analitice din însuși conceptul de egalitate. *Leibniz* dă definiția:

„*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*".

Această enunțare mi-o însușesc pentru egalitate. Dacă spunem ca Leibniz „același" sau „egal", acesta este fără însemnătate. „Același" pare să exprime o perfectă concordanță, „egal" numai o concordanță într-o direcție sau alta; se poate însă accepta o astfel de expresie încît această distincție să cadă, spunîndu-se în loc de „segmentele sînt egale ca lungime", de pildă, „lungimea segmentelor este egală" sau „aceeași", în loc de „suprafețele sînt egale în culoare", „culoarea suprafețelor este egală". Astfel am folosit noi cuvîntul în exemplele de mai înainte. În posibilitatea de substituire generală sînt conținute de fapt toate legile egalității.

Pentru a justifica încercarea noastră de definiție a direcției unei drepte, ar trebui să arătăm că s-ar putea înlocui

direcția lui *a*

peste tot cu

direcția lui *b*,

dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*. Aceasta se simplifică prin faptul că în primul rînd nu se cunoaște despre direcția unei drepte nici un alt enunț decît concordanța cu direcția unei alte drepte.

Prin urmare, am avut nevoie să demonstrăm numai posibilitatea de substituire într-o astfel de egalitate sau în conţinuturi care ar conţine astfel de egalităţi ca părţi constitutive. Toate celelalte enunţuri despre direcţii trebuie să fie mai întîi lămurite şi pentru aceste definiţii putem să enunţăm regula că posibilitatea de substituire a direcţiei unei drepte trebuie să fie menţinută prin direcţia unei drepte paralele cu ea.

§ 68. Deoarece în acest chip nu putem obţine un concept precis delimitat despre direcţie şi, din aceleaşi motive, nici despre număr, să încercăm o altă cale. Dacă dreapta *a* este paralelă cu dreapta *b*, sfera conceptului ,,dreaptă paralelă cu dreapta *a*'' este egală cu sfera conceptului ,,dreaptă paralelă cu dreapta *b*'' ; şi invers, dacă sferele acestor concepte sînt egale, atunci *a* este paralelă cu *b*. Să încercăm să enunţăm aşadar:

> direcţia dreptei *a* este sfera conceptului ,,paralelă cu dreapta *a*'' ;
>
> forma triunghiului *d* este sfera conceptului ,,asemenea cu triunghiul *d*''.

Dacă vrem să le aplicăm la cazul nostru, trebuie să punem în locul dreptelor sau triunghiurilor concepte şi în locul paralelismului şi asemănării posibilitatea de a asocia biunivoc obiectele subsumate unuia sau celuilalt concept. Pentru a mă exprima pe scurt, voi numi conceptul *F* echivalent (*gleichzahlig*) cu conceptul *G*, dacă există această posibilitate; trebuie însă să cer ca acest cuvînt să fie considerat ca denumire aleasă arbitrar, a cărei semnificaţie nu trebuie desprinsă din expresia verbală.

În consecinţă, eu definesc:

> numărul asociat conceptului *F* este sfera conceptului ,,echivalent cu conceptul *F*''.

2. Definiţia logică a numărului dată de B. Russell

Scrierea lui *Frege* din 1884 a rămas aproape neobservată; însuşi *Cantor,* care a recenzat-o, nu i-a recunoscut însemnătatea. După 19 ani, **Bertrand Russell** (născut în 1879) a publicat *Principles of Mathematics* (1903), unde el a putut reduce toate conceptele pur matematice la un mic număr de ,,constante logice'' (concepte logice fundamentale). În această operă regăsim (în §§ 109—111), independent de *Frege,* aceeaşi definiţie a numărului pe care o dăduse *Frege.*

... Numerele se pot aplica esenţialmente la clase, aşa cum se va admite ... Numerele trebuie deci privite ca proprietăţi ale claselor. Întrebarea următoare este: în ce împrejurări două clase au acelaşi număr (adică acelaşi număr de elemente)? Răspunsul este că ele au acelaşi număr dacă elementele lor pot fi asociate unul cu altul biunivoc, aşa încît un element oarecare al uneia corespunde numai unui singur element al celeilalte ...

Am putea crede că o relaţie biunivocă nu poate fi definită decît prin referire la numărul 1. Dar nu este cazul. O relaţie este biunivocă dacă, în cazul că x şi x' au faţă de y relaţia în discuţie, atunci x şi x' sînt identice; în timp ce, dacă x are relaţia respectivă faţă de y şi y', y şi y' sînt identice. Astfel este posibil ca, fără conceptul de unitate, să definim ce înţelegem prin relaţie biunivocă...

Dacă două clase au acelaşi număr, ele sînt numite „asemenea" (similare) ... Relaţia „asemănării" dintre clase are cele trei proprietăţi: reflexivitatea, simetria şi tranzitivitatea. Adică: dacă u, v, w sînt clase, u este „asemenea" cu sine însuşi; dacă u este „asemenea" cu v, v este „asemenea" cu u; şi dacă u este „asemenea" cu v şi v este „asemenea" cu w, atunci u este „asemenea" şi cu w ... Aceste trei proprietăţi ale unei relaţii arată că dacă relaţia respectivă este valabilă între două obiecte, acestea posedă o proprietate comună şi reciproc. Noi numim această proprietate comună numărul ei. Aceasta este definiţia numărului prin abstracţie.

Dar această definiţie are un defect formal absolut fatal. Ea nu arată că numai un singur obiect satisface definiţia. În loc de a obţine o singură proprietate comună a claselor „asemenea", proprietate care ar fi numărul clasei respective, obţinem o întreagă clasă de astfel de proprietăţi fără a poseda mijloacele de a decide cîte elemente conţine această clasă ... Salvarea constă în a defini ca număr al unei clase: clasa tuturor claselor care sînt „asemenea" clasei date. Aceasta este, prin urmare, o definiţie ireproşabilă a numărului unei clase prin concepte pur logice.

3. B. Russell: Antinomiile teoriei mulţimilor şi rezolvarea lor prin teoria tipurilor logice

B. Russell a izbutit să fundamenteze întreaga matematică prin logică numai în măsura în care a reuşit să reducă toate conceptele matematice (număr, mărime continuă, funcţie etc.) la un mic număr de „constante logice" (concepte fundamentale ale logicii pure) printr-un lanț de definiții. Dimpotrivă, el nu a reușit să dea o fundamentare necontradictorie a sistemului propozițiilor teoriei mulțimilor (cu atît mai puțin a întregii matematici) prin reducere la logica pur formală. Mai degrabă el a descoperit o contradicție care a zdruncinat înseși fundamentele logicii formale, lovind de asemenea teoria mulțimilor, dezvoltată de *Frege* și *Dedekind* din logică, și făcînd-o caducă. Aceasta este antinomia clasei w a tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor înseși — punîndu-se întrebarea dacă clasa w este element al ei însăși sau nu. (Ambele posibilități duc la contradicție.)

Așa cum am văzut, *Cantor* însuși s-a izbit de contradicții chiar în teoria sa, la început „naivă", a mulțimilor: multiplicitățile atotcuprinzătoare, precum mulțimile tuturor lucrurilor, tuturor numerelor ordinale, tuturor alefurilor și altele, s-au dovedit „inconsistente". *Cantor* încercase să evite contradicțiile prin excluderea acestor mulțimi „absolut infinite". Așa cum a arătat mai tîrziu *J. v. Neumann* (ale cărui idei fundamentale le-am prezentat), se poate în fapt găsi o ieșire dînd o nouă turnură ideii lui *Cantor*. *Russell* însuși a examinat o astfel de soluție în articolul său din 1906 (*On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, în „Proceedings of the London Mathematical Society", ser. 2, vol. 4, 1907, pp. 29—53), sub titlul „*limitation of size*" (limitarea mărimii mulțimilor admisibile).

Cu toate acestea, el a luat hotărîrea chiar în Appendix B al lucrării *Principles of Mathematics* (1903) să construiască o teorie consecventă a tipurilor logice, teorie care a fost apoi realizată complet în volumul I al tratatului *Principia mathematica* (1910). Reproducem acum punctul de vedere fundamental al lui *Russell*, fără ca să putem oferi, desigur, altceva decît o indicație despre dificila teorie (totuși cu propriile sale cuvinte).

A. N. Whitehead și **B. Russell,** *Principia Mathematica*, ed., I, vol. I, Introducere, cap. I.

Teoria tipurilor logice

Principiul cercului vicios (p. 37)

O analiză a paradoxelor care trebuie evitate arată că toate provin dintr-un cerc vicios de un anumit fel. Greșelile de acest gen iau naștere din supoziția că o colecție de obiecte poate conține elemente care pot fi definite numai cu ajutorul colecției ca întreg . . .

Principiul care ne dă putința de a evita totalitățile nelegitime poate fi astfel formulat: Ceea ce implică totalitatea unei colecții nu trebuie să aparțină colecției . . . Vom numi aceasta „principiul cercului vicios", deoarece el ne dă putința de a evita greșelile de tipul cercului vicios implicate în supoziția totalităților nelegitime.

Ierarhia funcțiilor și propozițiilor logice (p. 48)

Astfel, atît prin principiul cercului vicios cît și prin intuiție directă ajungem la concluzia că funcțiile pentru care un obiect dat *a* poate fi argument nu sînt capabile să fie argumente la rîndul lor pentru aceasta și că ele nu au nici un termen comun cu funcțiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel sîntem conduși să construim o ierarhie ...

Contradicțiile (pp. 60—63)

Sîntem acum în situația de a arăta cum afectează teoria tipurilor soluția contradicțiilor care au asediat logica matematică.

(1) Cea mai veche contradicție de genul pe care îl discutăm este Epimenides („mincinosul") ... Cea mai simplă formă a acestei antinomii este dată de omul care spune: „eu mint". Dacă minte, el spune adevărul și reciproc.

(2) Fie *w* clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele. Atunci, oricare ar fi clasa *x*, propoziția „*x* este un *w*" este echivalentă cu „*x* nu este un *w*". Prin urmare, dacă dăm lui *x* valoarea *w*, atunci „*w* este un *w*" este echivalent cu „*w* nu este un *w*" (antinomia lui *Russell*).

(3) Contradicția lui *Burali-Forti*: Se poate arăta că fiecare șir bine ordonat posedă un număr ordinal, că șirul numerelor ordinale pînă la un număr ordinal dat și inclusiv orice număr ordinal dat depășește numărul ordinal dat cu 1 și că șirul tuturor numerelor ordinale este bine ordonat. Urmează de aici că șirul tuturor numerelor ordinale însuși posedă un număr ordinal *W*. Atunci însă șirul tuturor numerelor ordinale incluzînd *W* are numărul ordinal $W + 1$, care trebuie să fie mai mare ca *W*. Așadar, *W* nu este numărul ordinal al tuturor numerelor ordinale.

Toate aceste contradicții au o caracteristică comună, care se poate denumi autoreferire sau reflexivitate. Propoziția „mincinosului" trebuie să se includă ea însăși în domeniul său de referință. Dacă toate clasele, cu condiția ca ele să nu fie elemente ale lor însele, sînt elemente ale lui *W*, aceasta trebuie să se aplice și la *W*. În cazul antinomiei lui *Burali-Forti*, șirul al cărui număr ordinal provoacă dificultăți este șirul tuturor numerelor ordinale. Rămîne de arătat că totalitățile nelegitime implicate sînt excluse prin ierarhia tipurilor pe care am construit-o.

(1) Cînd un om spune „eu mint", putem interpreta afirmația sa astfel: „Există o propoziție pe care eu o afirm și care este falsă". Aceasta înseamnă că el asertează adevărul despre o anumită valoare a funcției logice „eu afirm p și p este fals". Dar am văzut cum cuvîntul „fals" este ambiguu și pentru a-l face neambiguu, trebuie să specificăm ordinul de falsitate sau, ceea ce revine la același lucru, să indicăm ordinul propoziției căreia îi corespunde falsitatea. Dacă p este o propoziție de ordinul n, o propoziție în care apare p ca variabilă aparentă nu mai este de ordinul n, ci de ordin superior. Prin urmare, felul de adevăr sau falsitate care poate aparține afirmației „există o propoziție p pe care o afirm și care are falsitate de ordinul n" este adevăr sau falsitate de un ordin superior lui n. Deci, afirmația lui Epimenides nu se referă la ea însăși și nu ia naștere nici o contradicție.

(2) Pentru a rezolva contradicția privitoare la clasa claselor care nu sînt elementele lor însele, vom presupune că o propoziție despre o clasă trebuie totdeauna să se reducă la o afirmație asupra unei funcții logice care definește clasa, adică asupra unei funcții care este satisfăcută de elementele clasei și nu de alte argumente. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcție logică și presupune o funcție ... De aceea, o clasă, după principiul cercului vicios, niciodată nu poate fi argument al funcției care o definește ... Din această cauză o clasă nu satisface funcția care o definește, dar nici aceasta nu o satisface pe ea și, de aceea, ea nu este un element al ei, nici nu este nonelement al ei însăși. Astfel, dacă x este o clasă, propoziția „x este un element al lui x" este totdeauna fără sens și de aceea expresia „clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele" nu are nici un sens.

(3) Soluția contradicției lui *Burali-Forti*: Un șir este o relație și un număr ordinal este o clasă de șiruri (ordinal „asemenea", adică izomorfe). De aceea, un șir de numere ordinale este o relație între clase de relații și este de un tip (logic) superior oricăruia din șirurile care sînt termeni ai numerelor ordinale în discuție. „Numărul ordinal al tuturor numerelor ordinale",

de care vorbeşte *Burali-Forti*, trebuie să fie numărul ordinal al tuturor numerelor ordinale de un tip dat şi, de aceea, trebuie să fie de un tip superior oricăruia dintre aceste numere ordinale. Aşadar, el nu este unul din aceste numere ordinale şi nu este nici o contradicţie în faptul că el este mai mare decît oricare dintre ele.

B. Intuiţionismul

1. L.K. Kronecker, adversar al utilizării numerelor iraţionale şi a definiţiilor nedecidabile

Atitudinea autocritică a matematicii nu este legată numai de existenţa antinomiilor logice din teoria mulţimilor. Încă în secolul al XIX-lea *Leopold Kronecker* (1823—1891) a luat o poziţie foarte radicală împotriva fundamentării analizei pe definiţia numerelor iraţionale, aşa cum au făcut *Dedekind* şi *Cantor* — pentru a nu mai vorbi de teoria mulţimilor.

Kronecker vorbeşte numai despre „aşa-numitele numere iraţionale" şi nu le consideră indispensabile pentru construcţia matematicii, ba chiar le declară inacceptabile, în cazul că se urmăreşte o fundamentare cu adevărat riguroasă. În articolul său *Despre conceptul de număr*, din 1887 (*Opere*, III, p. 253), el spune:

> Încă mai nutresc credinţa că se va reuşi cîndva ca întregul conţinut al tuturor acestor discipline matematice să se „aritmetizeze", adică să se fundamenteze exclusiv pe conceptul de număr luat în sensul cel mai restrîns, aşadar să înlăturăm modificările şi extinderile acestui concept (anume adăugarea mărimilor iraţionale, ca şi a celor continue), care au fost provocate mai ales de aplicaţiile în geometrie şi mecanică.

În alt loc (p. 272):

> Aşa-numita existenţă a rădăcinilor reale iraţionale ale ecuaţiilor algebrice are fundamentul exclusiv în existenţa intervalelor cu proprietatea indicată.

(Este vorba de acele intervale în care partea stîngă a funcţiei care formează ecuaţia algebrică îşi păstrează semnul, dacă semnele extremităţilor intervalului sînt egale şi suferă numai o singură schimbare de semn în cazul că semnele extremităţilor intervalului diferă.)

O altă observaţie critică, caracteristică a lui *Kronecker* (*Opere*, III, p. 156, obs. 1):

Însuşi conceptul *general* de şir infinit, de exemplu conceptul de şir avînd ca termeni anumite puteri ale variabilei, este, după părerea mea, acceptabil numai sub rezerva ca în fiecare caz special să se considere îndeplinite anumite supoziţii pe baza legii aritmetice de formare a termenilor şirului . . ., supoziţii care permit să se utilizeze şirurile ca expresii finite.

În sfîrşit, să citām importantele cuvinte ale lui *Kronecker* privitoare la condiţia de *decidabilitate* a definiţiilor (*Opere*, II, pp. 256—257, ,,Elementele unei teorii aritmetice am ărimilor algebrice", § 4, 1882).

Definiţia ireductibilităţii pe care am enunţat-o este lipsită de o bază sigură, atîta vreme cît nu se indică o metodă cu ajutorul căreia să se poată decide, în cazul unei funcţii date determinate, dacă această funcţie este ireductibilă sau nu în conformitate cu definiţia enunţată.

În aceste afirmaţii se caracterizează o poziţie pe care, de obicei, o numim ,,intuiţionism mai vechi".

2. Criticile lui É. Borel împotriva conceptului de funcţie discontinuă generală

Mult mai puţin radicală este poziţia unor analişti francezi din jurul anului 1900. Să citām aici un scurt pasaj din nota I de la *Lecţiile despre teoria funcţiilor* de **Émile Borel**, din 1898 (ed. a II-a, 1914, p. 109). Aici *Borel* contestă posibilitatea de a ne face o imagine clară despre o funcţie reală continuă foarte generală, din cauza unei mulţimi nenumărabile de condiţii care ar putea fi impuse unei astfel de funcţii oarecare.

În domeniul numărabilului se pare că *Borel* nu are aceleaşi obiecţii. Ulterior el a făcut distincţia între numărabilitatea efectivă a unei mulţimi şi simpla ei numărabilitate în sensul lui *Cantor*.

Despre o mulţime a cărei putere este mai mare decît puterea continuului: mulţimea F a funcţiilor discontinue de o variabilă reală, care iau numai valorile 1 şi 0

Această mulţime este definită logic ; dar mă întreb dacă avem despre ea o noţiune determinată. Putem noi în realitate să concepem o funcţie discontinuă foarte generală de o variabilă reală (chiar presupunînd că singurele valori ale funcţiei sînt 0 şi 1) ? De fapt este necesar, pentru a indica o astfel de funcţie, să dăm valoarea ei pentru toate valorile reale ale variabilei. Deoarece însă mulţimea acestor valori nu este numărabilă, este imposibil să indicăm un porcedeu care să permită să le determinăm pe toate, adică să obţinem pe oricare dintre ele după un anumit timp limitat. Se vede ce dificultate se iveşte aici ; este o dificultate de altă natură decît dificultatea analogă de la definiţia numărului iraţional general ... În realitate, chiar dacă nu putem determina numărul iraţional general la fel ca pe o mulţime numărabilă, cel puţin se pare că putem totuşi să considerăm un număr iraţional oarecare ca definit. Căci putem determina primele *n* cifre ale unei fracţii zecimale, oricare ar fi *n*, şi să facem ca *n* să crească nelimitat. Pentru o funcţie discontinuă generală de o variabilă reală nu putem face nimic asemănător, căci trebuie să indicăm valoarea sa pentru o infinitate nenumărabilă de valori ale variabilei.

3. „Neointuiţionismul“ lui L.E.J. Brouwer

(Teoria intuiţionistă a mulţimilor şi obiecţiile împotriva folosirii nelimitate a principiului logic al terţului exclus)

Doctrina numită astăzi propriu-zis „intuiţionism" — totodată denumită şi „neointuiţionism" — provine de la matematicianul olandez **L. E. J. Brouwer** (născut în 1881). Din numeroasele sale publicaţii, nu totdeauna uşor de înţeles, putem folosi aici numai unele pasaje scurte.

Ceea ce caracterizează pe *Brouwer* mai întîi de toate este respingerea principiului logic al terţului exclus atunci cînd se aplică mulţimilor infinite, apoi considerarea construcţiei ca unic mijloc de definire a mulţimilor, precum şi fundamentarea oricărei demonstraţii de existenţă şi a întregii matematici pe intuiţia originară a şirului de numere, care este privit ca dezvoltîndu-se în timp. Aceasta e în legătură cu conceptul său de „şir de alegeri", un şir nelimitat de numere care pot fi alese arbitrar, asupra cărora pot fi făcute totuşi în anumite condiţii afirmaţii matematice ; de asemenea, este în legătură cu concepţia sa despre continuu ca un mediu de liberă devenire. Demn de reţinut este şi dictonul lui *Brouwer* : „Matematica este mai mult acţiune decît teorie".

Teoria intuiţionistă a mulţimilor (1920)

Începînd din 1907, în mai multe scrieri de teorie a mulţimilor şi de filozofie am apărat următoarele două teze :

1. Că axioma comprehensiunii pe baza căreia se pot reuni într-o mulţime toate lucrurile care posedă o anumită însuşire este inacceptabilă pentru fundamentarea teoriei mulţimilor, respectiv este inutilizabilă (chiar şi în forma mai măr-

ginită dată mai tîrziu de *Zermelo*), şi că matematica trebuie neapărat să aibă la bază o definiţie constructivă a mulţimilor;

2. Că axioma, formulată de *Hilbert* în 1900, despre rezolvabilitatea oricărei probleme este echivalentă cu principiul logic al terţului exclus; prin urmare, deoarece pentru această axiomă nu există nici o raţiune suficientă, iar logica are la bază matematica şi nu invers, principiul logic al terţului exclus este un mijloc nepermis în demonstraţia matematică, căruia nu i se poate atribui decît o valoare scolastică şi euristică, astfel încît teoremele în a căror demonstraţie nu se poate evita aplicarea sa sînt lipsite de orice conţinut matematic[1].

Definiţia care stă la baza mulţimii este următoarea: O mulţime este o lege pe baza căreia, dacă un complex arbitrar de cifre din şirul 1, 2, 3, 4, 5, ... este mereu ales, fiecare din aceste alegeri produce sau un anumit semn, sau nu produce nimic, sau provoacă oprirea procesului şi desfiinţarea definitivă a rezultatului său, în care caz pentru fiecare $n > 1$ după fiecare şir necontenit de $n - 1$ alegeri poate fi indicat cel puţin un complex de cifre, care, dacă este ales ca un complex de cifre de rangul n, nu provoacă oprirea procesului. Fiecare succesiune de semne produse în acest fel de un şir nemărginit de alegeri (succesiune de semne care nu este, aşadar, în general gata reprezentabilă) se numeşte element al mulţimii. Modul comun de generare a elementelor mulţimii M se numeşte, pe scurt, mulţimea M.

---

[1] După convingerea mea, atît axioma rezolvabilităţii cît şi principiul terţului exclus sînt false şi credinţa în ele a fost generată istoriceşte prin faptul că mai întîi din matematica submulţimilor unei mulţimi finite determinate s-a abstras logica clasică, apoi acestei logici i s-a atribuit o existenţă *a priori* independentă de matematică şi, în sfîrşit, această logică pe baza pretinsei apriorităţi în mod nejust a fost aplicată la matematica mulţimilor infinite.

Pe acest concept de mulțime se bazează apoi definiția conceptului mai larg de specie matematică, care conține conceptul de mulțime ca un caz particular.

În teoria numerelor cardinale, care vor fi tratate imediat în cele ce urmează, apare mai întîi în primul plan descompunerea conceptului de echipotență. Două mulțimi sau specii echipotente pentru teoria clasică a mulțimilor, pentru teoria intuiționistă a mulțimilor pot fi echipotente, semiechipotente, echivalente, de sferă egală, de întindere egală sau de aceeași pondere. În legătură cu aceasta există, printre mulțimile sau speciile numărabile în teoria clasică, mulțimi, respectiv specii, care pentru teoria intuiționistă sînt numărabil infinite, numărabile, recenzabile, enumerabile pînă la epuizare, numărabile element cu element și numărabile în continuu. Numerele cardinale $\mathfrak{a}$ și $\mathfrak{c}$ se mențin; în schimb, exemplul de număr cardinal $> \mathfrak{c}$, dat în teoria clasică pentru mulțimea tuturor funcțiilor de o variabilă, nu mai este valabil.

În teoria mulțimilor bine ordonate, mai întîi de toate cele două proprietăți principale conform cărora mulțimile bine ordonate se pot compara două cîte două și fiecare submulțime a unei mulțimi bine ordonate posedă un prim element (proprietăți care formează cele mai importante mijloace de demonstrație în teoria clasică) trebuie să fie abandonate; ca urmare, noua teorie constructivă care trebuie edificată aici nu mai are aproape nici o asemănare cu predecesoarea sa, nici exterioară, nici interioară. În locul celei de-a doua proprietăți principale teoria constructivă aduce următoarea teoremă:

O lege care determină un element într-o specie bine ordonată și care asociază fiecărui element deja determinat fie oprirea procesului, fie un element care îi premerge, determină sigur un element căruia această lege îi asociază oprirea procesului.

Asupra semnificației principiului terțului exclus în matematică, îndeosebi în teoria funcțiilor (1925)

În cadrul unui anumit „sistem principal" finit, proprietățile sistemelor, adică posibilitățile de aplicare a sistemelor pe alte sisteme cu corespondențe precise între elemente, pot fi totdeauna verificate (adică sau demonstrate, sau reduse la absurd); aplicația datorată proprietății corespunzătoare posedă anume în fiecare caz numai un număr finit de posibilități de efectuare, dintre care fiecare poate fi efectuată în sine și continuată fie pînă la terminare, fie pînă la oprire. (Aici principiul inducției matematice furnizează adesea mijlocul de a se efectua astfel de verificări fără a considera individual fiecare element care participă la aplicație, respectiv fiecare posibilitate de efectuare existentă a aplicației ; în consecință, verificarea poate decurge cîteodată relativ repede chiar pentru sisteme cu un mare număr de elemente.)

Pe baza verificabilității de mai sus, pentru proprietățile concepute înăuntrul unui anumit sistem finit este valabil principiul terțului exclus, adică principiul că fiecare proprietate este pentru fiecare sistem sau adevărată sau imposibilă, și îndeosebi principiul reciprocității speciilor complementare, adică principiul conform căruia, pentru fiecare sistem, din imposibilitatea imposibilității unei proprietăți decurge validitatea acestei proprietăți.

Pentru proprietățile deduse înăuntrul unui anumit sistem principal finit cu ajutorul principiului terțului exclus, există totdeauna siguranța că se poate ajunge la confirmarea lor empirică atunci cînd se dispune de un interval de timp suficient.

Acum avem fenomenul natural conform căruia numeroase obiecte și mecanisme ale lumii intuiției pot fi dominate în raport cu întinse complexe de fapte și evenimente, considerîndu-le ca sisteme finite discrete (eventual parțial necunoscute), legate în privința anumitor părți cunoscute de anumite legi corelate în timp. În consecință, la aceste obiecte și mecanisme se pot aplica legile logicii teoretice, inclusiv principiul terțului exclus, relativ la complexele corespunzătoare de fapte și evenimente, deși o confirmare empirică completă a raționamentelor deduse aici este de cele mai multe ori *a priori* exclusă din punct de vedere material, iar la deducțiile cu implicații în timp (juristice și altele) nu poate fi vorba nici măcar de o confirmare parțială. Probabil că atît acestei verificabilități incomplete a raționamentelor considerate, totuși nu mai puțin foarte valabile, cît și necunoașterii parțiale a sistemelor finite de reprezentat, precum și împrejurării că logica teoretică a fost aplicată la aceste obiecte materiale mai des și de mai mulți decît la obiectele matematice, trebuie să-i atribuim faptul că legilor logicii teoretice, inclusiv principiului terțului exclus, li s-a acordat un caracter aprioric și că s-au pierdut din vedere condițiile aplicabilității puse în proiectarea unui sistem discret finit asupra obiectelor respective, astfel încît s-a putut ajunge ca pentru activitatea intelectuală absolut primară și autonomă, pe care o reprezintă matematica sistemelor finite, să se caute o justificare mai adîncă în legile logice. În consecință, apariția unei contradicții, atunci cînd lumea intuiției a fost tratată logic, nu a dus niciodată la o îndoială în privința imuabilității legilor logice, ci numai la modificarea și completarea fragmentelor matematice proiectate pe lumea intuiției.

Consecința caracterului aprioric, atribuit legilor logicii teoretice, a fost că pînă de curînd aceste legi, inclusiv legea terțului exclus, au fost aplicate fără precauții și în matematica sistemelor infinite, și, în plus, nimeni nu s-a lăsat tulburat de aprecierea că rezultatele obținute pe această cale în general nu sînt mai accesibile unei verificări empirice nici din punct de vedere teoretic, nici din punct de vedere practic. Pe această bază s-au constituit vaste teorii false, îndeosebi în ultima jumătate de secol. Contradicțiile, de care ne-am lovit de repetate ori, au chemat la viață critica formalistă, o critică care, în esența ei, se reduce la aceea că limbajul care însoțește gîndirea matematică activă este supus unui studiu matematic. Unui astfel de studiu se supun legile logicii teoretice ca operatori care acționează asupra formulelor fundamentale sau axiomelor, și unii își propun ca scop să transforme aceste axiome astfel încît influența lingvistică a operatorilor amintiți (care rămîn invariabili) să nu mai poată fi tulburată prin apariția figurii lingvistice a contradicției. În ce privește atingerea acestui scop nu trebuie să avem nici o îndoială, dar prin aceasta nu se dobîndește nici o valoare matematică: o teorie necorectă, care nu poate fi oprită prin vreo contradicție refutabilă, nu este mai puțin necorectă, tot așa cum o politică criminală care nu poate fi oprită prin vreo justiție punitivă nu este mai puțin criminală.

Considerații intuiționiste asupra formalismului (1928)

§ 1

Deosebirile relative la validitate dintre noua fundamentare formalistă și noua construcție intuiționistă a matematicii vor fi înlăturate și alegerea dintre cele două activități se va reduce la o chestiune de gust îndată ce următoarele idei (*Einsichten*), referitoare în primul rînd la formalism dar formulate mai întîi în literatura intuiţionistă, vor reuşi să se impună în general. Acest lucru este numai o chestiune de timp, pentru că este vorba de pure rezultate ale reflecţiei, care nu conţin nici un element discutabil şi pe care orice om care le-a înţeles o dată trebuie să le ia ca un credo. Dintre cele patru idei, pînă acum numai două şi-au atras în literatura formalistă înţelegerea şi recunoaşterea. Cînd şi celelalte două vor fi în aceeaşi situaţie, aceasta va însemna sfîrşitul polemicii fundamentelor în matematică.

Prima idee. Separarea între eforturile formaliste pentru construcţia „stocului de formule matematice" (a tabloului formalist al matematicii) şi o teorie intuitivă (concretă) a legilor acestei construcţii, precum şi recunoaşterea faptului că pentru această din urmă teorie matematica intuiţionistă a mulţimii numerelor naturale este indispensabilă.

A doua idee. Eliminarea aplicării negîndite a principiului logic al terţului exclus, precum şi recunoaşterea a două fapte: întîi, că cercetarea temeiului justificativ şi a domeniului de valabilitate a principiului amintit constituie un obiect esenţial al cercetării fundamentelor matematice, şi, în al doilea rînd, că acest domeniu de valabilitate cuprinde în matematica intuitivă (de conţinut) numai sistemele finite.

A treia idee. Identificarea principiului terţului exclus cu principiul rezolvabilităţii oricărei probleme matematice.

A patra idee. Recunoaşterea faptului că justificarea (de conţinut) a matematicii formaliste prin demonstraţia necontradicţiei sale conţine un cerc vicios, pentru că această justificare se bazează pe validitatea (concretă) a afirmaţiei că din necontradicţia unei propoziţii decurge validitatea acestei propoziţii, adică se bazează pe validitatea (concretă) a principiului terţului exclus.

4. Logica lui Brouwer ca un „calcul al problemelor". Interpretarea lui A. Kolmogorov

A. Kolmogorov a formulat logica lui *Brouwer*, care trebuie să fie independentă de principiul terţului exclus, ca un „calcul al problemelor". În cele ce urmează vom reproduce pasajul fundamental al acestei formulări. În loc de „problemă" putem spune şi „speranţă" (*Heyting*) sau, foarte general, „intenţia neîmplinită în sens fenomenologic" (*E. Husserl*).

Alături de logica teoretică, care sistematizează schemele de demonstraţie ale adevărurilor teoretice, se pot sistematiza schemele de rezolvări ale problemelor, de exemplu ale problemelor de construcţii geometrice. Corespunzător principiului silogismului aici apare, de exemplu, următorul principiu: dacă vrem să reducem soluţia lui b la soluţia lui a şi soluţia lui c la soluţia lui b, atunci putem să reducem soluţia lui c la soluţia lui a.

Astfel obţinem alături de logica teoretică un nou „calcul al problemelor". Există atunci următorul fapt curios: după formă, calculul problemelor coincide cu logica intuiţionistă a lui *Brouwer* (formalizată de *Heyting*).

Dacă a şi b sînt probleme, atunci $a\&b$ înseamnă problema de „a rezolva ambele probleme a şi b", în timp ce aVb înseamnă problema de „a rezolva cel puţin una din problemele a şi b". Mai departe, aCb este problema ca „admiţînd că soluţia lui a este dată, să se rezolve b" sau ca „soluţia lui b să se reducă la soluţia lui a".

N-am presupus că fiecare problemă este rezolvabilă. De aceea, a înseamnă problema: „presupunînd că soluţia lui a este dată, obţinem o contradicţie".

După aceste definiţii, dacă $a, b, c, d, \ldots$ sînt probleme, fiecare formulă $p(a, b, c, \ldots)$ compusă cu ajutorul semnelor $\&$, V, C, —[1] înseamnă tot o problemă. Dacă x este o variabilă şi $a(x)$ înseamnă o problemă, al cărei sens depinde de valoarea lui x, atunci $(x)\ a(x)$[2] înseamnă problema: „a indica o metodă generală pentru rezolvarea lui $a(x)$ pentru fiecare valoare particulară a lui x". $(a)\ (b)\ (c)\ p(a, b, c)$[2] înseamnă problema: „a indica o metodă generală pentru rezolvarea lui $p(a, b, c)$ la fiecare alegere în parte a problemelor a, b, c".

Scopul propriu-zis al calculului problemelor constă în a indica o metodă pentru rezolvarea problemelor de forma $(a)\ (b)\ (c)\ p(a, b, c)$ prin aplicarea mecanică a unor reguli de calcul. Pentru ca totul să se reducă la aceste reguli de calcul trebuie însă să presupunem că soluţiile unor probleme elementare sînt deja cunoscute. Acceptăm ca postulate că noi am rezolvat deja următoarele două grupe de probleme A şi B.

(Urmează axiomele şi regulile de raţionament ale lui *Brouwer—Heyting.*)

---

[1] Adică „şi", „sau", cu „condiţia" („implică"), „nu".

[2] Adică „pentru toţi x : $a(x)$", respectiv „pentru toţi a, b, c : $p(a, b, c)$".

Se arată acum că toate axiomele şi regulile intuiţioniste pot fi interpretate cu sens deplin în „calculul problemelor", nu însă şi principiul terţului exclus. Acesta ar suna astfel: a găsi o metodă generală ca pentru fiecare problemă sau să găsim o soluţie, sau să deducem o contradicţie din faptul că se dă o soluţie.

5. H. Weyl despre „Criza fundamentelor matematicii". (Semiintuiţionismul şi intuiţionismul)

Hermann Weyl (născut în 1885) a expus neointuiţionismul într-o formă mai liberă şi mai uşor de înţeles decît însuşi întemeietorul, *Brouwer*. În plus, el a dat în scrierea sa *Continuul* (Leipzig, 1918) o nouă fundamentare a analizei, care a fost desemnată ca „semiintuiţionistă". Aici el recunoaşte „*tertium non datur*" pentru domeniul aritmeticii pure (care tratează numai despre numere întregi), însă cere pentru disciplinele care o depăşesc, adică analiza şi teoria mulţimilor, o structurare constructivă.

Într-o lucrare ulterioară, *Asupra noii crize a fundamentelor matematicii*, din anul 1921, *Weyl* reproduce în prima parte acest punct de vedere semiintuiţionist, străduindu-se să evite „cercul vicios în analiză". În partea a doua, dimpotrivă, el se situează pe poziţia intuiţionismului radical al lui *Brouwer*, deşi într-o formă ceva mai liberă.

Părţile esenţiale ale acestui articol sînt reproduse textual, abstracţie făcînd de aplicarea tehnică a ideilor fundamentale.

I. Concepţia atomistă a continuului

1. Cercul vicios

Pornim împreună cu *Dedekind* de la sistemul numerelor raţionale şi vrem să caracterizăm numărul real particular α prin mulţimea numerelor raţionale mai mici decît α. Explicăm numărul real ca o mulţime de numere raţionale care posedă „proprietatea secţionării" (*Abschnitts-Eigenschaft*) de a conţine ca elemente o dată cu fiecare număr raţional x şi toate numerele raţionale mai mici ca x. Aceste mulţimi sînt mulţimi infinite şi o mulţime infinită niciodată nu poate fi altfel dată decît enunţînd o proprietate caracteristică pentru elementele mulţimii. Însă proprietăţile numerelor raţionale se construiesc pe cale pur logică, pornind de la proprietăţile şi relaţiile iniţiale care stau la baza operării cu numere raționale. Se pot considera ca atare:

proprietatea: x este pozitiv;
relația $x + y = z$;
relația $x \cdot y = z$.

Dacă de la numerele raționale ne întoarcem la cele naturale, singura relație fundamentală, cu ajutorul căreia toate celelalte trebuie definite pur logic, este aceea în care rezidă esența propriu-zisă a numerelor naturale; între două numere n și n' această relație există atunci și numai atunci cînd n' este numărul imediat următor după n. La fel geometria lui *Euclid* pleacă de la trei categorii fundamentale de obiecte: punct, dreaptă și plan și de la cîteva puține relații „inițiale" dintre ele, care trebuie extrase din intuiție („punctul este situat pe dreaptă" etc.), despre care este vorba în axiome. Toate celelalte concepte, îndeosebi toate proprietățile punctelor, dreptelor și planelor și toate relațiile dintre ele trebuie explicate logic cu ajutorul acelor relații inițiale.

Proprietăților numerelor raționale le corespund mulțimile, astfel încît două proprietăți E și E' determină aceeași mulțime în anumite împrejurări, chiar și atunci cînd ele însele sînt obținute prin diferite construcții din proprietățile și relațiile inițiale; anume atunci cînd ambele proprietăți au aceeași sferă, adică atunci cînd orice număr rațional care posedă o proprietate se bucură și de cealaltă și invers. Pentru identitatea a două mulțimi determinate prin cîte o proprietate hotărîtor nu este deci sensul proprietăților, ci concordanța lor obiectivă (în „sferă"), care nu poate fi dedusă pur logic din definiție, ci poate fi stabilită numai pe temeiul cunoștințelor obiective. Natural că în sine este indiferent dacă ne folosim de cuvîntul „mulțime" sau „proprietate". Numai că trebuie să ne ferim cu totul de ideea că, atunci cînd se definește o mulțime infinită nu numai că s-ar cunoaște proprietatea caracteristică elementelor ei, dar că aceste elemente s-ar afla, ca să zicem așa, întinse în fața noastră și ar urma numai să fie parcurse unul după altul, așa cum face un funcționar cu registrele sale la biroul populației pentru a afla dacă un element de cutare sau cutare fel există în mulțime. Față de o mulțime infinită, acest lucru este fără sens.

În analiză noi considerăm nu numai numere reale particulare, ci și mulțimi de numere reale și corespondențe între ele. Un număr real este dat, conform explicației noastre, printr-o proprietate a numerelor raționale, în consecință o mulțime de numere reale este dată printr-o proprietate A a proprietăților numerelor raționale. Este ușor să formezi astfel de „proprietăți de proprietăți". Un exemplu este următoarea definiție: o proprietate a numerelor raționale se numește de spețа A dacă ea convine numerelor > 1 (A corespunde „mulțimii tuturor numerelor reale > 1"). Să studiem acum construcția limitei superioare a unei mulțimi A oarecare de numere reale! Limita, un număr real, este dată printr-o proprietate E_A a numerelor raționale, și anume E_A este enunțată în felul următor: ea se atribuie unui număr rațional x dacă și numai dacă există o proprietate E de genul A care se atribuie numărului x (cînd există un număr real E în mulțimea A, față de care x este inferior). Acest enunț însă, dacă trebuie să aibă un sens, se bazează nu numai pe faptul că noțiunea de proprietate a numerelor raționale este în sine un concept clar și neechivoc, dar că și conceptul „tuturor" proprietăților „posibile" este în sine determinat și mărginit, susceptibil de a fi cunoscut în principiu; căci acest enunț se bazează pe faptul că întrebarea: „există o proprietate E de o anumită natură?" (anume o atare proprietate care în același timp este de genul A și este atribuită numărului x) are un sens, se referă la un conținut obiectiv existent în sine, conținut care răspunde la întrebare cu da sau nu. Evident, nu acesta este cazul. Căci să zicem că am reușit într-un fel oarecare să conturăm un cerc mărginit și determinat în sine al proprietăților numerelor raționale (le voi numi k-proprietăți) și fie A o proprietate a proprietăților — ca mai sus; atunci întrebarea, în legătură cu un număr rațional oarecare x, dacă există o k-proprietate de genul A atribuită numărului x are un înțeles clar. Dacă așa stau lucrurile, îi vom atribui numărului proprietatea E_A, în caz contrar i-o vom refuza. Este însă acum foarte limpede că această proprietate E_A (definită chiar pe baza totalității tuturor k-proprietăților) se află, prin sensul său în afara cercului k. Aici se vădește că noțiunea „proprietatea numerelor raționale", după cum mă voi exprima, nu este definită în ce privește sfera și că definiția limitei superioare dată de noi conține un cerc vicios. Natural, nu este exclus ca proprietatea E_A să aibă aceeași sferă cu o k-proprietate. Pentru a da un sens clar propoziției despre existența limitei superioare a oricărei mulțimi de numere reale şi a-i asigura veracitatea, ar fi nevoie de următorul lucru: ar trebui construită o totalitate, delimitată şi determinată în sine, de proprietăţi „*k*-proprietăţi", pentru care să fie valabilă prin demonstraţie propoziţia că o proprietate E_A, construită, după schema de mai sus, din totalitatea celor *k*-proprietăţi, are totdeauna aceeaşi sferă cu o anumită *k*-proprietate. Acest lucru nu s-a încercat niciodată; nu există nici cel mai slab indiciu că o astfel de construcţie este posibilă; ea este din capul locului extrem de neplauzibilă, încît nimănui nu i-ar putea trece prin cap — în mod raţional — să caute acest lucru.

Concepţia pe care am dobîndit-o, o fixăm cu următoarele cuvinte, fără a intra într-o analiză epistemologică mai adîncă. Sensul unui concept al unui obiect stabilit clar şi neechivoc poate indica totdeauna sfera de existenţă a obiectelor de natura celor exprimate în concept; însă în nici un caz nu rezultă de aici că acesta este un concept cu sfera definită, nici că are sens să vorbim despre obiectele existente care-i sînt subsumate ca unei totalităţi închise determinate în sine şi delimitate. Aceasta şi din cauză că aici mai apare şi ideea, cu totul nouă, a existării, a existenţei concrete, în timp ce conceptul tratează numai despre o esenţă, o existenţă ideală. Pentru a ajunge la această supoziţie pare să fi exercitat o seducţie numai exemplul lucrului real, în sensul lumii reale externe, în care oamenii cred ca într-o lume existentă în sine şi determinată în sine prin natura sa. Dacă E este o proprietate dată a obiectelor din sfera unui concept B al cărei sens este clar şi neechivoc, atunci propoziţia „x are proprietatea E" afirmă pentru un obiect arbitrar x un anumit conţinut obiectiv care există sau nu există; judecata este în sine adevărată sau nu — fără schimbări şi şovăieli şi fără posibilitatea unui punct de vedere intermediar între acestea două opuse. Dacă noţiunea B este definită ca sferă îndeosebi, atunci nu numai întrebarea „are x proprietatea E?" pentru un obiect x oarecare din sfera lui B are un sens clar şi neechivoc în sine, dar şi întrebarea de existenţă „există un obiect din sfera lui B care posedă proprietatea E?" Sprijiniţi pe procesul dat nouă în intuiţie, de creaţie a numerelor naturale, susţinem că noţiunea de număr natural este definită ca sferă; la fel stau lucrurile şi cu numerele raţionale. Însă conceptele „obiect", „proprietatea numerelor naturale" şi altele asemenea nu sînt, desigur, definite ca sferă. Este recomandabil însă să nu se formeze convingerea despre aceste lucruri numai prin reflecţiile expuse mai sus, ci să se înțeleagă acest fapt prin intuiție directă.

2. Construcția

Enunțurile existențiale relative la numerele reale și, putem adăuga, enunțurile generale relative la acestea, (ele pot fi explicate ca judecăți de existență negative) dobîndesc un sens, așa cum am văzut, numai atunci cînd limităm conceptul, nelimitat și cu sferă vagă, de ,,proprietăți ale numerelor raționale'' la conceptul, definit ca sferă, de ,,*k*-proprietăți''. Cum se poate întîmpla acest lucru? Răspunsul la această întrebare ni-l dă o privire asupra procesului constructiv al matematicii. Am spus deja mai înainte că toate proprietățile și relațiile (putem socoti totdeauna proprietățile ca relații, ele sînt relații cu o singură variabilă (*Unbestimmte*)) sînt construite, pe cale pur logică, din puține relații inițiale. Construcția are loc cu ajutorul cîtorva principii logice de construcție, principii care sînt conținute în cuvintele ,,nu'', ,,și'', ,,sau'', ,,există'' și care ne învață cum se deduce o nouă relație din una sau două relații deja construite. În domeniul relațiilor ele joacă același rol ca cele patru operații din domeniul numerelor raționale, care permit, prin însăși repetarea lor în număr și combinații arbitrare, să se producă toate numerele raționale începînd de la numărul 1. Principiile de construcție reglează geneza proprietăților și relațiilor, ele definesc în mod genetic conceptul definit ca sferă al *k*-proprietăților și *k*-relațiilor. A fost însă destinul analizei de pînă acum ca ea să folosească la fiecare pas între principiile ei de construcție și următorul principiu: Dacă A este o proprietate a proprietăților, atunci de aici să se producă proprietatea E_A, care se atribuie unui număr rațional x, dacă și numai dacă cu ajutorul principiilor de construcție (îndeosebi al acestui principiu însuși) se poate forma o proprietate de genul A, care se atribuie numărului x. O astfel de regulă, ca principiu de construcție, este însă, desigur, lipsită de sens; cît este de vicios cercul se vede imediat.

Ca tabloul să nu rămînă prea vag, vreau să caracterizez pe scurt aici principiile de definiție neafectate de cerc vicios care mai rămîn.

1. Identificarea mai multor variabile;
2. Negația;
3. Legarea a două relații prin și;

4. Legarea a două relații prin sau;
5. Înlocuirea unei variabile printr-un obiect dat;
6. Înlocuirea unei variabile prin „există".

În toate părțile matematicii găsim că o nouă creare de proprietăți și relații are loc prin aplicarea combinată a acestor principii. Din momentul în care însă teoria mulțimilor începe să joace un rol, ele nu mai sînt suficiente; aceasta se bazează pe faptul că ea privește și proprietățile și relațiile ca obiecte între care pot exista noi relații; ea formează mulțimi, mulțimi de mulțimi etc. Relațiile pot apărea ca „argumente" în alte relații tot așa de bine ca obiectele inițiale ... Dacă luăm ca punct de plecare în construcția analizei prima bază, numerele naturale, atunci procedeul de urmat este următorul: avem numerele naturale ca singura categorie fundamentală de obiecte; în continuare, avem relații unare, binare, ternare, ... între acestea. Pe toate le numim relații de prima treaptă; categoria căreia îi aparține o astfel de relație este complet caracterizată prin numărul variabilelor care intră în ea: Relațiile de treapta a doua sînt relații ale căror variabile sînt în parte numere naturale arbitrare, în parte relații arbitrare de treapta întîi. Categoria căreia îi aparține o astfel de relație de treapta a doua este stabilită prin numărul variabilelor sale și prin categoriile de obiecte la care se referă fiecare dintre variabilele sale. Relațiile de treapta a treia sînt acelea în care apar relații nedeterminate de treapta a doua etc. [Fiecărei categorii K de relații îi corespunde o relație $\varepsilon(x, x', \ldots ; X)$, care înseamnă: $x, x' \ldots$ se află între ele în relația X. X este aici o relație nedeterminată a categoriei K, variabilele $x, x' \ldots$ se referă la aceleași categorii de obiecte ca variabilele relației X ale categoriei K. Aceste relații ε le folosim alături de relația de prima treaptă F ca material inițial]. Construcția se efectuează cu ajutorul principiilor indicate mai sus. Dintre ele principiile 1—4 sînt aplicabile nelimitat. Principiul al cincilea, dacă prin mijlocirea lui este înlocuită o relație nedeterminată într-o relație de treaptă superioară, trebuie interpretat astfel încît relația folosită pentru înlocuire trebuie și ea, la rîndul ei, să fie construită cu ajutorul principiilor de construcție ... În fine, principiul al șaselea, adică înlocuirea prin „există", poate fi aplicat numai la argumentele numerice, niciodată la argumente care sînt ele înseși relații de o treaptă oarecare; altfel am ajunge la absurdități. Introducerea lui ε ar rămîne însă fără nici o valoare dacă principiului al cincilea de substituție lărgit, avînd efect pentru relații în punerea argumentului, nu i s-ar adăuga un principiu al iterației... Definițiile de concepte și efectuările de demonstrații în felul teoriei dedekindiene a șirurilor participă la cercul vicios arătat; de aceea nu sîntem în stare să reducem definiția prin inducție completă la ceva mai primitiv. Șirul numerelor naturale și intuiția iterației care rezidă în el reprezintă un ultim fundament al gîndirii matematice. În principiul nostru de iterație se exprimă semnificația sa principială pentru construcția întregii matematici.

Relațiile care pot fi dobîndite printr-o repetiție și combinație arbitrară a principiilor de construcție indicate, în special relațiile de prima treaptă dintre numerele naturale de acest fel, eu le denumesc relații definite sau *k*-relații. Aceasta este limitarea definită ca sferă a conceptului de relație de la care am plecat. În raport cu acest cerc mărginit din punct de vedere genetic, întrebarea dacă există o *k*-relație de cutare fel are un sens foarte clar. Numerele reale corespund proprietăților definite ale numerelor raționale (în măsura în care participă la proprietatea secționării). Problemele de existență a numerelor reale capătă sens numai dacă înțelegem conceptul în acel mod care determină și delimitează sfera sa. Prin această îngrădire a conceptului, din pasta fluentă a continuului — ca să zicem așa — se extrage o grămadă de puncte individuale. Continuul este fărîmițat în elemente izolate, iar contopirea tuturor părților sale este înlocuită prin anumite relații conceptuale bazate pe „mai mare — mai mic" între aceste elemente izolate. De aceea eu vorbesc despre o concepție atomistică a continuului. Așa a procedat chiar și analiza recunoscută azi. Dar ea a împrumutat de la intuiția continuului convingerea despre „existența în sine" a tuturor numerelor reale și astfel n-a observat că posibilitățile de a separa din continuu numere reale izolate nu formează o totalitate cu sfera definită. Ea a fost deci o „teorie instabilă", care a oscilat între intuiție (fals interpretată) și construcția logico-aritmetică. Teoria care a fost prezentată aici izvorăște numai din faptul că se situează cu hotărîre și fără compromis pe ultima poziție, de a desăvîrși strict consecvent concepția atomistă. — Dacă eu înțeleg prin „număr *euclidian*" un număr care poate fi obținut începînd cu 1 aplicînd în combinații arbitrare cele patru operații fundamentale, iar ca a cincea operație extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr pozitiv deja obținut, atunci, potrivit unei observații ocazionale a lui *Dedekind*, sistemul numerelor *euclidiene* cu sfera definită este suficient pentru ca în interiorul său să efectuăm toate construcțiile geometriei *euclidiene*. Așadar, dacă facem geometrie *euclidiană*, ne putem limita la sistemul de puncte ale căror coordonate sînt numere *euclidiene*; „sosul spațial", continuu turnat între ele, nu apare; acel sistem ne furnizează un cîmp de construcție determinat în sine și mărginit, dincolo de care nu ne conduce nici o operație a geometriei euclidiene. Punînd la bază în loc de cele patru operații și de operația rădăcinii pătrate alte principii logice de construcție în număr mic, am reușit aici să creăm un sistem de numere definit ca sferă, înăuntrul căruia se pot efectua nelimitat nu numai construcțiile geometriei *euclidiene*, ci construcțiile mult mai generale ale analizei (în măsura în care nu poartă stigmatul de cerc vicios). Îndeosebi principiul *Cauchy* de convergență este valabil în interiorul acestui „sistem *Weyl* de numere" și, de asemenea, este valabilă și propoziția că o funcție continuă ia toate valorile intermediare; natural, pentru atare funcții și șiruri de numere construite chiar cu ajutorul principiilor noastre de construcție... Niciodată n-am fost de părere că un continuu dat în intuiție este un sistem *Weyl* de numere; mai degrabă sînt de părere că analiza are nevoie pur și simplu de un astfel de sistem pentru construcțiile ei și nu trebuie să se îngrijească de „continuul" turnat între ele. Principiile logice de construcție nu sînt inventate artificial; ele au în orice caz un caracter mult mai natural decît cele cinci operații cu ajutorul cărora se obține sistemul *euclidian* al numerelor. Ele nu servesc numai la construcția numerelor reale înseși, ci și a mulțimilor de puncte și funcțiilor de variabile reale. Aici, de asemenea, operațiile algebrico-analitice (niciodată formulate exact și concepute în permanență în fluxul dezvoltării), cu ajutorul cărora analiza secolelor XVII și XVIII și-a construit funcțiile, trebuie înlocuite, de dragul generalității, prin operații pur logice. Totuși sîntem nevoiți să ne mărginim la un cerc de funcții și mulțimi dobîndite cu ajutorul acestor principii de construcție, nelăsînd conceptului acea generalitate cu contur vag, obișnuită azi, dacă judecățile existențiale și universale asupra mulțimilor și funcțiilor trebuie să-și păstreze un sens.

Cîteva consecințe ale acestei doctrine au fost atinse deja mai înainte. Am menționat că principiul *Cauchy* de convergență pentru șiruri de numere își păstrează legitimitatea; la fel principalele propoziții despre funcții continue. Dimpotrivă, propoziția că o mulțime de puncte mărginită posedă totdeauna o margine superioară precisă trebuie abandonată și nu este de loc necesar să ne gîndim la salvarea în vreun fel a „principiului lui *Dirichlet*".

II. Continuul ca mediu al devenirii libere

1. Idei fundamentale

Începem din nou și de astă dată pornim de la o altă concepție despre numerele reale, care exprimă esența lor într-un mod mai pur. Dacă un număr real α este cunoscut pînă la zecimala de ordinul h cu o eroare mai mică decît $\pm$ 1 din zecimala de ordinul h, prin aceasta se dă un interval conținînd în interiorul său numărul α, interval care se întinde de la un număr $(m - 1)/10^h$ pînă la numărul $(m + 1)/10^h$; aici m este un anumit număr întreg. Dacă pentru simplitate matematică înlocuim fracțiile zecimale prin fracții duale, atunci vom pune la baza definiției numerelor reale „intervalul dual" de forma

$$\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right),$$

unde m și h sînt numere întregi oarecare. Se consemnează îndeosebi un interval „de treapta h". Intervalele duale de treapta h se încalecă unele peste altele; trebuie să folosim aceste intervale care se acoperă și nu pe acelea în care dreapta numerelor este descompusă prin puncte de forma $m/2^h$, pentru ca totdeauna cînd este dat un număr real cu un anumit grad de precizie (depinzînd de h), să poată fi indicat unul dintre intervalele de treapta h în care se găsește neapărat numărul. Conceptul de număr real, ca număr dat numai aproximativ, gradul aproximării putînd fi împins peste orice limită urmează să fie astfel simplu formulat: un număr real este un șir infinit de intervale duale $i, i', i'',\ldots$ astfel încît fiecare interval al acestui șir conține pe cel imediat următor în întregime în interiorul său. Deoarece fiecare dintre intervalele duale poate fi caracterizat prin două caractere exprimate în numere întregi (m și h în notația de mai înainte) și întrucît faptul că un interval este conținut în altul se exprimă printr-o relaţie simplă între aceste caractere ale lor, am obţine numai o simplificare neesenţială a reflecţiilor noastre dacă am considera în primul rînd şirurile de numere naturale nesupuse nici unei limitări în loc de şirurile intervalelor duale incluse unul în altul.

Dificultatea rezidă în conceptul de şir. Dacă, în genere, analiza de astăzi are la bază un punct de vedere din care enunţurile şi demonstraţiile ei se pot înţelege, acesta este următorul: şirul ia naştere prin faptul că numere particulare sînt alese succesiv în mod arbitrar; rezultatul acestor infinit de multe acte de alegere îl avem deja gata în faţă şi în privinţa şirului infinit terminat, eu pot să întreb, de pildă, dacă între numerele sale apare 1. Dar acest punct de vedere este împotriva bunului-simţ şi nu se poate susţine deoarece prin esenţa sa infinitul este inepuizabil. Un şir particular determinat (şi determinat la infinit) poate fi definit numai printr-o lege. Dacă, dimpotrivă, un şir ia naştere treptat prin acte libere de alegere, el va fi considerat ca ceva în devenire şi numai acele proprietăţi ale unui şir de alegeri în devenire pot fi enunţate cu sens deplin pentru care se decide ,,da sau nu'' (convine şirului proprietatea sau nu convine), dacă se ajunge pînă la un anumit punct al şirului fără ca dezvoltarea şirului dincolo de acest punct al devenirii, chiar dacă s-ar putea face, să mai poată zdruncina decizia. Astfel noi putem întreba în legătură cu un şir de alegeri dacă în el în al patrulea loc apare numărul 1, dar nu putem întreba dacă în el nu apare în genere numărul 1. Faptul că şiruri de numere dezvoltate prin acte libere de alegere este un obiect posibil de definiţie matematică constituie un prim principiu de cunoaştere al lui *Brouwer*. Dacă legea φ, care determină un şir pînă la infinit, reprezintă numărul real particular, tot astfel şirul de alegeri, nelimitat de nici o lege în libertatea de a se dezvolta, reprezintă continuul. Ceea ce dovedeşte îndeajuns că este posibil să se opereze matematic cu şiruri de alegeri este faptul că se pot stabili asocieri între şirurile de alegeri. De pildă, formula

$$n_h = m_1 + m_2 + \cdots + m_h$$

conţine o lege conform căreia un şir, care se formează prin acte de alegere liberă, $m_1, m_2, m_3, \ldots$ produce un şir de numere în devenire $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Mai general, la aceasta poate servi orice lege conform căreia într-un şir în devenire de numere naturale, orice alegere care îi adaugă un nou element produce un număr determinat. Numărul produs, de pildă, în pasul de ordinul *h*, va depinde în general nu numai de alegerea făcută la pasul de ordinul *h*, ci de întreaga porţiune din şirul de alegeri terminată în acest moment, de la primul element pînă la elementul de ordinul *h*. (Aici dezvoltarea şirului, apărînd ca valoare a funcţiei, ţine pasul egal cu dezvoltarea şirului argumentului: dacă acesta înaintează cu o poziţie atunci şi celălalt înaintează la fel) ... Observaţia lui *Brouwer* este simplă, dar profundă: aici ia naştere un „continuu" care cuprinde numerele reale particulare, dar care nu se dizolvă absolut de loc într-o mulţime de numere reale gata existente, ci este mai curînd un mediu de devenire liberă.

Ne aflăm într-un domeniu al unei străvechi probleme de gîndire, al problemei continuităţii, schimbării şi devenirii... De multă vreme stau faţă în faţă o concepţie atomistă, care îşi imaginează continuul ca existînd din puncte izolate, şi o altă concepţie, care consideră ca imposibil de conceput în acest fel fluxul continuu. Prima concepţie are un sistem de elemente existente inteligibil din punct de vedere conceptual, dar nu este în stare să explice mişcarea şi acţiunea: ea trebuie să degradeze orice schimbare la rangul de aparenţă. Celei de a doua concepţii nu i-a reuşit din antichitate pînă la *Galilei* să se ridice din sfera intuiţiei vagi în aceea a conceptelor abstracte, care ar fi adecvate analizei raţionale a realităţii. Soluţia obţinută, pînă la sfîrşit, este aceea a cărei formă matematică sistematică este calculul diferenţial şi integral. Critica modernă a analizei distruge din nou această soluţie, pornind dinăuntru în exterior, fără însă ca şi conştiinţa vechilor probleme filozofice să rămînă prea vie, şi eşuează în haos şi absurditate. Cele două încercări de salvare prezentate aici fac să renască vechea antiteză într-o formă categorică şi limpede: teoria descrisă mai înainte este radical atomistă (avînd conştiinţa clară că nu atinge continuul intuitiv, dar plecînd de la ideea că noţiunile sînt capabile să sesizeze numai o existenţă rigidă); teoria lui *Brouwer* ia asupră-şi obligaţia de a face dreptate devenirii într-un mod care să fie valabil şi să se poată susţine.

Vom căuta acum să realizăm cea de a doua concepţie. Deoarece ea pune o prăpastie absolută între continuu şi o mulţime de elemente discrete, o prăpastie care exclude orice comparaţie, întrebarea dacă continuul este numărabil nu poate apărea în această concepție cu toată seriozitatea. O lege care dintr-un șir de numere în devenire produce un număr n, depinzînd de rezultatul alegerilor, este cu necesitate de așa natură, încît numărul n este fixat îndată ce avem gata un anumit interval finit din șirul de alegeri și numărul rămîne același oricum s-ar dezvolta mai departe șirul de alegeri; astfel încît nu poate fi vorba de o relație biunivocă. Fie E o proprietate cu sens în domeniul șirurilor de numere, $\bar{E}$ negația ei. Întrebarea: există un șir de numere cu proprietatea E sau nu? este lipsită de un sens clar, deoarece conceptul de lege care determină un șir pînă la infinit (în modul de exprimare al părții I) nu are sfera definită. Pe atunci am reușit, limitînd conceptul de lege la un concept cu sferă definită, cerînd ca ea să fie construită cu ajutorul principiilor logice de construcție și scutită de eroarea cercului vicios („k-lege"). Răspunsul afirmativ sau negativ la întrebarea noastră a fost atunci determinat în sine, și ambele posibilități au format o disjuncție completă. Astăzi însă întoarcem chestiunea altfel. Deoarece un anumit șir poate fi definit numai printr-o lege, întrebarea pozitivă sună și astăzi astfel: Există o lege cu proprietatea E? Însă noi nu mai întindem acest concept de lege pe patul lui Procust al principiilor de construcție, ci: dacă am reușit într-un mod oarecare — dar fără cerc vicios — să construim o lege de genul dorit, atunci sîntem îndreptățiți să facem afirmația că există o astfel de lege. Aici, deci, nu este vorba despre posibilitatea construcției, ci punem o astfel de afirmație existențială numai în privința construcției reușite, a demonstrației realizate. Propoziția negativă că o astfel de lege nu există rămîne desigur lipsită de orice sens. Putem totuși s-o întoarcem pozitiv: orice șir are proprietatea $\bar{E}$, și acum șirul capătă un conținut, în măsura în care prin șir nu înțelegem legea, ci înțelegem șirul în devenire prin acte libere de alegere, în sensul continuului, al mediului tuturor numerelor reale. Așadar trebuie să presupunem că a spune despre un șir în devenire că posedă proprietățile E și $\bar{E}$ are o semnificație; atunci se poate întîmpla ca faptul de a poseda proprietatea $\bar{E}$ să existe în natura unui șir în devenire, a unui șir în care fiecare pas de alegere este complet liber. Cum trebuie căpătate astfel de intuiții esențiale nu este locul aici să explicăm. Numai ele ne furnizează un argument ca atunci cînd cineva ne arată o lege φ să putem susține fără dovezi: șirul determinat la infinit prin această lege nu are proprietatea E. Acel ,,există'' ne leagă strîns de existență și de lege, acel ,,orice'' ne situează în devenire și libertate. Deoarece nu este determinată în sine sfera cazurilor în care o afirmație sau alta este valabilă (există un șir cu proprietatea E, respectiv orice șir are proprietatea $\overline{E}$) și întrucît, în genere, conceptul de șir trebuie să fie interpretat într-un caz cu totul altfel decît în alt caz, ar fi absurd să ne gîndim aici la o disjuncție completă. Se va înțelege astfel de ce *Brouwer* declară că nu există nici un argument pentru a crede în principiul logic al terțului exclus. Eu aș spune mai degrabă că dintre cele două propoziții în discuție ar fi imposibil ca una să fie socotită ca negație a celeilalte...

Brouwer merge cu negarea axiomei logice a terțului exclus și mai departe decît am explicat noi pînă acum. El îi contestă valabilitatea nu numai în privința propozițiilor existențiale despre șirurile de numere, dar și în privința propozițiilor existențiale despre înseși numerele naturale. Așadar, dacă E este o proprietate cu sens în domeniul numerelor naturale, astfel încît este bine stabilit dacă, atunci cînd n este un număr oarecare, E se atribuie sau nu numărului n, după *Brouwer* ar trebui ca la întrebarea ,,există sau nu un număr cu proprietatea E?'' să se întîmple la fel ca și în cazul șirurilor de numere; și, deși conceptul de număr natural este definit extensiv în opoziție cu conceptul de șir (dacă nu cumva aici nu ne-am înșelat), din această cauză, în utilizarea lui în judecata existențială pe de o parte, în cea generală pe de altă parte, el nu se desface în două ca noțiunea de șir (lege — alegere liberă). *Brouwer* motivează opinia sa prin faptul că nu există nici un temei pentru credința că orice problemă existențială de acest tip se poate decide; demonstrația valabilității principiului terțului exclus ar trebui, după el, să constea din indicația unei metode care pentru proprietățile arbitrare E să implice, evident, decizia problemei existențiale într-un sens sau altul. După cum se știe, acest punct de vedere a fost reprezentat mai întîi de *Kronecker*. În contrast conștient cu aceasta, în încercarea mea de a fundamenta analiza, eu am reprezentat următoarea opinie: nu este vorba de faptul dacă sîntem în stare să dăm o decizie într-o problemă cu ajutorul anumitor instrumente, de pildă cu modurile silogismului din logica formală, ci este vorba de felul cum se comportă chestiunea în sine; șirul numerelor naturale și conceptul de existență privitor la el este fundament al matematicii prin faptul că pentru o proprietate E cu sens în domeniul numerelor este totdeauna stabilit dacă există sau nu numere de forma E. Acum trebuie să aprofundăm mai mult această problemă centrală.

Se poate decide despre orice număr n dacă i se atribuie sau nu o proprietate E. Expresia „n posedă proprietatea E" înseamnă, de pildă, că $2^{2^{n+4}}+1$ este număr prim, $\overline{E}$ înseamnă contrariul ($2^{2^{n+4}}+1$ este un număr compus). Acum să medităm asupra acestui lucru. Opinia că ar fi sigur că există sau nu un număr cu proprietatea E se bazează, evident, numai pe următoarea idee: numerele 1, 2, 3, ... pot fi verificate succesiv pe proprietatea E; dacă se găseşte un număr cu proprietatea E, putem să ne oprim, răspunsul fiind da; dacă însă nu ne oprim, deci dacă nu s-a găsit nici un număr cu proprietatea E după ce am sfîrşit de parcurs şirul infinit de numere, atunci răspunsul este nu. Acest punct de vedere al parcurgerii pînă la sfîrşit a unui şir infinit este totuşi absurd. Nu privind numerele izolate, ci contemplînd numărul ca esenţă obţin pentru mine judecăţi universale despre numere. Numai descoperirea efectiv terminată a unui anumit număr cu proprietatea E poate furniza un temei pentru răspunsul da, şi — deoarece nu pot verifica toate numerele — numai intuiţia că în natura numărului există calitatea de a avea proprietatea $\overline{E}$ poate furniza un argument pentru răspunsul negativ; nici Dumnezeu nu are alt temei pentru a decide. Dar aceste două posibilităţi nu stau în opoziţie ca afirmaţia şi negaţia; nici negaţia uneia nici a alteia nu dă un sens inteligibil în sine. Dacă aceasta este în favoarea lui *Brouwer*, atunci am revenit mereu înapoi la vechiul meu punct de vedere prin ideea: dacă parcurg şirul numerelor şi mă opresc, în caz că găsesc un număr cu proprietatea E, atunci această oprire intervine o dată sau niciodată; este aşa sau nu este aşa, fără şovăieli şi fără a treia posibilitate. Nu trebuie examinate astfel de lucruri din afară, ci trebuie din interior să ne adunăm forţele şi să luptăm pentru „faţă", pentru evidenţă. În sfîrşit am găsit pentru mine cuvîntul salvator. O propoziţie existenţială — de pildă „există un număr par" — nu este o judecată în sensul propriu, care afirmă o stare de fapt; stări de lucruri existenţiale sînt o invenţie pură a logicienilor. „2 este un număr par", aceasta este o judecată reală, care dă expresie unei stări de lucruri; „există un număr par" este numai „rezumarea" unei judecăţi (*Urteilsabstrakt*) obţinută din această judecată. Dacă aş considera cunoştinţa ca o comoară valoroasă, atunci rezumarea unei judecăţi este ca o hîrtie care indică existenţa unei comori fără ca totuşi să dezvăluie în ce loc. Singura sa valoare poate consta în aceea că mă stimulează să caut comoara. Hîrtia este fără valoare atîta vreme cît ea nu este realizată printr-o judecată reală, care să stea în spatele ei, precum „2 este un număr par". De fapt am spus mai sus, cînd era vorba despre şiruri de numere şi de legile care le determină pînă la infinit: dacă am reuşit să construim o lege despre proprietatea E, atunci sîntem îndreptăţiţi să afirmăm că există legi de specia E; numai construcţia reuşită ne poate da justificarea pentru aceasta; despre posibilitate nu este vorba. Însă ce fel de judecată este aceea care, dacă o luăm în sine, este lipsită de sens, dezvăluindu-şi sensul mai curînd pe baza demonstraţiei reuşite, care garantează adevărul judecăţii? Aceasta nu este, desigur, o judecată, ci rezumarea unei judecăţi. Cu aceasta mie mi se pare că s-a precizat limpede caracterul său şi s-a clarificat semnificaţia propriu-zisă a conceptului de existenţă. Acum nu mai putem opune poziţiei negative a lui *Brouwer* gîndul de care mă agăţasem mai înainte: dar se întîmplă totuşi aşa sau nu se întîmplă aşa (chiar dacă nu sînt, poate, în stare să decid)! Universala „orice număr are proprietatea E" — de pildă „pentru orice număr m avem $m + 1 = 1 + m$" — este tot atît de puţin o judecată reală, ci este numai ca un bon general pentru judecăţi. Dacă îmi iese în cale un număr particular, de pildă 17, cu bonul eu pot să-mi procur pentru acest număr o judecată reală, anume: $17 + 1 = 1 + 17$. Sau pentru a folosi o altă imagine: dacă aş compara cunoştinţa cu un fruct şi efectuarea intuitivă a cunoştinţei cu gustul fructului, atunci o propoziţie universală trebuie comparată cu o pungă plină de fructe. Desigur, ea are valoare, dar nu punga în sine, ci numai din cauza conţinutului său de fructe; ea nu-mi este de nici un folos atîta vreme cît n-o desfac, nu scot un fruct din ea şi nu-l gust. Concepţia descrisă exprimă numai semnificaţia pe care o posedă de fapt pentru noi propoziţiile universale şi cele existenţiale. În lumina lor, matematica apare ca o imensă „economie fiduciară" (*Papierwirtschaft*). Valoare reală, comparabilă cu elementele din economia naţională, are numai nemijlocitul, singularul pur; tot ce este general şi toate propoziţiile existențiale participă la aceasta numai în chip mijlocit. Şi totuşi rareori ne gîndim noi, ca matematicieni, la răscumpărarea acestui ,,ban de hîrtie"! Ceea ce este valoare nu este teorema de existență, ci construcția efectuată în demonstrație! Matematica este, aşa cum spune uneori *Brouwer*, mai mult acțiune decît teorie.

Atîta vreme cît nu putem consimți la pasul care a avut loc în ultimul alineat, cele două încercări de fundamentare a analizei descrise aici se opun reciproc cu şanse egale chiar dacă cea a lui *Brouwer* posedă din capul locului avantajul că definiția conceptelor nu este îngrădită şi apreciază mai just esența intuitivă a continuului. Îndată însă ce facem noul pas prin care, aşa cred, devine în sfîrşit complet clar sensul expresiilor ,,există" şi ,,oricare" — prima fundamentare este radical imposibilă; căci îngustarea conceptului de lege la conceptul de k-lege nu ne este atunci de nici un folos; întrebarea despre ,,posibilitate" ne pune tot aşa de puțin în fața unei situații răspunzînd cu da sau nu, dacă întrebarea este pusă în legătură cu aplicația principiilor de construcție care trebuie repetată oricît de des ca şi în legătură cu şirul infinit de numere, adică în legătură cu procesul, care trebuie repetat oricît de des, al trecerii de la un număr la cel care urmează imediat...

C. Teoria demonstrației (formalismul)

1. Definiția axiomatică a numărului dată de D. Hilbert

Încă înainte de a apărea intuiționismul lui *Brouwer*, **D. Hilbert**, după ce demonstrase necontradicția geometriei în ipoteza necontradicției aritmeticii şi analizei, s-a străduit să dea o fundamentare mai adîncă conceptului de număr, precum şi extinderii acestui concept la numărul irațional. El credea că prin aceasta slăbeşte baza cerințelor limitatoare ale lui *Kronecker*.

Pentru aceasta *Hilbert* s-a servit de metoda axiomatică, care a avut atîta succes în cercetările sale asupra bazelor geometriei. Articolul său *Despre conceptul de număr* din 1900 este caracteristic pentru acest stadiu al cercetărilor sale, în care adîncimea şi dificultatea problemei necontradicției aritmetice nu sînt deplin recunoscute.

. . . . .

Să ne amintim mai întîi modul în care este introdus conceptul de număr. Pornind de la conceptul numărului 1, de obicei ne imaginăm că în procesul numărării au apărut mai întîi celelalte numere pozitive, raționale, întregi 2, 3, 4, . . . și s-au dezvoltat legile lor de calcul; apoi prin cerința efectuării în general a scăderii se ajunge la numărul negativ; mai departe se definește numărul fracționar, de pildă, ca o pereche de numere — atunci orice funcție liniară posedă un punct unde se anulează și, în sfîrșit, se definește numărul real ca o tăietură sau ca un șir fundamental — și prin aceasta se ajunge ca orice funcție indefinită rațională întreagă și, în genere, orice funcție indefinită continuă să posede un punct unde se anulează. Această metodă a introducerii conceptului de număr putem s-o numim metoda genetică pentru că cea mai generală noțiune de număr real este produsă numai prin extinderea succesivă a conceptului de număr.

La construcția geometriei se procedează cu totul altfel. Aici se obișnuiește să se înceapă cu ipoteza existenței tuturor elementelor, adică se presupun din capul locului trei sisteme de lucruri, anume punctele, dreptele și planele, și aceste elemente se pun apoi în relație unele cu altele — în esență după modelul lui *Euclid* — prin anumite axiome, anume axiomele de incidență, de ordonare, de congruență și de continuitate. Apare apoi necesitatea de a arăta necontradicția și completitudinea acestor axiome, adică trebuie arătat că aplicarea axiomelor enunțate nu poate duce niciodată la contradicții și, mai departe, că sistemul axiomelor este suficient pentru demonstrarea tuturor proprietăților geometrice. Vom numi procesul de cercetare întreprins aici metoda axiomatică.

Punem întrebarea dacă în realitate metoda genetică este tocmai singura adecvată pentru studiul conceptului de număr, iar metoda axiomatică pentru bazele geometriei. Mi se pare interesant să punem față în față cele două metode și să cercetăm care este mai avantajoasă, cînd este vorba despre cercetarea logică a bazelor mecanicii sau a altor discipline fizice.

Părerea mea este următoarea: în ciuda înaltei valori pedagogice și euristice a metodei genetice, metoda axiomatică merită totuși prioritate la expunerea definitivă și garantarea logică a conținutului cunoștinței noastre.

În teoria conceptului de număr, metoda axiomatică se formulează în felul următor:

Gîndim un sistem de lucruri; numim aceste lucruri numere și le notăm cu a, b, c, ... Gîndim aceste numere în anumite relații reciproce, a căror descriere precisă și completă are loc prin următoarele axiome:

I. Axiomele de incidență

I. 1. Din numărul a și numărul b ia naștere prin „adunare” un anumit număr c, în simboluri:

$$a + b = c \text{ sau } c = a + b$$

I. 2. Dacă a și b sînt numere date, atunci există totdeauna un număr x, și numai unul, și un număr y, și numai unul, astfel că avem

$$a + x = b \text{ respectiv } y + a = b$$

I. 3. Există un anumit număr — să-l numim 0 — așa încît pentru fiecare a avem, în același timp,

$$a + 0 = a \text{ și } 0 + a = a.$$

I. 4. Din numărul a și numărul b mai ia naștere un anumit număr c, în alt mod, prin „multiplicare”, în simboluri:

$$ab = c \text{ sau } c = ab.$$

I. 5. Dacă a și b sînt numere date oarecare și a nu este 0, atunci există un număr x, și numai unul, și un număr y, și numai unul, astfel încît avem

$$ax = b \text{ respectiv } ya = b.$$

I. 6. Există un anumit număr — să-l numim 1 — astfel că pentru orice a avem concomitent

$$a \cdot 1 = a \text{ și } 1 \cdot a = a.$$

II. Axiomele de calcul

Dacă a, b, c, sînt numere oarecare, atunci următoarele formule sînt valabile totdeauna:

II 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
II 2. $a + b = b + a$;
II 3. $a(bc) = (ab)c$;
II 4. $a(b + c) = ab + ac$;
II 5. $(a + b)c = ac + bc$;
II 6. $ab = ba$.

III. Axiomele de ordonare

III 1. Dacă a, b sînt două numere diferite oarecare, atunci totdeauna unul determinat dintre ele (de exemplu, a) este mai mare ($>$) decît celălalt; ultimul se numește cel mai mic, în simboluri:

$$a > b \text{ și } b < a$$

III 2. Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$

III 3. Dacă $a > b$, atunci avem totdeauna

$$a + c > b + c \text{ și } c + a > c + b$$

III 4. Dacă $a > b$ și $c > 0$, atunci avem totdeauna

$$ac > bc \text{ și } ca > cb.$$

IV. Axiomele de continuitate

IV 1. (*Axioma lui Arhimede*) Dacă $a > 0$ și $b > 0$ sînt două numere oarecare, atunci este totdeauna posibil să se adune a cu sine însuși de atîtea ori, încît suma care ia naștere să aibă proprietatea

$$a + a + \dots + a > b.$$

IV 2. (*Axioma de completitudine*) Nu este posibil să adăugăm la sistemul de numere un alt sistem de lucruri, așa încît și în sistemul care ia naștere prin compunere toate axiomele I, II, III, IV 1 să fie satisfăcute; sau pe scurt: numerele formează un sistem de lucruri, care nu mai este capabil de nici o extindere atunci cînd se mențin toate axiomele.

. . . .

Criticile îndreptăţite în general împotriva existenţei conceptului de totalitate a numerelor reale şi mulţimilor infinite pierd orice justificare în concepţia caracterizată mai sus; prin mulţimea numerelor reale noi nu trebuie deci să înţelegem, de pildă, totalitatea legilor posibile după care elementele unui şir fundamental pot să succeadă, ci mai degrabă — aşa cum s-a expus — un sistem de lucruri ale căror relaţii reciproce sînt date prin sistemul de mai sus finit şi închis de axiome I—IV şi despre care sînt valabile noi propoziţii numai în cazul în care ele pot fi deduse din acele axiome cu ajutorul unui număr finit de raţionamente logice.

. . . .

Convingerea că „sistemul de lucruri ale căror relaţii reciproce sînt date prin sistemul finit şi închis de axiome — menţionat mai sus — ar face fără obiect toate „criticile împotriva existenţei numerelor reale", convingere exprimată de *Hilbert* în ultimul aliniat din articolul precedent, s-a dovedit ca neviabilă.

Antinomiile teoriei mulţimilor descoperite de *Russell* s-au întins pînă în logica formală însăşi. Fundamentarea matematicii prin logică, aşa cum o întreprinsese Frege şi Russell însuşi (şi în altă formă chiar *Dedekind* în scrierea sa *Ce sînt şi ce reprezintă numerele?*), s-a arătat insuficientă. Chiar dacă Russell, formulînd teoria tipurilor logice, şi Zermelo, stabilind o anumită îngrădire prin axiome în constituirea mulţimilor, au reuşit să excludă toate contradicţiile cunoscute pînă atunci, prin aceasta nu s-a obţinut asigurarea că nu vor mai apărea şi alte antinomii.

Această stare de lucruri nu i-a scăpat lui *Hilbert* şi l-a stimulat să pună explicit problema necontradicţiei aritmeticii şi logicii însăşi, în conexiunea lor inextricabilă; prin aceasta a apărut noua şi vasta problemă a unei teorii a demonstraţiei.

2 Cîteva observaţii ale lui Leibniz asupra „Caracteristicii" (semn şi lucru)

Înainte de a ne ocupa de noua tendinţă cu care Hilbert şi-a propus să domine această problemă impunătoare, ne vom mai întoarce încă o dată în istoria matematicii şi filozofiei pentru a marca anumite idei anticipatoare ale lui *Leibniz* prin cîteva texte scurte, care arată o înrudire specială cu reflecţiile lui *Hilbert.* Sînt consideraţiile lui *Leibniz* asupra relaţiei dintre simbol şi obiect, dintre cuvînt şi lucru, aşa cum sînt exprimate în următorul mic dialog şi dezvoltate ceva mai departe în alte cîteva pasaje asupra ideii de „caracteristică generală".

A. Unii învățați sînt de părere că adevărul și-ar avea originea în liber-arbitrul uman și ar fi conținut în nume sau caractere.

B. O propoziție cu adevărat paradoxală.

A. Dv. o demonstrați în felul următor: definiția este totuși baza oricărei demonstrări?

B. Desigur; unele propoziții se pot totuși demonstra numai prin legarea definițiilor.

A. Deci adevărul acestor propoziții depinde de definiții?

B. Desigur.

A. Definițiile însă depind de liberul-arbitru al nostru?

B. Cum așa?

A. Nu-i așa că este la bunul plac al matematicienilor să folosească cuvîntul „elipsă" pentru a denumi o anumită figură? mai departe, nu a fost oare la bunul plac al latinilor de a atribui cuvîntului *circulus* sensul pe care îl exprimă definiția sa?

B. Da, și mai departe? Ideile totuși există și fără cuvinte?

A. Dar nu și fără alte semne. Încearcă numai dacă poți să faci vreo socoteală aritmetică fără să te folosești de simbolul numeric.

B. Tu mă încurci de tot, căci eu n-am considerat caracterele sau semnele ca absolut necesare pentru calcul.

A. Așadar adevărurile aritmetice presupun oarecare semne sau caractere?

B. Aceasta nu se poate tăgădui.

A. Așadar ele depind de liberul-arbitru al omului.

B. Vrei să mă înșeli cu o iluzie ciudată.

A. Nu pornește de la mine ci de la un scriitor foarte subtil.

B. Poate fi cineva așa de nerațional încît să considere adevărul ca arbitrar și să-l facă dependent de nume, atunci cînd cu siguranță grecii, latinii și germanii au numai una și aceeași geometrie?

A. Așa este; cu toate acestea trebuie, în primul rînd, să preîntîmpinăm dificultățile.

B. Numai un singur lucru mă neliniștește: faptul că eu, după cum observ, niciodată nu recunosc, nu descopăr sau nu demonstrez un adevăr fără ca să chem în ajutor în minte cuvinte sau vreun alt semn.

A. Negreșit; — dacă n-ar exista nici un semn, n-am gîndi sau raționa niciodată ceva clar.

B. Dacă însă privim figurile din geometrie, atunci studiindu-le exact, scoatem la suprafață aici deseori adevăruri.

A. Foarte adevărat, numai că nu este permis să uităm că și aceste figuri trebuie văzute ca niște caractere. Căci cercul de pe hîrtie nu este cercul real și nici nu este nevoie să fie, ci este suficient că el reprezintă pentru noi ceva în locul cercului.

B. Totuși el are o anumită asemănare cu cercul și aceasta nu este desigur arbitrară.

A. Negreșit; și tocmai de aceea figurile sînt caracterele cele mai adecvate. Însă care este asemănarea între numărul 10 și semnul 10?

B. Îndeosebi atunci cînd sînt bine alese, între semne există o relație sau o ordine care corespunde unei ordini între lucruri.

A. Se poate, dar ce asemănare au atunci primele elemente cu lucrurile pe care le denumesc, de pildă zero cu nimicul sau litera *a* cu linia? Trebuie să admiteți că cel puțin aceste elemente nu trebuie să aibă nici o asemănare cu lucrurile. Acest lucru este adevărat, de pildă, despre rădăcinile ,,lux'' și ,,fero'', în timp ce compusul lor ,,lucifer'' se află, desigur, într-o anumită relație cu ele, și anume într-o relație căreia îi corespunde o relație între obiectele desemnate prin cuvintele lucifer, lux, fero.

B. În grecește însă φωσφόρος are aceeași relație cu φῶς și φέρω.

A. Da, totuși grecii ar fi putut folosi aici și alt cuvînt.

B. Foarte adevărat; numai că eu cred că aceste caractere, dacă vor fi aplicate în demonstrare, trebuie să arate conexiune, împărțire și ordine așa cum se atribuie și obiectelor și că acest lucru este totuși necesar în conexarea și ordonarea cuvintelor, chiar dacă nu în cele luate izolat, deși și aceasta ar fi mai bine. Cel puțin această ordine și corespondență trebuie să se găsească în toate limbile, deși în moduri diferite. Și aceasta îmi dă speranța unei soluții a dificultății. Căci deși caracterele sînt arbitrare ca atare, totuși în aplicarea și conexarea lor intervine ca valabil ceva ce nu mai este arbitrar: anume o relație care există între ele și lucruri și, cu aceasta, și anumite relații între toate caracterele diferite care servesc pentru exprimarea acelorași lucruri. Și acest raport, această relație este baza adevărului. Căci ea face ca atunci cînd noi folosim fie un caracter fie altul, rezultatul să rămînă totuși totdeauna același sau ca cel puțin rezultatele pe care le găsim să fie echivalente și într-o anumită măsură să corespundă între ele. Negreșit este nevoie totdeauna pentru gîndire de unele caractere.

Încercări noi asupra intelectului uman
Cartea a IV-a, capitolul XVII

§ 4

Forma silogistică este un fel de matematică universală a cărei însemnătate nu este destul de cunoscută; și se poate spune că o artă a infailibilității este conținută în ea dacă știm și putem s-o folosim, ceea ce nu este totdeauna permis. Desigur trebuie să se știe că prin argumente formale (*arguments en forme*) eu nu înțeleg numai acea manieră scolastică de demonstrare, de care ne servim în școli, ci ~~orice raționament~~ care duce la concluzii ~~în virtutea~~ formei și la ~~care nu~~ este nevoie să se completeze cu vreun termen. Astfel un sorit..., chiar o socoteală corect dispusă, un calcul algebric, o rezolvare a unei analize infinitezimale valorează pentru mine deopotrivă ca „argumente formale", deoarece forma lor de raționament a fost demonstrată mai înainte, așa încît este sigur că nu ne înșelăm în el. (*Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Flammarion, Paris, p. 428.)

(*Opuscules et fragments* [*ed. Couturat*] *pp. 348, 556*)

Matematica universală trebuie să garanteze metoda de a determina ceva precis prin ce cade sub intuiție, așa încît o numesc „logica intuiției".

Logica este știința generală (*scientia generalis*). Matematica este știința lucrurilor care se pot reprezenta intuitiv. Metafizica este știința obiectelor inteligibile.

(*după Bodeman, Manuscrisele lui Leibniz din Biblioteca publică regală de la Hanovra, Hanovra, 1895, p. 80*)

Numesc caracter un semn caracteristic intuitiv care reprezintă idei. Arta „caracteristicii" este arta de a forma și aranja caractere astfel, încît ele să reproducă idei, adică ele să aibă între ele aceeași relație ca și ideile între ele.

(*după „Leibnitiana" de Ivan Jagodinschi, Kasan 1913, pp. 4,6*)

Noi avem adevărate idei despre obiectele simple, ... despre cele compuse ... avem numai caractere. Noi nu avem adevărata idee despre Dumnezeu... Şi aceasta are ca efect că noi nu putem judeca uşor asupra posibilităţii unui lucru pe temeiul posibilităţii de a gîndi bazele sale elementare (*requisita*) atunci cînd noi gîndim premisele sale elementare izolate şi le cuprindem în unitate... Noi nu putem strînge idei diferite într-un gînd, deşi le unim cu ajutorul caracterelor şi putem reprezenta în acelaşi timp şirul complet al diferitelor gînduri..., ceea ce nu se poate întîmpla decît printr-o percepţie intuitivă concomitentă sau imaginaţie a caracterelor tuturor termenilor... Şi deoarece uneori numărul caracterelor este aşa de mare, încît ele nu pot fi complet înţelese prin imaginaţie (reprezentarea imaginilor), este nevoie de a le înregistra într-un substrat material ... Astfel o imagine percepută cu simţurile sau o imagine a fanteziei compensează incapacitatea noastră, imagine percepută ca întreg în acelaşi timp cu simţurile. Numai Dumnezeu poate avea adevăratele idei ale lucrurilor compuse.

(Adică: numai Dumnezeu poate cunoaşte *a priori* şi adevărurile de fapt, care sînt infinit de complicate)

Leibniz compară mai departe analiza adevărurilor complexe infinite şi reducerea lor la propoziţii identice (tautologice) cu dezvoltarea antanairetică (adică a dezvoltării în fracţie continuă) a unui raport iraţional şi, cu această ocazie, spune:

Dacă dintr-o analiză prelungită (*resolutio*) şi dintr-un proces (*progressio*) care rezultă din ea şi din legea (*regula*) acestui proces se înţelege, în sfîrşit, că niciodată nu se va produce o contradicţie, propoziţia respectivă este posibilă. Dacă însă din legea procesului se înţelege că prin analiză chestiunea se reduce la faptul că diferenţa dintre cele ce ar trebui să coincidă (adică să fie identice) devine mai mică decît orice mărime dată în prealabil, atunci s-a demonstrat că propoziţia respectivă este adevărată. (*Opuscules et fragments*, p. 374; din marele tratat *Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum*, 1686, § 66).

3. Primele încercări ale lui Hilbert pentru demonstraţia necontradicţiei aritmeticii

D. Hilbert a făcut primul pas către ceea ce va numi mai tîrziu „metamatematică" şi „teoria demonstraţiei" prin conferinţa ţinută la Congresul internaţional de la Heidelberg din 1904, intitulată *Despre bazele logicii şi aritmeticii*, în care se cuprind în germen multe din ideile sale de mai tîrziu asupra problemei ultimelor fundamente ale matematicii. Prin aceste idei *Hilbert* anticipa pe atunci cu mult epoca sa şi a rămas neînţeles. Astăzi, desigur, sîntem în stare să înţelegem ce s-a spus de fapt în această conferinţă.

Ideea fundamentală este de a reprezenta necontradicţia unui sistem de formule matematice, care se poate prelungi la infinit, prin anumite proprietăţi formal-combinatorice ale simbolurilor folosite şi prin modul lor de combinare. Astfel se capătă posibilitatea ca prin studiul matematic al acestor combinaţii de semne — modalitate de studiere pe care *Hilbert* o numeşte ,,metamatematică" — să se stabilească propoziţii despre necontradicţia unui sistem de axiome aritmetice simbolizate aici. Se recunoaşte înrudirea fundamentală cu ideea lui *Leibniz* a ,,reprezentării" proprietăţilor ,,lucrurilor" prin ,,caracterele" lor.

Despre bazele logicii şi aritmeticii (publicat în 1905)

. . . .

Dificultăţile întîlnite la fundamentarea aritmeticii sînt în parte de fapt de altă natură decît acelea care trebuie învinse la fundamentarea geometriei. Atunci cînd am examinat bazele geometriei, anumite dificultăţi, de natură pur aritmetică, au putut fi lăsate de o parte; la fundamentarea aritmeticii, invocarea altei discipline fundamentale apare însă de nepermis. Dificultăţile întîlnite la fundamentarea aritmeticii vor putea apărea foarte clar supunînd unei scurte discuţii critice vederile anumitor cercetători.

L. Kronecker, după cum se ştie, a văzut în conceptul de număr întreg fundamentul propriu-zis al aritmeticii; el şi-a format concepţia că numărul întreg există în realitate direct şi nemijlocit, anume ca noţiune generală (valoare parametrică); aceasta l-a împiedicat să-şi dea seama că noţiunea de număr întreg are nevoie (şi este susceptibilă) de fundamentare. De aceea l-aş numi un dogmatic: el preia numărul întreg cu proprietăţile sale esenţiale ca dogmă şi nu mai priveşte înapoi.

H. Helmholtz reprezintă punctul de vedere al empiristului; mi se pare însă că punctul de vedere al experienţei pure este respins prin ideea că din experienţă, adică prin experiment, nu se poate niciodată deduce posibilitatea sau existenţa unui număr arbitrar de mare. Căci numărul lucrurilor, care constituie obiectul experienţei noastre, oricît ar fi acest număr de mare, totuşi este sub o limită finită . . .

Dintre învăţaţii care au pătruns mai adînc în esenţa numărului întreg, menţionez pe următorii:

G. *Frege* îşi propune să fundamenteze legile aritmeticii prin intermediul logicii, aceasta fiind concepută în sensul tradiţional. El are meritul de a fi înţeles corect proprietăţile esenţiale ale conceptului de număr întreg, precum şi însemnătatea raţionamentului prin inducţie completă. Însă credincios planului său, preluînd printre altele, ca principiu, şi faptul că un concept (o mulţime) ar fi definit şi utilizabil nemijlocit, cu condiţia să fie determinat pentru orice obiect, fie că acesta se subsumează conceptului sau nu, şi totodată nesupunînd conceptul ,,orice'' nici unei îngrădiri, el se expune tocmai acelor paradoxe din teoria mulţimilor care se găsesc, de pildă, în conceptul de mulţime a mulţimilor şi care, după cum mi se pare mie, arată că atît concepţiile, cît şi mijloacele de cercetare ale logicii, concepută în sens tradiţional, nu sînt la înălţimea cerinţelor pe care le pune teoria mulţimilor. În cercetările asupra conceptului de număr trebuie mai degrabă să ne propunem ca ţel principal, din capul locului, evitarea unor astfel de contradicţii şi explicarea acelor paradoxe.

R. *Dedekind* şi-a dat seama cu claritate de dificultăţile întîlnite la fundamentarea conceptului de număr şi a dat, mai întîi, într-un mod extrem de subtil o construcţie a teoriei numerelor întregi. Aş putea să numesc însă metoda sa transcendentală, întrucît el face demonstraţia existenţei infinitului pe o cale a cărei idee fundamentală este folosită într-un mod asemănător pe latura filozofică — un drum pe care eu, evident, nu-l pot recunoaşte ca sigur şi accesibil din cauza contradicţiei inevitabile a conceptului de totalitate a tuturor lucrurilor, concept care se va folosi acum.

G. *Cantor* a simţit contradicţia amintită şi şi-a exprimat acest simţămînt prin faptul că el face distincţia dintre mulţimi ,,consistente'' şi ,,inconsistente''. Deoarece el nu stabileşte, după părerea mea, nici un criteriu precis pentru această distincţie, trebuie să consider concepţia sa asupra acestui punct ca o concepţie care acordă încă multă libertate aprecierii subiective şi de aceea nu oferă nici o garanţie obiectivă.

Eu sînt de părere că toate dificultăţile amintite pot fi învinse şi că se poate ajunge la o fundamentare riguroasă şi complet satisfăcătoare a conceptului de număr, şi anume printr-o metodă pe care aş numi-o axiomatică şi a cărei idee de bază aş caracteriza-o în comunicarea următoare; îmi rezerv dreptul de a realiza şi dezvolta riguros şi consecvent această metodă.

Aritmetica este considerată ca o parte a logicii şi de cele mai multe ori la fundamentarea aritmeticii se admit ca premise conceptele fundamentale tradiţionale ale logicii. Numai că studiind cu atenţie, observăm că în expunerea obişnuită a legilor logicii se întrebuinţează deja anumite concepte fundamentale ale aritmeticii, de pildă, conceptul de mulţime, în parte chiar conceptul de număr, îndeosebi ca număr indicator (Anzahl). Ajungem astfel într-o situaţie fără ieşire şi de aceea pentru evitarea paradoxelor este necesară o dezvoltare parţial concomitentă a legilor logicii şi ale aritmeticii.

. . . .

Se numeşte obiect al gîndirii, sau — pe scurt — obiect, un lucru din gîndirea noastră şi se înseamnă printr-un simbol.

Mai întîi punem la baza studiului nostru un obiect 1 (unu). Compunerile acestui obiect cu sine însuşi de cîte două ori, de trei ori sau de mai multe ori, precum:

$$11,\ 111,\ 1111$$

le numim combinaţii ale obiectului 1 cu sine însuşi; la fel se numesc orice combinaţii ale acestor combinaţii, precum:

$$(1)\ (11),\ (11)\ (11)\ (11),\ ((11)\ (11))\ (11),\ ((111)(1))\ (1)$$

iarăşi combinaţii ale acestui obiect 1 cu sine însuşi. De asemenea, combinaţiile se numesc pur şi simplu obiecte şi atunci, în consecinţă, obiectul 1 pus la bază se numeşte obiectul simplu.

Adăugăm acum un al doilea obiect simplu şi îl denumim cu semnul = (egal). Apoi formăm combinaţii cu aceste două obiecte, precum:

$$1 =,\ \ 11 =,\ \ldots\ (1)(= 1)\ \ (= = =),\ \ ((11)(1)\ \ (=))\ \ (= =),$$

$$1 = 1,(11) = (1)(1).$$

Spunem că o combinaţie *a* de obiecte simple 1, = diferă de combinaţia *b* a acelor obiecte, dacă — în ce priveşte modul şi succesiunea combinaţiei sau alegerea şi fixarea obiectelor 1, = înseşi — combinaţiile se îndepărtează în vreun fel oarecare una de alta, adică dacă *a* şi *b* nu sînt identice între ele.

Acum ne imaginăm combinaţiile acelor două obiecte simple împărţite în două clase, clasa celor existente şi a celor neexistente: fiecare obiect care aparţine clasei celor existente se deosebeşte de fiecare obiect care aparţine clasei celor neexistente. Orice combinaţie a celor două obiecte simple 1, = aparţine uneia dintre cele două clase.

Dacă a este o combinaţie a celor două obiecte care stau la bază 1, =, atunci notăm cu a şi propoziţia că a aparţine clasei celor existente şi cu $\overline{a}$ propoziţia că a aparţine clasei celor neexistente. Spunem că a este o propoziţie adevărată dacă a aparţine clasei celor existente; dimpotrivă $\overline{a}$ este o propoziţie adevărată dacă a aparţine clasei celor neexistente. Propoziţiile a şi $\overline{a}$ formează o contradicţie.

Ansamblul (*Inbegriff*) a două propoziţii A, B, în simboluri:

$$A \mid B$$

în cuvinte: „din A urmează B" sau „dacă A este adevărată, şi B este adevărată", se numeşte tot o propoziţie, şi anume A se numeşte atunci supoziţie şi B aserţiune. Supoziţia şi aserţiunea pot să constea, iarăşi, din mai multe propoziţii A_1, A_2, respectiv B_1, B_2, B_3 etc., în simboluri

$$A_1 \text{ şi } A_2 \mid B_1 \text{ sau } B_2 \text{ sau } B_3$$

în cuvinte: „din A_1 şi A_2 urmează B_1 sau B_2 sau B_3" etc.

Din cauza semnului „sau" ar fi posibil să se evite simbolul $\mid$, deoarece s-a introdus deja negaţia; îl folosesc în această conferinţă pur şi simplu pentru a mă apropia cît mai mult de limbajul obişnuit în cuvinte.

Prin A_1, A_2, ... vom înţelege respectiv acele propoziţii care rezultă — vorbind pe scurt — dintr-o propoziţie $A(x)$, în care în locul unui x „variabil" (*Willkürlich*) luăm obiectele 1, = şi combinaţiile acestora; apoi scriem propoziţiile

$$A_1 \text{ sau } A_2 \text{ sau } A_3, \ldots \text{ respectiv } A_1 \text{ şi } A_2 \text{ şi } A_3, \ldots$$

şi aşa cum urmează

$$A\,(x^{(\text{sau})}) \text{ în cuvinte „cel puţin pentru un } x\text{"}$$

respectiv $A(x^{(\text{şi})})$ în cuvinte „pentru orice x";

în toate acestea noi vedem pur şi simplu o scriere prescurtată.

Acum formăm din cele două obiecte 1, $=$ de bază, următoarele propoziţii:

1. $x = x$;

2. $\{x = y$ şi $w(x)\}|w(y)$.

Aici x în sensul lui $x^{(\text{şi})}$ înseamnă oricare dintre cele două obiecte de bază şi orice combinaţie a lor; în 2., de asemenea, y (în sensul lui $y^{(\text{şi})}$) este oricare din acele obiecte şi oricare combinaţie; mai departe $w(x)$ este o combinaţie „variabilă", care conţine pe „variabila" x (în sensul lui $x^{(\text{şi})}$); propoziţia 2. sună în cuvinte astfel: din $x = y$ şi $w(x)$ urmează $w(y)$.

Propoziţiile 1., 2. formează definiţia conceptului $=$ (egal) şi mai sînt numite şi axiome.

Dacă în locul variabilelor x, y se pun în axiomele 1., 2. obiectele simple 1, $=$ sau combinaţii speciale ale acestora, iau naştere atunci propoziţii particulare care ar putea fi numite consecinţe ale acestor axiome. Noi considerăm un şir de anumite consecinţe astfel, încît supoziţiile ultimei consecinţe din şir să fie identice cu aserţiunile consecinţelor precedente. Dacă apoi luăm supoziţiile consecinţelor precedente ca supoziţie şi aserţiunea ultimei consecinţe ca aserţiune, atunci ia naştere o nouă propoziţie, care iarăşi poate fi considerată consecinţă din axiome. Continuînd acest procedeu de raţionament putem obţine şi alte consecinţe.

Acum alegem din aceste consecinţe pe acelea care au forma simplă a propoziţiei a (aserţiune fără supoziţie) şi cuprindem obiectele a care se produc în clasa celor existente, în timp ce obiectele care diferă de acestea pot aparţine clasei celor neexistente. Ştim că din 1., 2. se produc numai şiruri de forma $\alpha = \alpha$, unde α este o combinaţie de obiecte 1, $=$. Axiomele 1., 2. sînt satisfăcute şi ele, la rîndul lor, în ce priveşte împărţirea obiectelor în cele două clase, adică sînt propoziţii adevărate, şi din cauza proprietăţii axiomelor 1., 2. considerăm conceptul $=$ (egal), definit prin ele, ca un concept necontradictoriu.

Aş vrea să atrag atenţia că axiomele 1., 2. nu conţin în genere o propoziţie de forma $\overline{a}$, adică o propoziţie conform căreia ar apărea o combinaţie în clasa celor neexistente. Aşadar am putea satisface şi axiomele, luînd toate combinaţiile celor două obiecte simple în clasa celor existente şi lăsînd clasa celor neexistente goală. Totuşi împărţirea aleasă mai înainte în două clase arată mai bine cum trebuie procedat în cazurile ulterioare mai dificile.

Continuăm acum construcţia bazelor logice ale gîndirii matematice, adăugînd la cele două obiecte 1, = alte trei obiecte: u (mulţime infinită, infinitul), f (următorul), f' (operaţia asociată) şi stabilind pentru acestea următoarele axiome:

3. $f(ux) = u(f'x)$;

4. $f(ux) = f(uy) \mid ux = uy$;

5. $\overline{f(ux) = u1}$.

Aici, ,,variabila'' x (în sensul lui $x^{(\text{şi})}$) înseamnă oricare dintre cele cinci obiecte de bază şi orice combinaţie a acestora. Obiectul u este numit pe scurt mulţime infinită şi combinaţia ux (de exemplu $u1$, $u(11)$, uf) este numită un element al acestei mulţimi infinite u. Axioma 3 spune atunci că oricărui element ux îi urmează un anumit obiect $f(ux)$, care este egal cu un element al mulţimii u, anume cu elementul $u(f'x)$, adică aparţine de asemenea mulţimii u. Axioma 4 exprimă faptul că dacă după două elemente ale mulţimii u urmează acelaşi element, acele elemente sînt de asemenea egale între ele. Conform axiomei 5 nu există în u nici un element după care să urmeze elementul $u1$; de aceea, acest element $u1$ se numeşte primul element din u.

Acum trebuie să supunem cercetării corespunzătoare axiomele 1—5, aşa cum am făcut mai înainte cu axiomele 1., 2.; aici avem de observat că acele axiome 1., 2. sînt susceptibile în acelaşi timp de o extindere a valabilităţii lor, în măsura în care de aici încolo ,,variabilele'' x, y înseamnă combinaţii arbitrare ale celor cinci obiecte simple de bază.

Ne punem iarăşi întrebarea dacă anumite consecinţe din axiomele 1—5 formează o contradicţie sau dacă, din contră, cele cinci obiecte de bază 1, =, u, f, f' şi combinaţiile lor se pot împărţi în clasa celor existente şi în clasa celor neexistente, astfel încît axiomele 1—5 să fie satisfăcute faţă de această împărţire în clase, adică dacă orice consecinţă din acele axiome devine o propoziţie adevărată faţă de acea împărţire în clase. Pentru a răspunde la această întrebare examinăm dacă axioma 5 este singura care dă naştere la propoziţii de forma $\overline{a}$, adică dacă o combinaţie a din cele cinci obiecte de bază va aparţine clasei celor neexistente. De aceea propozițiile care formează cu axioma 5 o contradicție trebuie să fie în orice caz de forma

6. $f(ux^{(\text{sau})}) = u1$;

o astfel de consecință nu poate să decurgă din axiomele 1—4 în nici un fel.

Pentru a ne convinge, să numim ecuația, adică obiectul $a = b$, ecuație omogenă, dacă atît a cît și b sînt combinații de cîte două obiecte simple, la fel dacă a și b sînt ambele combinații oarecare de cîte trei, patru sau mai multe obiecte simple; de pildă:

$$(11) = (fu),\ (ff) = (uf'),\ f(11) = (u\,1\,=),$$

$$(f1)(f1) = (1111),\ (f(ff'u)) = (1uu1),\ ((ff)(1111)) = ((11)(11)(11))$$

se numesc ecuații omogene. Din axiomele 1 și 2 urmează exclusiv, așa cum am văzut mai înainte, simple ecuații omogene, anume ecuații de forma $\alpha = \alpha$. La fel, axioma 3 furnizează numai ecuații omogene dacă luăm aici pentru x un obiect oarecare. De asemenea, axioma 4 arată în aserțiune, desigur, totdeauna o ecuație omogenă, îndată ce supoziția este o ecuație omogenă și astfel, în genere, pot apărea drept consecințe din axiomele 1—4 numai ecuații omogene. Însă ecuația 6, care ar trebui să fie demonstrată totuși, nu este desigur o ecuație omogenă, deoarece aici în loc de $x^{(\text{sau})}$ trebuie luată o combinație și astfel partea stîngă devine o combinație de trei sau mai multe obiecte simple, în timp ce partea dreaptă rămîne o combinație din cele două obiecte simple u și 1.

Cu acestea, cred, am înfățișat ideea fundamentală, pentru ca să se recunoască justețea afirmației mele ...

Așadar, împărțirea în clase dorită rezultă dacă toate obiectele a, unde a este o consecință din axiomele 1—4, se numără în clasa celor existente și toate acele obiecte care diferă de acestea se primesc în clasa celor neexistente, îndeosebi obiectele $f(ux) = u1$. Din cauza acestei proprietăți, astfel aflate, a axiomelor stabilite, noi recunoaștem că acestea nu duc, în genere, niciodată la o contradicție și de aceea denumim obiectele u, f, f' definite prin aceleași concepte sau operații necontradictorii sau ca existînd necontradictoriu. În ce privește îndeosebi conceptul de infinit u, prin explicația dată mai sus, afirmarea existenței infinitului u apare justificată; căci ea capătă acum o semnificație determinată și un conținut care va fi folosit mereu mai tîrziu.

Considerațiile care au fost schițate formează primul caz în care reușim să dăm demonstrația directă pentru necontradicția axiomelor, în timp ce metoda altfel obișnuită — îndeosebi în geometrie — a particularizării adecvate sau a formării de exemple eșuează aici cu necesitate.

. . . .

Principiile care trebuie să fie hotărîtoare în felul cum intenționăm să construim și să desăvîrșim legile gîndirii matematice sînt pe scurt următoarele:

I. Ajuns la un anumit punct al teoriei eu îmi permit să consider adevărată o altă propoziție îndată ce s-a recunoscut că ea nu dă naștere la nici o contradicție, atunci cînd este adăugată ca axiomă la propozițiile găsite pînă acum ca adevărate, adică duce la consecințe care toate sînt propoziții adevărate față de o anumită împărțire a lucrurilor în clasa celor existente și clasa celor neexistente.

II. În axiome „variabilele" — înlocuind conceptul „orice" sau „toți" din logica obișnuită — reprezintă numai acele obiecte ale gîndirii și combinații între ele care din orice punct de vedere sînt fundamentale sau vor fi nou definite. De aceea, la deducerea consecințelor din axiome „variabilele" care apar în axiome, pot fi înlocuite numai prin aceste obiecte ale gîndirii și prin combinațiile lor. De asemenea trebuie avut în vedere într-un mod corespunzător că axiomele de pînă acum suferă o extindere a valabilității lor, respectiv sînt supuse unei schimbări conforme prin adăugarea și punerea la bază a unui nou obiect al gîndirii.

III. Mulțimea este definită în general ca un obiect al gîndirii m și combinațiile mx se numesc elementele mulțimii m așa încît deci — în contrast cu concepția uzuală — conceptul de element al unei mulțimi apare el însuși numai ca produs tardiv al conceptului de mulțime.

. . . .

În I se exprimă principiul creator, care ne dă dreptul să formăm mereu noi concepte prin cel mai liber uzaj, singura îngrădire fiind să se evite contradicția. Paradoxele menționate la începutul acestei conferințe devin imposibile prin II și III; îndeosebi aceasta este valabil despre paradoxul mulțimii tuturor mulțimilor care nu se conțin în ele înseși ca element.

. . . .

IV. Dacă vrem să cercetăm un anumit sistem dat de axiome după principiile de mai sus, atunci trebuie să împărţim combinaţiile obiectelor de bază în două clase, a existentelor şi a neexistentelor, în care caz axiomelor le revine rolul prescripţiilor pe care împărţirea trebuie să le satisfacă. Dificultatea principală va consta în a recunoaşte posibilitatea împărţirii tuturor obiectelor în două clase, a existentelor şi neexistentelor. Problema posibilităţii acestei împărţiri este, în esenţă, echivalentă cu problema dacă acele consecinţe care se pot obţine din axiome prin particularizare şi conexiune în sensul lămurit mai înainte duc sau nu la o contradicţie în cazul că se adoptă modurile cunoscute de raţionament logic. Necontradicţia axiomelor poate atunci să fie recunoscută sau arătîndu-se cum ar trebui să se manifeste o contradicţie oarecare încă într-un anumit punct mai vechi din evoluţia teoriilor, sau făcîndu-se ipoteza că ar exista o demonstraţie care, pornind de la axiome, ajunge la o anumită contradicţie şi se arată apoi că o atare demonstraţie nu este posibilă, căci ar conţine în sine o contradicţie. Chiar şi demonstraţia schiţată mai înainte pentru existenţa necontradictorie a infinitului se reduce la a recunoaşte că o demonstraţie pentru ecuaţia 6 din axiomele 1—4 nu este posibilă.

V. Dacă pînă aici a fost vorba despre mai multe obiecte conceptuale, combinaţii, combinaţii variate sau cu mai multe „variabile", totdeauna s-a subînţeles un număr mărginit de astfel de lucruri. După enunţarea definiţiei numărului finit sîntem în stare să prindem sensul general al acelui mod de exprimare. Chiar şi semnificaţia unei consecinţe „arbitrare" şi a „deosebirii" dintre o propoziţie şi alte propoziţii de un anumit fel este de acum înainte susceptibilă de o descriere exactă printr-un procedeu recurent pe temeiul definiţiei numărului finit — corespunzînd ideii de inducţie completă. Atunci şi realizarea completă a demonstraţiei vizate mai înainte trebuie gîndită astfel, ca să difere propoziţia care se produce printr-un număr finit de paşi, ca o consecinţă din axiomele 1—4; chiar şi demonstraţia însăşi trebuie considerată ca o configuraţie matematică, anume o mulţime finită, ale cărei elemente sînt legate prin propoziţii care exprimă faptul că demonstraţia din 1—4 duce la 6 şi apoi trebuie arătat că o astfel de demonstraţie conţine o contradicţie şi că deci nu este necontradictorie în sensul definit de noi.

Aşa cum existenţa celui mai mic infinit poate fi demonstrată, urmează să fie demonstrată existenţa totalităţii numerelor reale; de fapt axiomele, aşa cum eu le-am enunţat pentru numerele reale, se pot exprima exact prin aceleaşi formule ca şi axiomele enunţate pînă acum. În ce priveşte îndeosebi acea axiomă pe care eu am numit-o axioma de completitudine, aceasta exprimă faptul că totalitatea numerelor reale, în sensul corespondenţei biunivoce, element cu element, conţine orice altă mulţime, ale cărei elemente satisfac, de asemenea, axiomele anterioare; în această concepţie și axioma de completitudine devine o cerinţă exprimabilă prin formule construite aşa cum am arătat mai sus și axiomele pentru totalitatea numerelor reale nu se deosebesc calitativ în nici o privinţă de axiomele necesare pentru definiţia numerelor întregi. În recunoaşterea acestui fapt rezidă, cred eu, respingerea obiectivă a concepţiei despre bazele matematicii reprezentată de *L. Kronecker* şi denumită la începutul conferinţei mele ca dogmatică.

. . . .

Conferința de mai sus din 1904 nu adusese încă nici o soluție definitivă a marii probleme. *Hilbert* a reluat cercetările sale în această privință numai după mai mulți ani. Matematicianul maghiar *Julius König* a fost stimulat de încercarea lui *Hilbert*, la continuarea cercetărilor; el a murit însă înainte de publicarea cărții sale apărute numai ca fragment sub titlul *Noile baze ale logicii, aritmeticii și teoriei mulțimilor* (Leipzig, 1914). Această operă nu a avut influență asupra lui *Hilbert*, care în anul 1917 a formulat din nou problema „de a face însuşi conceptul de demonstrație matematică obiect de cercetare". Atacurile lui Brouwer şi Weyl contra analizei clasice au constituit un alt motiv (în afară de noile paradoxe care amenințau, poate, să apară în teoria mulțimilor) de a făuri demonstrația necontradicției întregii matematici tradiţionale — în vederea apărării ei.

Astfel *Hilbert* şi-a reluat vechile cercetări într-o nouă formă în articolul său *Prima comunicare despre noua fundamentare a matematicii* (Ges. Abh., III, 1922. pp. 157—177), după care urmează imediat conferința *Bazele logice ale matematicii* (*op. cit.*, 1922, pp. 178—191). În timp ce „prima comunicare" conţinea numai demonstrația necontradicției pentru un formalism parţial puţin însemnat, care a fost gîndit numai ca o probă a metodei, în a doua conferință, necontradicția formalismului aritmetic elementar este demonstrată fără variabile „legate" (adică fără folosirea lui „toţi" şi „există").

Într-o formă mai matură, cu aceeaşi problemă se ocupă articolele, reproduse fragmentar în cele ce urmează, intitulate *Despre infinit* (1925) şi *Bazele matematicii* (1928).

4. Extrase caracteristice din lucrările de maturitate ale lui Hilbert asupra teoriei demonstrației („metamatematica").

Despre infinit (1925)

[„Mathematische Annalen", vol. 95, pp. 161—190.]

. . . .

Trebuie admis că situația în care ne aflăm în prezent în privința paradoxelor nu mai este de suportat. Să ne gîndim: în matematică, acest model de certitudine și adevăr, definițiile și raționamentele, așa cum toți le învață de la alții, le transmit altora și le aplică, conduc la absurdități. Și unde ar trebui să se găsească certitudinea și adevărul, dacă însăși gîndirea matematică nu le posedă?

Există însă o cale complet satisfăcătoare de a evita paradoxele fără a comite o trădare față de știința noastră. Punctele de vedere pentru aflarea acestei căi și dorințele care ne indică direcția sînt acestea:

1. Vom depista cu atenție, vom cultiva, vom întări și vom face utilizabile definițiile și căile de raționament fecunde, chiar acolo unde se oferă cea mai slabă perspectivă. Din paradisul pe care ni l-a creat Cantor nimeni nu ne va alunga.

2. În general este nevoie să se producă aceeași certitudine pentru raționament așa cum există în aritmetica elementară, de care nimeni nu se îndoiește și unde contradicțiile și paradoxele apar numai datorită neatenției noastre.

Atingerea acestor țeluri este, evident, posibilă numai dacă reușim să elucidăm complet natura infinitului.

Am văzut mai înainte că infinitul nu este nicăieri de găsit în realitate, oricare ar fi experiențele, observațiile la care am apela și orice știință am utiliza. Ar trebui oare ca gîndirea despre lucruri să fie atît de diferită de lucrurile întîmplate, desfășurîndu-se într-un mod atît de diferit și de distanțat, față de orice realitate? Nu este oare evident că, avînd credința că într-un sens oarecare cunoaștem realitatea infinitului, noi ne-am lăsat mai degrabă derutați de faptul că întîlnim așa de des în realitate dimensiuni atît de nemaiauzite și în mare și în mic? Iar în ce privește raționamentul logic concret (*inhaltlich*), ne-a înșelat el oare vreodată sau ne-a lăsat în părăsire atunci cînd l-am aplicat la lucruri sau întîmplări reale? Nu — raționamentul logic concret este indispensabil. El ne-a înșelat numai atunci cînd am preluat definiții abstracte arbitrare; în acest caz noi am aplicat nepermis raționamentul concret, adică neținîndu-se seama în chip evident de condițiile preliminare necesare pentru aplicarea raționamentului logic concret. Și recunoscînd că astfel de condiții preliminare există și că trebuie ținut seama de ele, noi ne găsim în concordanță cu filozofii, îndeosebi cu *Kant*. Deja *Kant* a arătat — și aceasta constituie o componentă integrală a doctrinei sale — că matematica tratează un conținut asigurat, care nu depinde de nici un fel de logică şi de aceea niciodată nu poate avea ca fundament numai logica, din care cauză și străduințele lui *Frege* și *Dedekind* trebuiau să eşueze. Mai curînd în reprezentare există ceva dat ca o condiție preliminară pentru aplicarea raționamentelor logice şi pentru efectuarea operațiilor logice: anumite obiecte extralogice, concrete, care există intuitiv ca trăire efectivă nemijlocită înainte de orice gîndire. Dacă raționamentul logic trebuie să fie sigur, atunci este necesar să putem vedea toate aspectele obiectelor și toate proprietățile, diferențele, succesiunile sau alăturările lor trebuie să fie date intuitiv în același timp nemijlocit cu obiectele, ca ceva care nu se mai poate reduce la altceva și nici nu are nevoie de vreo reducție. Aceasta este atitudinea filozofică fundamentală, pe care o consider necesară pentru matematică ca și în genere pentru orice gîndire, comprehensiune și comunicare științifică și fără de care o manifestare spirituală nici măcar nu este posibilă. Și îndeosebi în matematică înseși semnele concrete sînt obiectele studiului nostru, a căror formă, ca urmare a atitudinii noastre, este imediat clară și se poate recunoaște.

Să ne amintim natura și metodica aritmeticii finite obișnuite! Aceasta se poate construi, desigur, numai prin structuri numerice cu ajutorul reflecțiilor concrete, intuitive. Dar matematica nu constă cîtuși de puțin numai din ecuații numerice și nici nu se poate reduce la acestea. Se poate însă afirma că ea este un aparat care aplicat la numere întregi trebuie să dea totdeauna ecuații numerice corecte. Dar în acest caz este nevoie să se cerceteze aprofundat construcția aparatului pentru a se cunoaște dacă el trebuie să dea totdeauna ecuații numerice corecte. Și ca instrument pentru acest scop ne stă la dispoziție numai aceeași metodă de studiu concretă în conținut și aceeași atitudine finită a gîndirii, așa cum a fost aplicată la construcția aritmeticii însăși pentru deducerea ecuațiilor numerice. Această cerință științifică se poate satisface în realitate, adică este posibil ca pe o cale pur intuitivă și finită — întocmai ca adevărurile aritmeticii — să obținem și acele idei care ne garantează validitatea aparatului matematic.

Intrăm acum, mai amănunțit în aritmetică. În aritmetică avem cifrele

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IIII},\ \ldots$$

unde fiecare cifră se poate cunoaște intuitiv prin faptul că la ea după I urmează iarăși I. Aceste cifre — însuși obiectul studiului nostru — nu au în sine nici o semnificație. În afară de aceste semne noi mai folosim însă în aritmetica elementară și alte semne, de pildă semnul 2 pentru prescurtarea cifrei II, sau semnul 3 pentru prescurtarea cifrei III ; mai departe, noi folosim semnele $+$, $=$, $>$ și altele, care servesc pentru comunicarea afirmațiilor. Astfel $2+3=3+2$ trebuie să servească pentru comunicarea faptului că $2+3$ și $3+2$ sînt, avînd în vedere prescurtările folosite, aceeași cifră, anume cifra IIIII. Apoi $3>2$ servește, de asemenea, pentru a comunica faptul că semnul 3, adică III, este mai lung decît semnul 2, adică II, sau că acest din urmă semn este o parte a celui dintîi.

Noi folosim pentru comunicare și literele $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ în loc de cifre. În consecință, $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$ este o comunicare că cifra $\mathfrak{b}$ este mai lungă decît cifra $\mathfrak{a}$. Și, de asemenea, din actualul punct de vedere, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ ar fi numai comunicarea faptului că cifra $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ este același lucru cu $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$. În acest caz, exactitatea în conținut a acestei comunicări este demonstrată și prin raționament concret și noi putem înainta foarte departe folosind acest fel intuitiv, concret de tratare.

Aș dori să vă arăt acum un prim exemplu unde se depășește acest mod intuitiv de considerare. Cel mai mare număr prim cunoscut pînă acum este (cu 39 cifre).

$$\mathfrak{p} = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Prin cunoscutul procedeu al lui *Euclid* putem demonstra complet, în cadrul poziției noastre, că între $\mathfrak{p}+1$ și $\mathfrak{p}!+1$ există cu certitudine un nou număr prim. Însăși această propoziție corespunde pe deplin poziției noastre finite. Căci cuvîntul „există” servește aici numai pentru a prescurta propoziția : este cert că

$$\mathfrak{p}+1, \text{ sau } \mathfrak{p}+2\ , \text{ sau } \mathfrak{p}+3\ \ldots, \text{ sau } \mathfrak{p}!+1$$

este număr prim. Acum, mai departe : Este, evident, același lucru dacă spun : există un număr prim care este

$$1.\ > \mathfrak{p}$$

și totodată

$$2.\ \leqslant \mathfrak{p}!+1$$

și apoi ajungem la formularea unei propoziții care exprimă numai o parte a afirmației lui *Euclid*, anume că există un număr prim care este $> \mathfrak{p}$. Deși aceasta, din punctul de vedere al conținutului, este numai o afirmație de mult mai mică însemnătate, este numai o parte din afirmația lui *Euclid* și deși tranziția apare așa de inofensivă, totuși este un salt în transfinit atunci cînd această afirmație parțială, desprinsă din contextul de mai sus, este exprimată ca o afirmație independentă.

Cum este posibil acest lucru? Aici avem un enunț existențial „există" ! Fără îndoială că și în propoziția lui *Euclid* am avut un astfel de enunț. Desigur, însă acolo „există" era, așa cum spuneam, numai o altă manieră de exprimare mai scurtă în loc de: sau $\mathfrak{p} + 1$, sau $\mathfrak{p} + 2$, sau $\mathfrak{p} + 3$ . . ., sau $\mathfrak{p}! + 1$ este un număr prim — întocmai cum în loc de a spune că această bucată de cretă este roșie, sau acea bucată de cretă este roșie, sau . . ., sau bucata de cretă de acolo este roșie, aș spune mai scurt: între aceste bucăți de cretă există una roșie. O astfel de afirmație că într-o totalitate finită „există" un obiect cu o proprietate corespunde pe deplin poziției noastre finite. Dimpotrivă, alternativa: „sau $\mathfrak{p} + 1$, sau $\mathfrak{p} + 2$, sau $\mathfrak{p} + 3$, sau . . . la infinit este un număr prim" este oarecum o conexiune infinită prin „sau" și o astfel de tranziție spre infinit, fără o discuție specială și eventual fără anumite măsuri de precauție, este tot așa de puțin permisă, după cum în analiză este trecerea de la produsul (*Produkt*) finit la cel infinit și, în genere, trecerea este în primul rînd fără sens.

În general o propoziție existențială de forma „există un număr cu cutare proprietate" are, din punct de vedere finit, un sens numai ca propoziție parțială, adică fiind o parte a unei propoziții determinată mai exact, al cărei conținut precis totuși este pentru multe aplicații neesențial.

Așadar ne lovim aici de transfinit prin descompunerea unei propoziții existențiale în părți, dintre care nici una nu se poate interpreta ca o conexiune prin „sau". La fel ajungem la propoziții transfinite, cînd negăm o afirmație generală, adică o afirmație valabilă pentru cifre oarecare. Astfel, de pildă, propoziția că, atunci cînd $\mathfrak{a}$ este o cifră, trebuie să avem totdeauna

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a},$$

din punct de vedere finit nu este susceptibilă de negare. Putem înțelege acest lucru dacă ne gîndim că propoziția menționată poate fi interpretată din acest punct de vedere nu ca o conexiune a unui număr infinit de mare de ecuații numerice legate prin „și", ci numai ca o judecată ipotetică, care afirmă ceva pentru cazul că există o cifră.

De aici rezultă mai ales faptul că, în sensul unei poziții finite, noi nu putem aplica alternativa conform căreia o ecuație ca cea de mai sus, conținînd o cifră nedeterminată, sau este satisfăcută pentru orice cifră, sau este infirmată printr-un contraexemplu. Căci această alternativă ca aplicație a lui „*tertium non datur*" se bazează, în esență, pe presupunerea că afirmația valabilității generale a acelei ecuații este susceptibilă de negare.

În orice caz, noi constatăm următoarele: dacă rămînem în domeniul propozițiilor finite, așa cum trebuie să procedăm totuși întîi și întîi, acolo domnesc relații logice complexe și această complexitate se amplifică pînă la a deveni insuportabilă atunci cînd ea combină pe „toți" și „există", și apare în propoziții întortocheate. În orice caz, acele legi logice, pe care oamenii le-au întrebuințat totdeauna de cînd gîndesc și pe care *Aristotel* le-a formulat, nu au valabilitate în domeniul finit. Acum am putea avea intenția de a enunța legile logice valabile pentru domeniul propozițiilor finite; aceasta însă nu ne-ar folosi, căci noi nu voim să renunțăm la folosirea legilor simple ale logicii *aristotelice* și nimeni, chiar dacă ar vorbi în limba îngerilor, n-ar putea opri oamenii de a nega alte afirmații, de a forma judecăți parțiale și de a aplica, „*tertium non datur*". Cum ne vom comporta noi în această situație?

Să ne amintim că sîntem matematicieni și, ca atare, ne-am mai găsit adeseori într-o situație penibilă asemănătoare și să ne amintim cum apoi din astfel de situații ne-a scăpat geniala metodă a elementelor ideale. Întocmai cum $\sqrt{-1}$ a fost introdus pentru a menține în cea mai simplă formă legile algebrei, de exemplu, legile privitoare la existența și numărul rădăcinilor unei ecuații, întocmai cum s-a întîmplat cu introducerea factorilor ideali pentru a menține legile simple ale divizibilității și la numerele algebrice întregi, așa cum noi, de exemplu, introducem un divizor ideal comun pentru numerele

$$2 \text{ și } 1+\sqrt{-5},$$

în timp ce un divizor real nu există, tot astfel aici trebuie să adăugăm propoziții ideale la propozițiile finite, pentru a menține regulile simple formale ale logicii *aristotelice* obișnuite. Și este o întîmplare ciudată că definițiile și raționamentele combătute cu atîta pasiune de *Kronecker* formează pandantul întocmai a ceea ce același *Kronecker* în teoria numerelor a admirat cu atîta entuziasm la *Kummer* și a elogiat, considerînd-o ca cea mai înaltă realizare matematică. Cum ajungem însă la propoziții ideale? Aici este interesant și în orice caz constituie o împrejurare favorabilă și încurajatoare faptul că, pentru a ajunge la calea spre ele, avem nevoie numai de a continua în mod firesc și consecvent evoluția pe care a luat-o deja teoria fundamentelor matematicii. De fapt, să ne amintim că chiar matematica elementară depășește aritmetica intuitivă. Metoda calculului algebric literal nu este inclusă în aritmetica concret-intuitivă, așa cum am conceput-o pînă acum. În aceasta formulele au fost folosite totdeauna numai pentru comunicare; literele au însemnat cifre și printr-o ecuație se comunica concordanța dintre două semne. Dimpotrivă, în algebră noi considerăm expresiile literale în sine ca niște structuri independente și propozițiile concrete ale aritmeticii sînt formalizate prin ele. În locul propozițiilor asupra cifrelor apar formule care în ce le privește sînt numai obiecte concrete pentru considerații intuitive; iar în locul demonstrației cu conținut aritmetic apare deducerea unei formule dintr-o altă formulă după anumite reguli.

Chiar în algebră apare deci o înmulțire a numărului de obiecte finite. Pînă acum, acestea au fost numai cifre ca I, II, IIII. Numai ele fuseseră obiectele studiului concret. Dar chiar în algebră, practica matematică trece dincolo de aceasta. Ba încă, chiar dacă o propoziție din punctul nostru de vedere finit este admisă în ce privește implicațiile ei concrete ca, de pildă, propoziția că totdeauna avem

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a},$$

unde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ înseamnă anumite cifre, noi nu alegem totuși această formă de comunicare, ci o înlocuim mai degrabă cu formula

$$a + b = b + a$$

și aceasta nu mai este o comunicare nemijlocită despre ceva concret, ci o anumită structură formală, al cărei raport cu propoziții finite cunoscute dinainte

$$2 + 3 = 3 + 2,$$
$$5 + 7 = 7 + 5,$$

constă în faptul că în acea formulă înlocuim *a*, *b* cu cifrele 2, 3, 5, 7 şi printr-un procedeu de demonstraţie — deşi foarte simplu — dobîndim aceste propoziţii particulare finite. Astfel ajungem la concepţia că a, b, $=$, $+$ ca şi întreaga formulă

$$a + b = b + a$$

nu au în sine nici un fel de semnificaţie, ca şi cifrele; este evident însă că din ele se pot deduce formule, cărora noi le atribuim o semnificaţie, şi anume concepîndu-le ca nişte comunicări de propoziţii finite. Dacă generalizăm această concepţie, matematica devine un stoc de formule, şi anume: mai întîi formule cărora le corespund comunicări concrete de propoziţii finite, deci în esenţă ecuaţii sau inecuaţii numerice şi, în al doilea rînd, de alte formule care nu au în sine nici un fel de semnificaţie şi sînt structurile ideale ale teoriei noastre.

Care a fost ţelul nostru? Noi am găsit, în matematică, pe de o parte, astfel de propoziţii finite care conţineau numai cifre ca

$$3 > 2,\ 2 + 3 = 3 + 2,\ 2 = 3,\ 1 \neq 1,$$

care din punctul nostru de vedere finit sînt nemijlocit intuitive şi imediat inteligibile; acestea sînt susceptibile de negaţie, sînt adevărate sau false, putem face cu ele în maniera logicii aristotelice ce vrem; principiul contradicţiei este valabil, adică una din propoziţii şi negaţia ei nu pot fi ambele adevărate; *„tertium non datur”* este valabil, adică una din două: sau propoziţia sau negaţia ei este adevărată. Dacă spun: propoziţia este falsă aceasta echivalează cu: negaţia propoziţiei este adevărată. În afară de aceste propoziţii elementare care nu prezintă nici un fel de probleme, am întîlnit propoziţii finite cu caracter problematic, de pildă propoziţii care nu se puteau descompune. În final noi am introdus propoziţiile ideale pentru ca legile obişnuite ale logicii să fie universal valabile. Dar pentru că propoziţiile ideale, adică formulele, neexprimînd afirmaţii finite, nu au în sine nici un fel de semnificaţie, operaţiile logice nu pot fi aplicate faţă de ele concret ca în cazul propoziţiilor finite. Este deci necesar să formalizăm operaţiile logice şi chiar demonstraţiile matematice; aceasta cere o transpunere a relaţiilor logice în formule astfel, încît noi să adăugăm la semnele matematice şi semne logice, ca

$\&$,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$-$
şi	sau	implică	nu

şi în afară de variabilele matematice *a*, *b*, *c*, ... trebuie să folosim şi variabile logice, anume variabilele propoziţionale *A*, *B*, *C*...

Cum se poate face acest lucru? Aici a intervenit, spre norocul nostru, aceeaşi armonie prestabilită pe care o observăm de atîtea ori în istoria dezvoltării ştiinţei — care l-a ajutat pe *Einstein* cînd pentru teoria sa gravitaţională a găsit complet elaborat calculul general al invarianţilor: noi găsim calculul logic elaborat deja dinainte. Desigur acesta a fost creat iniţial dintr-un punct de vedere cu totul diferit şi, ca atare, semnele calculului logic au fost introduse iniţial numai pentru comunicare; dar sîntem consecvenţi dacă acum contestăm orice semnificaţie atît semnelor logice, cît şi celor matematice şi declarăm că nici formulele calculului logic nu au în sine nici o semnificaţie, ci sînt propoziţii ideale. În calculul logic noi posedăm un limbaj simbolic capabil de a prinde în formule propoziţii matematice şi de a exprima raţionamentul logic prin procese formale. Întocmai ca la trecerea de la aritmetica concretă la algebră, noi considerăm semnele şi simbolurile de operaţie ale calculului logic desprinse de semnificaţia lor concretă. Prin aceasta noi căpătăm în fine în locul ştiinţei matematice concrete, comunicată prin limbaj obişnuit, un stoc de formule cu semne matematice şi logice care iau naştere unele din altele după anumite reguli. Axiomelor matematice le corespund anumite formule, iar raţionamentului concret îi corespund regulile conform cărora se succed formulele: raţionamentul concret este deci înlocuit printr-o activitate exterioară conformă unor reguli; prin aceasta atît pentru axiomele înseşi (care deşi înţelese iniţial în mod naiv ca adevăruri fundamentale, încă de multă vreme au fost privite în axiomatica modernă numai ca nişte relaţii între concepte), cît şi pentru calculul logic (care iniţial trebuia să fie numai un alt limbaj) s-a realizat acum trecerea riguroasă de la tratarea naivă la cea formală.

Să lămurim pe scurt cum a fost formalizată demonstraţia matematică. Anumite formule, care, aşa cum spuneam, servesc ca pietre de construcţie ale edificiului formal al matematicii se numesc axiome. O demonstraţie matematică este o figură care trebuie să fie accesibilă intuiţiei noastre; demonstraţia constă din deducţii conform schemei de deducţie

$$\begin{array}{c} S \\ S \rightarrow T \\ \hline T \end{array}$$

unde de fiecare dată oricare premisă, adică oricare dintre formulele respective S şi $S \rightarrow T$ sau este o axiomă, (respectiv apare dintr-o axiomă prin substituţie), sau concordă cu o formulă finală a unei deducţii anterioare din demonstraţie (respectiv apare din ea prin substituţie). O formulă se va numi demonstrabilă dacă este sau o axiomă, sau o formulă finală a unei demonstraţii . . .

Fundamentele matematicii (1928)

. . . .

Dacă ne propunem acum să construim matematica, atunci vom lua mai întîi în considerare aritmetica elementară ; ştim că noi putem căpăta şi demonstra adevărurile ei prin reflecţii concret-intuitive. În acelaşi timp, formulele care apar sînt aplicate numai pentru comunicare. Literele înseamnă cifre şi printr-o ecuaţie se comunică concordanţa dintre două semne.

În algebră altfel stau lucrurile ; în algebră noi considerăm expresiile literale în sine ca structuri independente, şi propoziţiile aritmeticii, incluse în algebră, sînt formalizate prin ele. În locul cifrelor obişnuite intervin formule care, la rîndul lor, constituie acum obiecte concrete de studiu intuitiv, şi în locul demonstraţiei aritmetice concrete intervine deducerea unei formule dintr-o altă formulă după anumite reguli.

Algebra depăşeşte deci, în esenţă, aritmetica. Aici, de pildă, formula

$$1 + a = a + 1,$$

în care a este o variabilă numerică propriu-zisă, nu mai este pur şi simplu comunicarea a ceva concret, ci o anumită structură formală, o formulă demonstrabilă care în sine nu are nici un fel de semnificaţie şi a cărei demonstraţie nu poate fi efectuată concret, ci are nevoie de utilizarea axiomei inducţiei.

Formulele $1 + 3 = 3 + 1$, $1 + 7 = 7 + 1$, care trebuie realizate şi prin reflecţie concretă, pot fi obţinute din acea formulă algebrică numai printr-un procedeu de demonstraţie, înlocuind formal pe a cu cifrele 3 şi 7, deci întrebuinţînd o regulă de substituţie.

Astfel chiar matematica elementară conţine mai întîi formule cărora le corespund comunicări concrete de propoziţii finite (deci în esenţă ecuaţii sau inecuaţii numerice sau comunicări mai complicate compuse din acestea) şi pe care noi le putem numi, de asemenea, propozițiile reale ale teoriei și, în al doilea rînd, formule, care nu au în sine nici un fel de semnificație, ca și cifrele aritmeticii concrete, ci sînt numai obiecte pentru aplicarea regulilor noastre și trebuie să fie privite ca structuri ideale ale teoriei.

Aceste reflecții arată că noi avem nevoie numai să continuăm în mod firesc și consecvent evoluția pe care a luat-o procedeul matematic deja obişnuit pînă acum, pentru a ajunge la concepția formulelor ca propoziții ideale. Și modul este firesc și consecvent atunci cînd, la fel cu variabilele matematice, atît semnele logice [pentru : implică, și, sau, nu, toți, există]

$$\rightarrow,\ \&,\ V,\ -,\ (x),\ (Ex),$$

cît și variabilele logice, adică variabilele propoziționale

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,$$

le punem pe același plan cu cifrele și literele din algebră și le înțelegem de asemenea ca semne care nu au în sine nici o semnificație, ci servesc numai ca pietre de construcție pentru propoziții ideale.

Avem și un motiv să urgentăm extinderea punctului de vedere formal al algebrei asupra întregii matematici. Prin această extindere sîntem scutiți de o dificultate principială, care se manifestă ca valabilă încă în aritmetica elementară. Iau ca exemplu iarăși o ecuație

$$a + 1 = 1 + a.$$

Dacă am considera-o adevărată ca expresie a unei comunicări

$$\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$$

unde $\mathfrak{a}$ înseamnă un număr oarecare dat, atunci această comunicare nu ar fi susceptibilă de negație, pentru că chiar propoziția că există un număr $\mathfrak{a}$ pentru care rezultă

$$\mathfrak{a} + 1 \neq 1 + \mathfrak{a}$$

nu are nici un sens finit; căci nu se pot verifica chiar toate numerele. Așadar, în sensul poziției finite, n-am putea să aplicăm alternativa conform căreia o ecuație ca cea de sus, în care apare o cifră nedeterminată, sau este satisfăcută pentru fiecare cifră, sau poate fi infirmată printr-un contraexemplu. Căci această alternativă, ca aplicaţie a lui „*tertium non datur*", se bazează, în esenţă, pe supoziţia că afirmaţia valabilităţii generale a acelei ecuaţii este susceptibilă de negaţie.

Însă noi nu putem renunţa la aplicarea lui „*tertium non datur*" şi nici la aplicarea tuturor celorlalte legi ale logicii *aristotelice* exprimate în axiomele noastre, căci fără ea construcţia analizei nu este posibilă.

Dificultatea esenţială care se află aici se evită numai prin propoziţiile ideale. Dacă adăugăm la propoziţiile reale propoziţiile ideale, obţinem un sistem de propoziţii în care regulile simple ale logicii *aristotelice* au valabilitate în întregime şi toate metodele obişnuite ale raţionamentului matematic se menţin de drept. Aşa cum, de exemplu, în aritmetica elementară, numerele negative sînt indispensabile, aşa cum aritmetica modernă şi algebra devin posibile de-abia prin idealele *Kummer — Dedekind*, tot astfel matematica ştiinţifică este posibilă de-abia prin introducerea propoziţiilor ideale.

Există, desigur, o condiţie, una singură, dar incontestabilă, de care se leagă totdeauna aplicarea metodei elementelor ideale; aceasta este dovada necontradicţiei: lărgirea prin adăugarea elementelor ideale are loc numai atunci cînd prin aceasta nu se generează în vechiul domeniu, mai îngust, nici o contradicţie, dacă deci relaţiile care rezultă prin eliminarea structurilor ideale pentru vechile structuri sînt totdeauna valabile în vechiul domeniu.

Această problemă a necontradicţiei este însă, în situaţia actuală, complet accesibilă tratării. Este vorba de a arăta că, introducînd obiectele ideale, nu pot rezulta două propoziţii opuse din punct de vedere logic

$$\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}}$$

Acum din axiomele negaţiei urmează ... formula logică

$$(\mathfrak{A}\ \&\ \overline{\mathfrak{A}}) \rightarrow \mathfrak{B}$$

Dacă aici punem pentru $\mathfrak{A}$ propoziţia respectivă şi pentru $\mathfrak{B}$ inecuaţia

$$0 \neq 0$$

obţinem $(\mathfrak{A}\ \&\ \overline{\mathfrak{A}}) \rightarrow (0 \neq 0)$.

Şi cu această formulă din $\mathfrak{A}$ şi $\overline{\mathfrak{A}}$ putem deduce formula $0 \neq 0$. De aceea, pentru a dovedi necontradicţia, avem nevoie numai să arătăm că prin regulile enunţate într-o demonstraţie nu poate rezulta din axiomele noastre formula finală

$$0 \neq 0$$

deci că $0 \neq 0$ nu este o formulă demonstrabilă. Şi aceasta este o problemă care, în principiu, aparţine tot domeniului subordonat intuiţiei, aşa cum este, de pildă, în aritmetica concretă problema demonstraţiei iraţionalităţii lui $\sqrt{2}$, adică a demonstraţiei că este imposibil să găsim două cifre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, care să se afle în relaţia $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$, unde deci trebuie arătat că nu se pot indica două cifre de o anumită natură; respectiv, ne interesează să arătăm că nu se poate indica o demonstraţie de o anumită natură. Însă o demonstraţie formalizată, ca şi o cifră, este un obiect concret şi perceptibil în ansamblu. Ea este de la început pînă la sfîrşit comunicabilă. Chiar şi aspectul caracteristic formulei finale — forma „$0 \neq 0$" — este o proprietate a demonstraţiei, proprietate care se poate stabili concret. De fapt această dovadă se poate produce şi astfel noi sîntem îndreptăţiţi să introducem propoziţiile noastre ideale. În acelaşi timp recunoaştem că aşa rezolvăm o problemă care a devenit de multă vreme arzătoare, anume problema de a demonstra necontradicţia axiomelor aritmetice.

. . . .

Jocul cu formule, pe care *Brouwer* îl apreciază cu atîta dispreţ are — în afară de valoarea matematică — şi o importantă semnificaţie filozofică generală. Acest joc cu formule se realizează anume după anumite reguli determinate, care constituie o expresie a tehnicii gîndirii noastre. Aceste reguli formează un sistem închis, care poate fi descoperit şi indicat în chip definitiv. Ideea fundamentală a teoriei mele despre demonstraţie nu este altceva decît de a descrie activitatea intelectului nostru, de a accepta un protocol asupra regulilor, conform cărora gîndirea noastră procedează de fapt. Gîndirea se desfăşoară tocmai paralel cu vorbirea şi scrierea, prin formare şi juxtapunere de propoziţii.

În timp ce *Hilbert* în publicaţiile sale — care în părţile propriu-zis „metamatematice" au putut fi reproduse numai cu titlu de indicaţii — a discutat cel puţin în linii mari numai cîteva cazuri particulare mai simple, elevii săi, *W. Ackermann* şi *J. v. Neumann*, au depus eforturi în vederea realizării exacte şi fără lacune. Un timp s-a crezut că s-a găsit demonstraţia completă a necontradicţiei, dar aceasta s-a dovedit eronat. Motivul mai adînc al acestui insucces l-a arătat *Kurt Gödel* în lucrarea sa *Despre propoziţiile formal nedecidabile din Principia Mathematica şi din sistemele înrudite I* (în „Monats. f. Math. u. Phys.", vol. 38, [1931], Caietul 1) ; el a dovedit că demonstraţia necontradicţiei unui formalism care include logica obişnuită şi aritmetica, nu poate fi realizată cu simple instrumente care se menţin în cadrul formalismului însuşi. Aşadar, în demonstraţia necontradicţiei aritmeticii trebuie să intervină consideraţii care să depăşească cadrul strict finit în sens clasic. (Introducerea la articolul lui Gödel urmează ca anexă la p. 433)

Gerhard Gentzen este primul care a reuşit să realizeze demonstraţia necontradicţiei pentru aritmetica pură în toată întinderea ei prin folosirea concretă a numerelor ordinale transfinite ale lui *Cantor* pînă la un număr ordinal determinat, constructiv definibil (aşa-numitul „primul număr epsilon"). Numerele ordinale transfinite funcţionează în acest caz ca instrumente de descriere a felului şi a gradului de „complicaţie", adică, în esenţă, a ierarhizării (*Ineinanderschachtelung*) simbolurilor matematice ale formalismului care exprimă deducţia propoziţiilor aritmetice. Pentru aceasta n-ar fi ajuns numerele finite oricît de mari. În ciuda acestei depăşiri a cadrului clasic al aritmeticii, punctul de vedere finit sau constructiv nu a fost totuşi depăşit în principiu de către *Gentzen*.

Pentru a face oarecum clară această posibilitate specifică, să prezentăm, în primul rînd, o analiză fenomenologică a lui **Edmund Husserl** (1859—1938) (din *Idei pentru o fenomenologie pură*, Halle, a. S., 1913, §§ 100—101). (Asupra terminologiei: *noesis* înseamnă act de conştiinţă, *noema* — obiectul mintal al acestuia).

5. E.Husserl despre treptele noetico-noematice şi caracteristica lor

Structuri esenţiale ierarhizate ale reprezentărilor în noesis şi noema

Toate tipurile, tratate pînă acum, de modificări ale reprezentărilor sînt totdeauna susceptibile de o altă structurare în trepte, astfel încît intenţionalităţile să constituie o structură cu trepte sau, mai degrabă, să se structureze ierarhizîndu-se (ca nişte cutii care se includ succesiv) într-un mod unic în *noesis* şi în *noema*.

Există simple re-prezentări (Vergegenwärtigungen), modificări simple ale percepţiilor. Dar există şi re-prezentări de treapta a doua, a treia şi, în esenţă, de o treaptă oarecare. Ca exemplu ne pot servi amintirile „în" amintiri. Trăind în amintire noi

„realizăm” un complex de experiențe subiective în modul de memorare. De acest lucru ne convingem prin faptul că noi „în” amintire reflectăm (ceea ce la rîndul său este o modificare a re-prezentării unei reflectări originare) și apoi găsim complexul de experiențe subiective caracterizat ca ceva „trăit” conform amintirii. Trăind experiențele astfel caracterizate, noi putem reflecta sau nu asupra lor, pot apărea chiar amintiri caracterizate ca „amintiri care au fost trăite” și privirea poate fi îndreptată prin ele spre amintirea de treapta a doua. În complexul de experiențe subiective cu modificări secundare pot apărea din nou amintiri și tot așa „idealiter” la infinit.

O simplă schimbare a semnului din față (al cărui specific vom învăța să-l înțelegem) transferă toate aceste întîmplări în tipul de fantazie liberă, rezultînd fantazii de fantazii și tot așa pe orice treaptă a ierarhizării.

Tot astfel apoi, în continuare, combinațiile (*Mischungen*). Nu numai că fiecare re-prezentare în conștiință, prin natura sa, ascunde în sine, în raport cu treapta imediat inferioară ei, modificări ale re-prezentării percepțiilor, care intervin prin admirabila reflectare în re-prezentare din privirea intelectivă ; în unitatea unui fenomen de re-prezentare, alături de re-prezentările percepțiilor putem găsi în același timp re-prezentări de amintiri, așteptări, fantazii etc., cînd re-prezentările respective pot fi chiar de oricare din aceste tipuri. Și toate acestea pe trepte diferite.

Acest lucru este valabil și despre tipurile complexe ale reprezentării reproducătoare și reprezentării de simboluri. Să luăm ca exemplu structuri de reprezentări, complicate și totuși ușor inteligibile, din reprezentări de treaptă superioară. Un nume amintește prin actul numirii Galeria din Dresda și de ultima noastră vizită acolo: ne plimbăm prin săli, stăm în fața unui tablou de Teniers, care reprezintă o galerie de tablouri. Dacă adăugăm că tablourile acestei galerii ar reprezenta iarăși tablouri care la rîndul lor ar reprezenta inscripțiile lizibile etc., ne dăm seama ce structură de reprezentări incluse una în alta și ce inferențe (*Mittelbarkeiten*) în raport cu obiectele inteligibile se pot produce de fapt. Pentru a da exemplu de intuiții esențiale, îndeosebi de intuiție a posibilității ideale de continuare arbitrară a ierarhizării în formă de cutii incluse succesiv, nu este nevoie însă de cazuri așa de complicate.

În toate structurile în trepte de acest fel, care conțin în articulațiile lor modificări iterate de re-prezentare, se constituie, evident, noeme de structură corespunzătoare în trepte. În conștiința reproducătoare de treapta a doua o „imagine" este în sine însăși o imagine de treapta a doua caracterizată ca imagine a unei imagini. Dacă ne amintim cum ne-am amintit ieri un eveniment trăit în tinerețe, atunci noema „eveniment trăit în tinerețe" are în ea însăși caracterizarea ca amintire de treapta a doua. Astfel pretutindeni:

Fiecărei trepte noematice îi corespunde o caracteristică a treptei ca un fel de indice prin care fiecare lucru caracterizat se arată că aparține treptei sale—putînd fi de altfel un obiect primar sau situat într-o direcție vizuală reflectivă oarecare. Căci fiecărei trepte îi aparțin reflecții posibile în ea, astfel de pildă reflecțiile referitoare la lucrurile amintite în a doua treaptă a amintirii, asupra percepțiilor chiar a acestor lucruri, percepții care aparțin aceleiași trepte (deci re-prezentate în a doua treaptă).

Mai departe: Fiecare treaptă noematică este ,,reprezentare" ,,despre" datele celor următoare. Însă ,,reprezentarea" nu înseamnă aici reprezentare trăită, iar ,,despre" nu exprimă aici relația dintre conștiință și obiectul din conștiință. Este oarecum o intenționalitate noematică față de cea noetică. Aceasta din urmă poartă în sine pe prima ca pe un corelat al conștiinței și intenționalitatea sa parcurge într-un anumit fel linia celei noematice.

Acest lucru devine mai clar atunci cînd îndreptăm privirea distinctivă a eului asupra conștiinței obiectivate. Această privire străbate atunci noemele succesiunii de trepte — pînă la obiectul ultimei noeme, obiect pe care ea nu-l străbate, ci îl fixează. Privirea poate însă să se plimbe și de la treaptă la treaptă și, în loc să le străbată pe toate, este orientată mai degrabă în chip fixator asupra datelor fiecăreia, acest lucru făcîndu-se sau printr-o privire cu direcție ,,dreaptă", sau cu direcție reflectată.

În exemplul de mai sus: Privirea poate rămîne pe treapta Galeria de la Dresda: noi mergem ,,în memorie" în Dresda și ne plimbăm prin Galerie. Apoi putem să trăim în contemplarea tablourilor, iarăși în cadrul memoriei, și să ne găsim acum în lumile tablourilor. Apoi în conştiinţa de imagini de treapta a doua întorşi către Galeria de pictură, contemplăm tablourile ei; sau reflectăm în mod gradat asupra noeselor ş.a.m.d.

Această varietate de direcţii posibile ale privirii ţine, în esenţă, de varietatea intenţionalităţilor corelate succesiv şi fundate una pe alta şi oriunde găsim fundări analoge — şi în cele ce urmează vom cunoaşte şi altele cu totul diferite — rezultă posibilităţi analoge de reflecţie variabilă.

Nu mai trebuie să spunem cît de multă nevoie au aceste relaţii de o cercetare care să pătrundă ştiinţific în esenţă.

Variatele întrepătrunderi, de tipul cutiilor care se conţin succesiv, ale treptelor de intenţionalitate noetică şi noematică, descrise aici de *Husserl*, sînt în număr nemărginit. Deşi *Husserl* nu exprimă acest lucru explicit, este posibil acum să reflectăm asupra unui şir infinit numărabil de reflecţii ca întregi. Natural că infinit de multele reflecţii nu trebuie să ni le reprezentăm pe toate în particular ca efectuate. Însă un fel de perspectivă, un fenomen ,,orizont", un ,,şi aşa mai departe" (aşa cum spune *Husserl* într-un alt loc) este dat. Şi asupra acestei serii nemărginite de acte reflexive, date în chip ,,perspectivist" se mai poate reflecta încă o dată. Un act final de reflecţie, astfel perfectibil, nu poate avea nici un indice finit de treaptă, ci trebuie să primească indicele ω (primul număr ordinal transfinit după *Cantor*). Asupra acestui act ,,final" de reflecţie se poate din nou reflecta; indicele este atunci $\omega + 1$. Şi astfel se poate parcurge la infinit şirul indicilor enumeraţi, prin numerele ordinale transfinite — în măsura în care numerele ordinale utilizate se pot defini constructiv şi prin urmare se pot nota exact şi fără echivoc.

Treptele de reflecţie au fost descrise mai înainte din punct de vedere noetic ca acte ierarhizate în felul cutiilor care se conţin succesiv; în mod corespunzător se pot descrie, evident, şi structurile noematice (obiective) asociate, după felul complicaţiei lor.

Fiecare expresie matematică simbolică desemnează o astfel de ,,noemă" sau de obiect mental; un anumit fel de intenţionalitate noematică ţine chiar de sensul semnelor complexe concepute pur formal, care ,,nu semnifică nimic". De aceea, însuşi punctul de vedere ,,metamatematic" al teoriei demonstraţiei va trebui să distingă un număr transfinit de trepte de complicaţie, adică de intenţii noematice, în complexele de simboluri percepute vizual; de fapt şi *Gentzen* a făcut acest lucru.

Înainte de a ajunge la *Gentzen*, să citim încă un pasaj interesant din scrierile de tinereţe ale lui *Schelling*, în care acest filozof a descris cu claritate — cu mult înaintea lui *Cantor* — posibilităţile de ierarhizare transfinite de acte reflexive.

6. Schelling despre reflecțiile transfinite

Din *Scrisori asupra dogmatismului și criticismului* (1795):

Singurul temei al faptului că nu ne putea elibera niciodată de propriul nostru eu rezidă în libertatea absolută a ființei noastre, libertate datorită căreia eul nu poate fi în noi un lucru, un obiect, susceptibil de o determinare obiectivă. De aici provine faptul că eul nostru nu poate fi înțeles niciodată ca termen intermediar într-un șir de reprezentări, ci de fiecare dată el intervine din nou ca prim termen în fața fiecărui șir, care fixează tot șirul reprezentărilor: de asemenea tot de aici provine faptul că eul activ deși determină în fiecare caz particular, totuși el nu este concomitent determinat, deoarece se sustrage oricărei determinări obiective și nu poate fi determinat decît prin sine însuși, deci este în același timp și cel determinat și cel care determină.

(Se observă cu ușurință că *Schelling* face aluzie în ultimele propoziții chiar la situația care 100 de ani mai tîrziu va provoca antinomia lui *Burali-Forti*)

7. Demonstrația lui Gentzen despre necontradicția aritmeticii

Ajungem acum la lucrarea fundamentală a lui *Gentzen*. Metoda lui *Gentzen* de demonstrare a necontradicției este în principiu următoarea : Trebuie să se demonstreze că o contradicție nu poate fi dedusă în mod valabil. În acest scop, o deducție dată în prealabil este „redusă" la una mai simplă care, în caz că prima este valabilă, este și ea, la rîndul ei, corectă. Deci dacă deducția inițială ar duce la o contradicție, atunci și cea „redusă", care este mai simplă, ar duce la o contradicție. Adică: problema necontradicției unei deducții mai complicate este redusă la problema necontradicției unei deducții mai simple. Aceasta se repetă de mai multe ori pînă cînd se ajunge la o deducție corectă oarecare (în general la formule numerice simple) care, evident, nu mai poate conține apoi nici o contradicție. (Principiul este același ca în cazul în care se „demască" o falsă identitate algebrică prin înlocuirea literelor cu anumite numere, ajungîndu-se prin calcul în cele două părți ale identității la numere diferite).

Dificultatea principală în întreaga demonstrație constă în a dovedi că un număr finit de etape ale reducției duce, cu certitudine, la scop în fiecare caz.

Gentzen spune despre acest lucru următoarele:

Pentru a dovedi că procedeul (reducerii) este finit, va trebui să se arate că fiecare etapă a reducției simplifică într-un anumit sens o deducție. În acest scop asociez fiecărei deducții un număr ordinal, care reprezintă o măsură pentru gradul de complicație a deducției. Apoi se poate arăta că, la fiecare etapă a reducerii la o deducție, numărul ordinal respectiv devine mai mic. Prin aceasta însă nu este absolut asigurat caracterul finit al procedeului de reducție; ordonarea deducțiilor (corespunzătoare ordinului de mărime al numerelor lor ordinale) este de un fel particular, atunci cînd se poate ca o deducție să se înserieze, din punctul de vedere al gradului de complicație, înaintea unui număr infinit de alte deducții... Acest lucru poate interveni într-un mod ierarhizat în mai multe feluri. Ca urmare, numerele ordinale au caracter de numere cardinale transfinite și înțelegerea inductivă a totalității lor nu este posibilă prin inducție completă obișnuită, ci numai prin inducție transfinită, a cărei valabilitate are nevoie de o demonstrație specială.

Urmează definiția dată de *Gentzen* „numerelor ordinale transfinite" și notarea lor prin fracții zecimale finite, ordonate după mărimea lor.

......

Definiția (recursivă) a numerelor ordinale. Ca „numere ordinale" eu folosesc anumite fracții zecimale finite pozitive, care sînt formate după regula următoare:

Numerele ordinale cu partea întreagă 0 sînt următoarele numere: 0,1, 0,11, 0,111, 0,1111, ..., adică în general: orice număr cu partea întreagă 0, a cărui parte zecimală (mantisă) constă dintr-un număr finit de 1; la fel numărul 0,2.

Adăugarea de zerouri la sfîrșit nu va fi permisă nici în cele ce urmează; modul de scriere trebuie să nu prezinte echivocuri. Spun că o mantisă este mai mică decît altă mantisă dacă această relație subzistă între numerele generate prin punerea înainte a lui „0".

Mantisa unui număr ordinal cu partea întreagă $\rho + 1$ ($\rho \geqslant 0$) se obține luîndu-se un număr (cel puțin unul) de numere ordinale diferite între ele cu partea întreagă ρ, avînd mantisele ordonate după mărime astfel încît cea mai mare vine întîi, cea mai mică ultima și scriindu-se de fiecare dată $\rho + 1$ zerouri între două mantise succesive. Toate numerele care se vor obține în acest mod din numerele ordinale cu partea întreagă ρ, și nu altele, sînt numere ordinale cu partea întreagă $\rho + 1$.

Exemple de numere ordinale:

0,1111; 1,1101; 1,2; 2,111; 2,201 001 101 001 1;
3,201 002 000 1.

Se poate vedea clar dintr-un număr dat cu partea întreagă $\rho + 1$, din care numere cu partea întreagă ρ este el produs după regula de mai sus. Căci un număr cu partea întreagă σ nu poate desigur conține mai mult decît σ zerouri succesive într-un loc oarecare.

. . . . . .

Pe baza acestei definiții se face acum demonstrația de finitate cerută.

Demonstrația de finitate a procesului de reducție

Cîteva fapte despre ordonarea după mărime a numerelor ordinale:

Fiecărui număr α cu partea întreagă $\rho(\rho \geqslant 0)$ îi asociez sistemul $\mathfrak{S}(\alpha)$ al acelor numere cu partea întreagă $\rho + 1$, la a căror formare cel mai mare număr ordinal folosit cu partea întreagă ρ este numărul α. Fiecare număr ordinal cu partea întreagă $\rho + 1$ aparține în mod neechivoc unui astfel de sistem $\mathfrak{S}(\alpha)$. Dacă α_1 este mai mic decît α_2, atunci orice număr din $\mathfrak{S}(\alpha_1)$ este mai mic decît orice număr din $\mathfrak{S}(\alpha_2)$. Ordonarea sistemelor $\mathfrak{S}(\alpha)$ corespunde deci ordonării numerelor α. Pentru ordonarea numerelor (cu partea întreagă $\rho + 1$) înăuntrul unui sistem $\mathfrak{S}(\alpha)$ este valabil ceea ce urmează: cel mai mic număr dinăuntrul lui $\mathfrak{S}(\alpha)$ este numărul $\alpha + 1$. Celelalte numere din $\mathfrak{S}(\alpha)$ corespund prin ordonare izomorfă totalității numerelor cu partea întreagă $\rho + 1$, care sînt mai mici decît $\alpha + 1$, în felul următor: fiecare număr din $\mathfrak{S}(\alpha)$, în afară de $\alpha + 1$, provine din $\alpha + 1$, adăugîndu-i $\rho + 1$ zerouri și apoi mantisa oricăruia din numerele cu partea întreagă $\rho + 1$, care sînt mai mici decît $\alpha + 1$. Totodată se transpune ordonarea lor.

Justețea tuturor acestor afirmații este ușor de sesizat din definiția numerelor ordinale. Cu ajutorul lor este util să facem intuitivă ordonarea numerelor ordinale cu partea întreagă 1, ca și, de pildă, 2 și 3*.

---

* Pentru cel care cunoaște teoria mulțimilor trebuie să observăm: Sistemul „numerelor ordinale“ folosite de mine este bine ordonat prin relația $<$, și anume numerelor cu partea întreagă 0, 1, 2, 3, 4, ... etc. le corespund respectiv numerele ordinale

Acum afirm (propoziția „inducției transfinite”):

Toate numerele ordinale, atunci cînd le parcurgem după mărimea crescătoare, sînt „accesibile” (*erreichbar*) în următorul sens: Primul număr 0,1 se consideră „accesibil”; dacă, în continuare, toate numerele mai mici decît un număr β sînt recunoscute ca „accesibile”, atunci și β este considerat ca „accesibil”.

Demonstrație. Mai întîi 0,1 este „accesibil”, deci și 0,11, deci și 0,111 etc.; în general, prin inducție completă se obține: orice număr mai mic decît 0,2 este accesibil. Prin urmare și 0,2 este accesibil și prin aceasta toate numerele cu partea întreagă 0. Acum aplic inducția completă, adică presupun că s-a demonstrat accesibilitatea tuturor numerelor pînă la acelea cu partea întreagă $\rho (\rho \geqslant 0)$ inclusiv și acum ea trebuie demonstrată pentru numerele cu partea întreagă $\rho + 1$. Primul dintre aceste numere adică numărul cu mantisa 1 este accesibil. Acum, atenție: parcurgerea numerelor cu partea întreagă ρ s-a efectuat deja. Fiecărui astfel de număr α îi corespunde un sistem $\mathbf{S}(\alpha)$ de numere cu partea întreagă $\rho + 1$; acest sistem constă din numărul $\alpha + 1$ și un sistem ordonat izomorf cu numerele care au partea întreagă $\rho + 1$ și care sînt mai mici decît $\alpha + 1$. A parcurge numerele cu partea întreagă $\rho + 1$ nu înseamnă altceva decît a parcurge sistemele $\mathbf{S}(\alpha)$ în același mod cum au fost parcurse numerele α cu partea întreagă ρ; dacă s-a recunoscut un număr $\alpha + 1$ ca accesibil, atunci toate celelalte numere ale sistemului $\mathbf{S}(\alpha)$ sînt în același timp evident

---

transfinite $\omega + 1$, $2^{\omega+1} = \omega + \omega$, $2^{\omega+\omega} = \omega \cdot \omega$, $2^{\omega\cdot\omega} = \omega^{\omega}$, $2^{(\omega^{\omega})} = \omega^{(\omega^{\omega})}$ .... etc.; sistemului întreg îi corespunde „primul număr“. (Pentru demonstrație să ne gîndim că trecerea descrisă în text de la numerele cu partea întreagă ρ la numerele cu partea întreagă $\rho + 1$ corespunde legii de definiție a puterii lui 2, și să luăm în considerație mai departe regulile de calcul pentru numere ordinale transfinite.) „Propoziția inducției transfinite“ nu enunță altceva decît valabilitatea inducției transfinite pentru această secțiune a celei de-a doua clase de numere. Dificultățile teoriei generale a mulțimilor nu intervin, desigur, în demonstrația necontradicției, căci în această demonstrație conceptele și propozițiile corespunzătoare sînt dezvoltate cu totul independent, într-un mod mult mai elementar decît în teoria mulțimilor, unde ele posedă pentru aceasta o generalitate mult mai mare.

accesibile; trebuie numai să se parcurgă acest sistem absolut în exact același mod ca sistemul izomorf deja parcurs al numerelor (cu partea întreagă $\rho + 1$) mai mici decît $\alpha + 1$. Astfel se pot parcurge toate numerele cu partea întreagă $\rho + 1$, bazîndu-ne pe parcurgerea, deja efectuată, a numerelor cu partea întreagă ρ.

Totalității numerelor α (cu partea întreagă ρ), care sînt mai mici decît un număr α_0, îi corespunde la numărul $\alpha_0 + 1$ (cu partea întreagă $\rho + 1$) totalitatea numerelor (cu $\alpha < \alpha_0$) care aparțin sistemelor $\mathbf{S}(\alpha)$.

. . . .

Cum stăm, în sfîrșit, cu demonstrația finității?

Conceptul de „accesibil" în cazul „principiului inducției transfinite" este foarte particular. Adecvarea sa la un număr dat oarecare nu este cîtuși de puțin decidabilă din capul locului; de aceea el nu are de la început semnificație, căci o „semnificație în sine" este chiar refuzată. El dobîndește mai degrabă un sens exprimat pentru un anumit număr de-abia o dată cu demonstrația valabilității sale pentru acel număr. Acest lucru este absolut admisibil; aceeași situație se menține la toate propozițiile transfinite dacă voim să le atribuim un sens finit. Definiția conceptului „accesibil" este formulată în mod corespunzător acestei concepții prin enunțul „dacă toate numerele mai mici ca β sînt deja recunoscute ca accesibile, atunci și β este accesibil. În această formulare nu rezidă un cerc vicios, ci definiția este complet constructivă; β este declarat ca accesibil de-abia după ce toate numerele mai mici ca β sînt deja recunoscute ca accesibile. Expresia „toți" care apare cu această ocazie trebuie, firește, să fie înțeleasă în mod finit; este vorba totdeauna despre o totalitate cu o regulă constructivă de generare pentru toate elementele.

În ce privește demonstrația propoziției inducției transfinite avem de spus următoarele: din felul definiției conceptului „accesibil" rezultă că în demonstrație trebuie să aibă loc o „parcurgere" a tuturor numerelor ordinale în ordine crescătoare. Atunci cînd se tratează numerele cu partea întreagă 0, avem de observat următoarele: totalitatea infinită a numerelor mai mici ca 0,2 este depășită printr-un singur gînd: se poate continua demonstrația oricît de departe înauntrul acestei totalități; deci întreaga totalitate poate fi considerată ca rezolvată. Această concepție „potențială" a „parcurgerii" unei totalități infinite trebuie menținută în toată demonstrația...

Să considerăm acum toată etapa inducției, adică reducerea parcurgerii sistemului $\rho + 1$ la parcurgerea sistemului ρ. Acesta este poate cel mai critic punct din totul. Totuși eu cred că, gîndind intuitiv, nu se poate nega raționamentului folosit aici o considerabilă evidență. Să reflectăm amănunțit, de pildă, asupra cazurilor inițiale, cu partea întreagă 1, 2, 3. Făcînd să crească partea întreagă, nimic nou nu intervine în principiu; modul în care se merge înainte rămîne totdeauna același. Desigur, are loc o puternică creștere a gradului de complicație a infinităților ierarhizate una deasupra alteia, care urmează să fie „parcurse" de fiecare dată; parcurgerea trebuie totdeauna să fie concepută ca ceva „potențial", ca în cazul în care partea întreagă a fost 0. Dificultatea rezidă în faptul că sensul finit exact al „parcurgerii" numerelor ρ este oarecum vizibil la cazurile inițiale, totuși este așa de complicat în cazul general, încît nu ne putem face despre aceasta decît o idee neprecisă; acum aceasta trebuie să fie privită ca suficientă pentru a fundamenta într-un mod intuitiv posibilitatea de a parcurge numerele $\rho + 1$.

. . . .

Un alt simbolism pentru numerele transfinite de care avem nevoie a dat *Paul Bernays*, cu ajutorul numerelor întregi ordonate convenabil (Cf. *Hilbert — Bernays*, *Fundamentele matematicii*, vol. II, Berlin, 1939, p. 361 și urm.)

8. P. Lorenzen: Fundamentarea constructivă a matematicii

Problema necontradicției a căpătat o nouă întorsătură datorită unei lucrări a lui *Paul Lorenzen* (*Fundamentarea constructivă a matematicii*, 1950), în care se face abstracție de distincția dintre „metamatematică" intuitivă și matematica abstract-formală, distincție netă acceptată în general începînd de la cercetările lui *Hilbert*. Astfel se obține o cale în esență mai simplă pentru demonstrația necontradicției.

Încă din anul 1925, *Kolmogorov* (într-o lucrare în l. rusă *O principie tertium non datur* în „Rec. math. Soc. Moscou" vol. 32, 1. 24—25) și, de asemenea mai tîrziu, *K. Gödel* (*Asupra aritmeticii și teoriei numerelor intuiționiste*, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Viena, 1932) arătaseră posibilitatea de a traduce formalismul aritmetic obișnuit în formalismul intuiționist al lui *A. Heyting* (*Regulile* *formale ale logicii intuiţioniste* [I] *şi matematicii* [II, III], Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften maht.-natur-wiss. Kl., 1930, pp. 42 şi urm., 52 şi urm., 158 şi urm.), astfel încît formulele deductibile să fie transpuse în altele tot deductibile. S-ar putea, de pildă, înlocui disjuncţia „*p* sau *q*" prin negaţia conjuncţiei termenilor negaţiei „non (non-*p* şi non-*q*)", şi afirmaţia de existenţă „există un *x* cu proprietatea *A*" prin negaţia propoziţiei universale „nu toţi *x* au proprietatea non-*A*". Într-o astfel de formă „slăbită", aritmetica şi logica clasică sînt valabile şi după regulile intuiţioniste. Prin aceasta însă problema necontradicţiei aritmeticii clasice s-a redus la aceea a aritmeticii intuiţioniste. Cu aceasta problema însă nu s-a rezolvat, căci logica şi aritmetica „intuiţionistă" a lui *Heyting* nu rămîn în cadrul finit-intuitiv al metamatematicii lui *Hilbert*. *Lorenzen* construieşte acum pas cu pas şi riguros constructiv (finit) această logică şi aritmetică „intuiţionistă" şi apoi cu ajutorul interpretării *Kolmogorov-gődeliene* (sau prin una foarte asemănătoare cu aceasta), el demonstrează necontradicţia aritmeticii clasice, inclusiv a principiului nelimitat „*tertium non datur*" pentru domeniul numerelor naturale.

În cele ce urmează reproducem introducerea la lucrarea lui *Lorenzen*.

Fundamentarea constructivă a matematicii (*1950*)

Problema necontradicţiei matematicii are un sens numai atunci cînd ea este raportată la un calcul dat în prealabil. Dacă *K* este un calcul, *A* mulţimea enunţurilor sale şi *S* mulţimea propoziţiilor sale (valabile), *K* se numeşte necontradictoriu, dacă *S* este o submulţime strictă a lui *A*, deci dacă nu toate enunţurile sînt propoziţii.

Potrivit programului lui *Hilbert* de fundamentare a matematicii, sarcina de a demonstra necontradicţia este atribuită unei metamatematici. Concepînd astfel problema, s-a ajuns de fapt la demonstraţii care cu aşa-numitul raţionament concret duc la enunţul necontradicţiei, de pildă pentru aritmetică. Deoarece fiecare demonstraţie este valabilă numai atît cît sînt valabile şi mijloacele cu care ea este făcută, aceste demonstraţii sînt expuse obiecţiei că raţionamentul concret nu este nici formalizat, cu atît mai puţin fundamentat.

Încercînd să efectuăm o astfel de formalizare a reieşit că distincţia dintre matematică şi metamatematică nu este adecvată problemei fundamentelor. Mijloacele de demonstraţie ale metamatematicii nu sînt altele decît acelea ale matematicii. O fundamentare a metamatematicii nu este, de aceea, nimic altceva decît fundamentarea unei părţi a matematicii (de pildă a aceleia care se numeşte matematică intuiţionistă). Mai departe, se ştie că, de pildă, din necontradicţia logicii intuiţioniste este banal de demonstrat necontradicţia logicii bivalente, aşa-numită logică clasică; adică, în cazul că aritmetica intuiţionistă ar fi fundamentată, atunci şi cea clasică ar fi uşor de fundamentat ca o extindere utilizabilă.

O cale care să ducă spre necontradicţia aritmeticii, cale ireproşabilă şi în acelaşi timp mai simplă în comparaţie cu cele de pînă acum, rezultă deci în cazul că matematica intuiţionistă poate fi fundamentală în vestmînt formal (simbolic). Contrar epitetului de „intuiţionistă", rău înţeles, această fundamentare se poate de fapt realiza fără nici un fel de intuiţii, care ar trebui să înlocuiască demonstraţiile absente.

I. Plecăm de la regulile pentru construcţia semnelor, de pildă,

(Z_1) $$\mathrm{I}$$

(Z_2) $$x \underset{x}{\rightarrow} x\mathrm{I}$$

la construcţia semnelor

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \ldots$$

(în limbajul uzual semnul → s-ar putea citi „atunci", iar variabila de sub semn „pentru orice x")

Sau, de pildă,

(D_1) $$\mathrm{I} = \mathrm{I}$$

(D_2) $$z_1 = z_2 \underset{z_1 z_2}{\rightarrow} z_1\mathrm{I} = z_2\mathrm{I}$$

la construcţia semnelor

$$\mathrm{I} = \mathrm{I},\ \mathrm{II} = \mathrm{II},\ \mathrm{III} = \mathrm{III},\ \ldots$$

Astfel de reguli nu sînt supuse întrebării dacă sînt „adevărate" sau nu, ci numai dacă sînt „utilizabile" sau nu, adică dacă activitatea conformă lor, deci construirea semnelor, este utilă pentru vreun scop. Aceasta însă nu mai este o problemă matematică, ci aparţine aplicaţiilor. Înţelegerea acestor reguli urmează să se înveţe prin arătarea construcţiei şi practicarea acesteia conform regulilor, înţelegerea fiind independentă de înţelegerea uneia din limbile tradiţionale de conversaţie. În acest sens, fundamentarea dată aici este „independentă de limbaj”.

Pentru a ușura deducția, adică construirea de semne conform regulilor date, se enunță alte reguli a căror folosire poate fi eliminată: dacă, de pildă, se dau două reguli $p_1 \to p_2$ și $p_2 \to p_3$ atunci folosirea regulii $p_1 \to p_3$ poate fi eliminată din orice deducție prin folosirea regulilor date. Prin indicația procedeului de eliminare într-un simbolism adecvat se demonstrează despre metaregula[1]:

$$p_1 \to p_2 ; \quad p_2 \to p_3 \overset{.}{\to} p_1 \to p_3$$

că lărgește mulțimea regulilor date numai în jurul regulilor eliminabile, vorbind *grosso modo*; că nu dă nimic nou. Prin procedee asemănătoare de eliminare toate propozițiile așa-numitei logici a implicației (*Konsequenzlogik*) devin demonstrabile căci demonstrațiile nu sînt deducții formale, ci operații formale, care pot fi totdeauna controlate mecanic — în acest sens fundamentarea este valabilă în general, independent de orice opinie subiectivă.

II. În vederea simplificării propozițiilor de implicație se recomandă apoi introducerea functorilor propoziționali formali, îndeosebi a conjuncției $\wedge$ și a disjuncției $\vee$. Nici aici nu este necesară referirea la limbajul natural (semnele nu au nevoie să fie traduse) — și „intuiția (*Einsicht*) este folosită numai pentru finalizare în calcul, pentru aplicații practice, nu pentru enunțuri matematice. În loc de o negație se introduce mai întîi numai „falsul”, adică un semn F, care poate fi înlocuit prin orice enunț nedeductibil prin regulile date. În acest caz, nedeductibilul se definește ca: „diferit de toate enunțurile deductibile”, așadar se reduce la inegalitatea semnelor, la un enunț formal decidabil. Acum negația $\bar{p}$ a unui enunț p poate fi definită prin $p \to F$, iar propozițiile logicii intuiționiste precum

$$p_1 \to p_2 \overset{.}{\to} \bar{p}_2 \to \bar{p}_1$$

$$p \to \bar{\bar{p}}$$

devin deductibile din logica implicației. Dimpotrivă, nu se obține așa-numitul *„tertium non datur“* : $p \vee \bar{p}$.

---

[1] Folosim puncte deasupra lui (,) și (→) în loc de paranteză.

Dacă totuși se aplică orice enunț p la un enunț p' adecvat, aplicîndu-se enunțurile nedisjunctive la ele înseși, însă de pildă $p_1 \vee p_2$ la

$$\overline{\overline{p'_1} \vee \overline{p'_2}},$$

atunci cel puțin

$$(p \vee \overline{p})'$$

devine deductibil. Acceptarea lui „*tertium non datur*", adică trecerea de la logica intuiționistă la cea bivalentă, nu schimbă nimic în deductibilitatea enunțurilor nedisjunctive, îndeosebi nici în nedeductibilitatea lui F.

III. Problema necontradicției aritmeticii este pusă adesea în mod fals ca problema necontradicției unui sistem de axiome, de pildă, a sistemului *Peano*. Dacă numerele z sînt definite ca semne care se pot construi conform lui (Z_1), (Z_2), și egalitățile $z_1 = z_2$ ca semne care se pot construi conform lui (D_1), (D_2), atunci pentru „axioma"

$$z_1\mathrm{I} = z_2\mathrm{I} \rightarrow z_1 = z_2$$

trebuie demonstrat că ea este o regulă care se poate elimina. Pentru axioma

$$\overline{z\mathrm{I} = \mathrm{I}}$$

trebuie demonstrat că $z\mathrm{I} = \mathrm{I}$ nu este deductibilă și regula de inducție

$$p(\mathrm{I})\ ;\ p(z) \underset{z}{\rightarrow} p(z\mathrm{I}) \dot{\rightarrow} p(z)$$

trebuie demonstrată ca metaregulă, adică trebuie arătat un procedeu prin care se poate elimina $p(z)$, dacă $p(\mathrm{I})$ și $p(z) \rightarrow p(z\mathrm{I})$ se pot elimina.

Faptul că aceste demonstrații sînt banale constituie o dovadă că problema necontradicției axiomelor este pusă fals. (Axiomele, introduse adesea tacit,

$$z = z,$$

$$z_1 = z_2,\ p(z_1) \rightarrow p(z_2),$$

se pot chiar deduce.)

După ce s-a arătat necontradicţia logicii (problematic este aici numai „*tertium non datur*”), pentru axiomele aritmeticii rămîne numai indicarea unui model constructiv, adică a unui sistem de reguli pentru construcţia semnelor, astfel încît axiomele date să devină demonstrabile.

IV. În timp ce acest model constructiv pentru aritmetică este banal, pentru calculele analizei axiomatice şi teoriei axiomatice a mulţimilor tocmai aici rezidă dificultatea. O privire asupra istoriei acestor calcule arată totuşi că acestea au apărut ca axiomatizări ale construcţiilor deja existente. Axiomatizările nu au alt scop decît să uşureze operarea cu mulţimi, funcţii, numere reale etc., constructibile, — întocmai cum şi cercetările axiomatice ale algebrei au sens cel mult atunci cînd există modele pentru structurile definite axiomatic. Dacă se ia în consideraţie că încercările de axiomatizare de pînă acum au fost totdeauna puternic influenţate de deprinderile de gîndire exprimate prin limbajul natural, apariţia acestor calcule devine uşor de înţeles din punct de vedere psihologic. (Nici limbile tradiţionale nu cunosc o elaborare constructivă a conceptelor. Aceasta explică faptul că la formarea „mulţimii tuturor x-lor cu proprietatea $p(x)$” se uită să se indice cum trebuie să arate $p(x)$ — şi de aceea, de pildă, se foloseşte neobservat „mulţime” cu dubla semnificaţie, atunci cînd în $p(x)$ apare, de exemplu, partea de vorbire „ pentru toate mulţimile”. Numai prin această estompare a construcţiei pas cu pas a mulţimilor apare aşa-numita transnumerabilitate — căci pe de altă parte, totuşi avem de a face totdeauna numai cu mulţimi numărabile, axioma alegerii fiind înţeleasă atunci ca înlocuitor pentru numerabilitate.)

Deşi ar fi deci justificat ca în viitor să se lase la o parte, pur şi simplu, ca încercări nereuşite, teoriile axiomatice ale mulţimilor pentru care nu există nici un model constructiv, se menţine însă şi cealaltă posibilitate de a cerceta dacă astfel de axiomatizări — după ce ele există şi ne-am obişnuit cu ele — nu se pot întrebuinţa totuşi într-un mod ocolit ca ficţiuni adecvate din punctul de vedere al calculului pentru matematica constructivă. Cu simpla necontradicţie a teorei axiomatice a mulţimilor necîştigîndu-se de fapt mai nimic, este vorba de a produce legătura cu teoria constructivă a mulţimilor. Rezultă de aici că direcţia cea mai apropiată pentru continuarea muncii este ca mai întîi să se dezvolte amănunţit ceea ce s-a sintetizat sub numele de ,,teoria constructivă a mulţimilor". În contrast cu încercările intuiţioniste, este cu putinţă astăzi, după fundamentarea ireproşabilă a logicii, să se folosească permanent *,,tertium non datur"*. Nu mai este necesară limitarea aşa de incomodă la ,,proprietăţi decidabile", ,,numere reale calculabile" etc. Un început în direcţia aceasta a făcut deja din 1918 *H.Weyl*, dar el trebuia, desigur, să eşueze, deoarece fundamentarea lui, *,,tertium non datur"* lipsea încă pe atunci.

9. Demonstraţia necontradicţiei analizei la Lorenzen

După ce necontradicţia aritmeticii a fost demonstrată de mai mulţi autori în diferite feluri (*Gentzen, W. Ackermann, Lorenzen* ş. a.) şi de acum înainte *,,tertium non datur"* a putut fi întrebuinţat necontradictoriu pentru enunţuri de natură aritmetică, a mai rămas sarcina de a arăta pe această bază necontradicţia analizei clasice şi, mai departe, a teoriei mulţimilor. Această sarcină a fost rezolvată în sens larg tot de *Lorenzen*. Totuşi el nu a cercetat exact analiza clasică istorică, ci o formă precisă din aceasta, care însă nu este de loc mărginită la domeniul mai îngust al analizei, susceptibilă de fundamentare intuiţionistă. Punctul de plecare al lui *Lorenzen* are o anumită înrudire cu punctul de vedere ,,semiintuiţionist" al lui ***H. Weyl*** **din cartea** acestuia *Continuul* (cf. şi prima parte a lucrării lui *Weyl* reproduse mai înainte). Însă în timp ce *Weyl* examinează în analiză o structură în trepte, iar apoi totuşi o respinge şi de aceea rămîne într-o porţiune, mereu foarte restrînsă, a analizei clasice, *Lorenzen* introduce un şir chiar transfinit (dar restrîns, fireşte la numere ordinale constructibile) de ,,straturi" logice (împărţite după domeniul de valabilitate al ,,cvantorilor" folosiţi: ,,toţi" şi ,,există"), care constituie articulaţii în definiţia mulţimilor, termenilor, funcţiilor; astfel orice cerc vicios *,,in definiendo"* este evitat. Acest fel de procedeu se înrudeşte cu ideea fundamentală a teoriei tipurilor ,,ramificate" a lui *Russell* fără axioma reductibilităţii, a cărei necontradicţie a şi dovedit-o de altfel *Lorenzen* (*Journ, Symbol. Logic* vol. 16, 1951, pp. 81—106); în amănunte există însă deosebiri.

Limitarea conceptului de mulţime, funcţie şi număr real la astfel de structuri, care se pot defini într-un ,,strat" logic înalt finit — formele care depăşesc sînt denumite, ,,hipermulţimi", ,,hiperfuncţii", ,,numere hiperreale" — o astfel de limitare face posibil ca teoremele analizei necontradictorii precizate să capete formulare legată foarte mult textual de propoziţiile corespunzătoare din analiza clasică. Aceasta este suficientă de altfel pentru toate aplicaţiile matematicii în fizica teoretică, în astronomie şi în alte ştiinţe exacte.

Urmează introducerea la memoriul lui **Lorenzen** *Necontradicţia analizei clasice.*

Se știe că analiza clasică are la bază nu numai aritmetica și logica, dar și teoria naivă a mulțimilor. Numerele reale se definesc printr-o relație de egalitate între mulțimi, respectiv șiruri — de pildă ca fracții zecimale infinite — de numere raționale. Conceptele fundamentale de mulțime și funcție nu sînt definite matematic, ci introduse numai prin exemple și perifraze ale limbajului natural (prin cuvinte ca sinteză, regulă, coordonare, lege, . . .) adesea subînțelegîndu-se că aceasta este inevitabil.

În urma criticii adresate teoriei naive a mulțimilor, s-au făcut încercări de a o susține cu ajutorul unei axiomatici — printr-o analogie, greșit înțeleasă, cu geometria. Cu axiome convenabile se poate desigur totul demonstra, dar nu se poate fundamenta nimic.

Problema unei construcții a numerelor reale, după cîte știm, a fost rezolvată prima oară de *H. Weyl* (*Continuul*, 1918). *Weyl* folosește negreșit regulile aritmetice și logice fără fundamentare, îndeosebi și „*tertium non datur*". Pe baza criticii aduse de *Brouwer* acestei reguli a apărut apoi analiza intuiționistă, în care prin interzicerea lui „*tertium non datur*" și limitarea la un concept foarte îngust de funcție, propozițiile fundamentale ale analizei clasice nu mai sînt valabile.

După o fundamentare constructivă a aritmeticii și logicii (inclusiv „*tertium non datur*") se poate realiza totuși și o construcție a numerelor reale pentru care sînt valabile toate propozițiile fundamentale ale analizei clasice. În aceasta este cuprinsă necontradicția analizei clasice.

Să construim semnele $x, y \ldots$, numite indivizi (de pildă, așa-zisele numere naturale, numerele cardinale $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$). Prima problemă constă în a construi un limbaj despre $x, y, \ldots$ În teoria naivă se recurge pentru aceasta la limbajul natural și se conchide din el că există relațiile $\rho, \sigma, \ldots$ (numite și concepte sau proprietăți), astfel că, de pildă, $\rho(x)$, $\sigma(x, y) \ldots$ sînt enunțuri. În loc de aceasta, noi folosim următoarea construcție:

(1) Dacă ρ este o relație, atunci fie $\rho(x)$ un enunț.

(2) Dacă A, B, $A(x)$ sînt enunțuri, atunci fie de asemenea enunțuri: „A și B", „A sau B", „dacă A, atunci B", „dacă A, atunci și numai atunci B", — „non A", „pentru toți x: $A(x)$", „pentru un x: $A(x)$".

(3) In caz că $A_1 \cdots A_k$,sînt enunțuri, dacă ρ este o relație, atunci fie relația ρ o relație definită inductiv prin

,,dacă A_1 atunci $\rho(x_1)$'', ... ,,dacă A_k, atunci $\rho(x_k)$''.

Prin (3) o relație ρ nu este altceva decît un sistem de reguli pentru deducția enunțurilor de forma $\rho(x)$. Deoarece regulile logice (pentru deducerea enunțurilor compuse prin (2)) sînt necontradictorii, chiar și acceptarea unor astfel de reguli pentru ρ este necontradictorie — căci în conformitate cu cele spuse, numai enunțurile de forma $\rho(x)$ sînt deductibile.

Cu acest limbaj despre $x, y, \ldots$ trebuie acum să definim mulțimi și funcții de $x, y, \ldots$

(M) Dacă $A_1(x)$, $A_2(x)$ sînt enunțuri, așa încît pentru toți x este valabil

,,dacă $A_1(x)$, atunci și numai atunci $A_2(x)$'',

atunci fie $M_x A_1(x) = M_x A_2(x)$.

Semnele $M_x A(x)$ (citite, de pildă, astfel: ,,Mulțimea x-lor cu $A(x)$'') le numim mulțimi. Pentru $M = M_x A(x)$ fie x element al lui M, dacă $A(x)$.

(T) Dacă pentru toți x_1, x_2 este valabil:

,,dacă $A(x_1)$ și $A(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$''

atunci fie $T_x A(x) = x_0$, dacă $A(x_0)$.

Semnele $T_x A(x)$ (citite, de pildă, astfel: ,,acel x cu $A(x)$'') le numim termeni. Termenii îi notăm de asemenea cu x, $y, \ldots$, termenii cu variabile libere corespunzînd de pildă cu $x(x_0)$, $x(x_1, x_2)$ — aceștia apar atunci cînd $A(x)$ conține în afară de x și alte variabile libere.

(Φ) Dacă $y_1(x)$, $y_2(x)$ sînt termeni, astfel încît pentru toți x-ii este valabil

$$y_1(x) = y_2(x),$$

atunci fie $\Phi_x y_1(x) = \Phi_x y_2(x)$.

Semnele $\Phi_x y(x)$ (citite, de pildă, astfel: ,,$y(x)$ ca funcție de x'') le numim funcții. Pentru $f = \Phi_x y(x)$ avem $f(x_0) = y_0$ dacă $y(x_0) = y_0$.

Aceste trei definiții sînt folosite în analiza clasică în permanență (mai mult sau mai puțin conștient). Conceptul de funcție propus aici are comun cu conceptul de funcție al lui *Euler* faptul că orice funcție este dată printr-un termen (la *Euler*: expresie analitică) ; pe de altă parte, el are ,,întinderea'' conceptului de funcție al lui *Dirichlet*, căci cu orice enunț $A(x)$ prin care x este determinat univoc, se poate forma un termen.

Îndeosebi se pot obţine toate funcţiile recursive cu ajutorul relaţiilor construite prin (3).

Cu limbajul despre numere raţionale nu se obţine totuşi încă analiza clasică; căci dacă numerele reale se definesc printr-o relaţie de egalitate între mulţimi de numere raţionale, nu sînt încă definite mulţimile şi funcţiile de numere reale (ci numai acelea de numere raţionale). Pentru acestea trebuie repetată construcţia unui limbaj: mai întîi limbajul despre enunţurile, mulţimile, funcţiile şi numerele reale de pînă acum (indivizi din primul strat), apoi iarăşi un limbaj despre indivizii astfel obţinuţi din stratul al doilea etc.

Reuniunea tuturor straturilor de înălţimi finite o numim hiperstratul de ordinul 0. Construcţia unui limbaj despre aceasta ne furnizează alte hiperstraturi, ai căror indivizi îi numim hiperenunţuri, hipermulţimi, hiperfuncţii şi numere hiperreale. Dacă ne mărginim totuşi la straturi [de înălţime finită], atunci principiul clasic de completitudine:

,,Pentru orice mulţime de numere reale există un număr real ca limită inferioară''

devine demonstrabil, deşi există hipermulţimi, a căror limită inferioară este un număr hiperreal. Excluzînd în mod convenabil hiperstraturile, obţinem toate propoziţiile fundamentale ale analizei clasice. În consecinţă, nu analiza constructivă este prea ,,îngustă'' faţă de analiza clasică, ci caracterul închis pe care-l posedă analiza clasică este generat tocmai printr-o îngrădire a mijloacelor de construcţie.

ANEXĂ

Introducere la memoriul lui **Kurt Gödel:** *Asupra propozițiilor formal nedecidabile din Principia mathematica și din sistemele înrudite*

Dezvoltarea matematicii în direcția unei precizii mai mari a dus, după cum se știe, la faptul că domenii largi din ea au fost formalizate astfel, încît demonstrarea poate fi efectuată după cîteva reguli mecanice. Cele mai cuprinzătoare sisteme formale expuse pînă acum sînt, pe de o parte, sistemul din *Principia mathematica* (*PM*)[1], pe de altă parte sistemul de axiome al lui *Zermelo-Fraenkel*, dezvoltat de *J. von Neumann* al teoriei mulțimilor. Aceste două sisteme sînt așa de largi încît toate metodele de demonstrație folosite în matematică astăzi sînt formalizate între ele, adică reduse la cîteva axiome și reguli de deducție. Putem presupune că aceste axiome și reguli de deducție sînt suficiente pentru ca *toate* problemele care se pot exprima în genere formal în sistemele respective să se poată și decide. În cele ce urmează se arată că nu așa stau lucrurile, ci că există, în ambele sisteme citate probleme chiar relativ simple din teoria numerelor întregi ordinale[4], care nu se pot decide din axiome. Această împrejurare nu rezidă în natura particulară a sistemelor expuse, ci este adevărată pentru o clasă foarte largă de sisteme formale, căreia îi aparțin îndeosebi toate sistemele care provin[5] din cele două sisteme citate prin adăugarea unui număr finit de axiome, presupunînd că prin axiomele adăugate nu se pot demonstra propoziții false de felul celor indicate în nota[4].

Înainte de a intra în detalii, schițăm mai întîi ideea principală a demonstrației, firește fără să avem pretenția exactității. Formulele unui sistem formal (ne mărginim aici la sistemul

PM) privite din exterior sînt șiruri finite de semne fundamentale (variabile, constante logice și paranteze, respectiv puncte de despărțire) și se pot ușor preciza exact care șiruri de semne fundamentale sînt formule cu sens și care nu[6]. În mod analog, demonstrațiile, din punct de vedere formal, nu sînt altceva decît șiruri finite de formule [cu anumite proprietăți care se pot indica]. Pentru considerații metamatematice este, firește, indiferent care obiecte se iau ca semne fundamentale și noi ne hotărîm să întrebuințăm numerele naturale[7] ca atare. În consecință, atunci o formulă este un șir finit de numere naturale[8] și o figură demonstrativă este un șir finit de șiruri finite de numere naturale. Conceptele [propozițiile] metamatematice devin astfel concepte [propoziții] despre numere naturale, respectiv despre șiruri cu astfel de termeni[9] și de aceea [parțial cel puțin] se pot exprima în simbolurile sistemului *PM* însuși. Îndeosebi se poate arăta că noțiunile „formulă", „figură demonstrativă", „formulă demonstrabilă" sînt definibile înăuntrul sistemului *PM*, adică se poate indica[10], de pildă, o formulă $F(v)$ din *PM* cu o variabilă liberă v (de tipul unui șir de numere), astfel încît $F(v)$ interpretat concret afirmă: v este o formulă demonstrabilă. Acum producem o propoziție nedecidabilă a sistemului *PM*, adică o propoziție A, pentru care nici A nici non-A nu se poate demonstra, în felul următor:

O formulă din *PM* cu exact o variabilă goală, și anume de tipul numerelor naturale [clasă de clase], o vom numi un simbol de clasă. Simbolurile de clasă ni le imaginăm oarecum ordonate[11] într-un șir, notăm pe cel de rangul n cu $R(n)$ și observăm că noțiunea „simboluri de clasă" ca și relația ordonatoare R se pot defini în sistemul *PM*. Fie α un simbol de clasă arbitrar; cu $[\alpha; n]$ notăm acea formulă care apare din simbolul de clasă prin faptul că se înlocuiește variabila liberă prin semnul pentru numărul natural n. Însăși relația triplă $x = [y; z]$ se dovedește definibilă înăuntrul lui *PM*. Acum definim o clasă K de numere naturale în felul următor:

$$n \varepsilon \mathrm{K} \equiv \overline{\mathrm{Bew}}[R(n); n]^{11a} \qquad [1]$$

[unde Bew x înseamnă: x este o formulă demonstrabilă]. Deoarece conceptele care apar în „*definiens*" sînt toate definibile în *PM*, tot așa conceptul K, compus din ele; adică există un simbol de clasă S[12] astfel încît formula $[S; n]$ interpretată concret afirmă că numărul natural n aparține lui K. S este ca simbol de clasă identic cu un anumit $R(q)$, adică pentru un anumit număr natural q este adevărat că

$$S = R(q).$$

Acum arătăm că propoziția $[R(q) ; q]$[13] este nedecidabilă în *PM*. Căci presupunînd că propoziția $[R(q) ; q]$ ar fi demonstrabilă, atunci ea ar fi și corectă ; aceasta înseamnă însă că după cele de mai sus, q ar aparține lui K adică după [1], ar fi valabil $\overline{\mathrm{Bew}}\ [R(q) ; q]$, contrazicînd ipoteza. Dimpotrivă, dacă negația lui $[R(q) ; q]$ ar fi demonstrabilă, atunci am avea $\overline{n \varepsilon K}$, adică $\mathrm{Bew}\ [R(q); q]$ ar fi valabilă. Așadar $[R(q) ; q]$ ar fi demonstrabilă în același timp cu negația sa, ceea ce iarăși este imposibil.

Analogia acestui raționament cu antinomia lui *Richard* sare în ochi ; și cu ,,Mincinosul'' are o strînsă înrudire[14], căci propoziția nedecidabilă $[R(q) ; q]$ afirmă că q aparține lui K, adică prin [1], că $[R(q) ; q]$ nu este demonstrabil. Așadar avem în fața noastră o propoziție care afirmă[15] propria sa nedemonstrabilitate. Metoda de demonstrație expusă se poate aplica, evident, la orice sistem formal, care în primul rînd interpretat corect dispune de suficiente mijloace de exprimare pentru a defini conceptele care apar în considerațiile de mai sus [îndeosebi conceptul de ,,formulă demonstrabilă''] și, în care, în al doilea rînd, orice formulă demonstrabilă este și din punctul de vedere al conținutului corectă. Realizarea exactă — care urmează — a demonstrației de mai sus va avea printre altele sarcina să înlocuiască a doua dintre ipotezele menționate printr-una pur formală și mult mai slabă.

Din observația că $[R(q) ; q]$ afirmă propria sa nedemonstrabilitate urmează imediat că $[R(q) ; q]$ este corectă, căci $[R(q) ; q]$ *este totuși* nedemonstrabilă [fiind nedecidabilă]. Așadar, propoziția nedecidabilă în sistemul *PM* a fost totuși decisă prin considerații metamatematice. Analiza precisă a acestei situații curioase duce la rezultate surprinzătoare referitor la demonstrațiile de necontradicție a sistemelor formale, care sînt tratate mai amănunțit în cap. 4, propoziția (XI).

[1] Cf. sinteza rezultatelor acestei lucrări apărută în Anzeiger der Akad.D.Wiss in Wien [math.-naturw. Kl], 1930, nr.19.

[4] Adică, mai precis, există propoziții nedecidabile în care în afară de constantele logice — [nu], v [sau], (x) [pentru toți] $=$ [identic cu], nu apar alte constante decît $+$ [adunare], $\cdot$ [înmul-

ţire], ambele în legătură cu numerele naturale, cînd şi prefixele (x) se pot referi numai la numerele naturale.

[5] În acest caz în *PM* se numără ca distincte numai acele axiome care nu rezultă una din alta numai prin schimbarea tipului.

[6] Aici şi în cele ce urmează înţelegem totdeauna prin „formulă din *PM*” o formulă scrisă fără abrevieri [adică fără folosirea unor definiţii]. Definiţiile servesc numai pentru scriere abreviată şi de aceea, principial, sînt superflue.

[7] Adică aplicăm semnele fundamentale într-un mod univoc la numerele naturale.

[8] Adică umplerea unui interval din şirul numerelor cu numere naturale. [Numerele pot chiar să nu fie ordonate în spaţiu.]

[9] Cu alte cuvinte: Procedeul descris mai sus furnizează o imagine izomorfă a sistemului *PM* în domeniul aritmeticii şi toate consideraţiile matematice se pot face tot aşa de bine relativ la această imagine izomorfă. Acest lucru are loc în următoarea schiţă de demonstraţie, adică prin „formulă”, „proporţie”, „variabilă” etc. *trebuie să înţelegem totdeauna obiectele corespunzătoare ale imaginii izomorfe.*

[10] Ar fi foarte uşor (numai cam pedant) să adăugăm realmente în scris aceste formule.

[11] De pildă, după suma crescătoare a termenilor şi în cazul sumelor egale — lexicografic.

[11a] Prin scrierea unei liniuţe deasupra se notează negaţia.

[12] Nu este iarăşi nici cea mai mică dificultate ca formula S să fie de fapt adăugată în scris.

[13] Să se observe că „$[R(q)\,;\,q]$” sau ceea ce înseamnă acelaşi lucru „$[S\,;\,q]$” este numai o *descriere metamatematică* a propoziţiei nedecidabile. Totuşi îndată ce s-a stabilit formula S se poate determina şi numărul q şi prin aceasta se poate consemna în scris efectiv chiar propoziţia nedecidabilă.

[14] În genere se poate aplica orice antinomie epistemologică la o demonstraţie de nedecidabilitate de această natură.

[15] O astfel de propoziţie nu are în sine — contrar aparenţei — nimic dintr-un cerc vicios, căci ea afirmă mai întîi nedemonstrabilitatea unei formule complet determinate [anume aceea de rangul q în ordonarea lexicografică într-o anumită substituţie] şi de-abia pe urmă [oarecum întîmplător] reiese că această formulă este tocmai aceea în care ea însăşi a fost exprimată.

Pentru clarificarea ultimului alineat din textul lui *Gődel* ar putea servi următoarele:

Propoziția principală a lui *Gődel* afirmă:

(*G*) „Dacă *PM* este necontradictoriu, atunci $[R(q) ; q]$ este nedemonstrabil".

Acestui enunț concret (metamatematic) — în virtutea procedeului de aritmetizare al lui Gődel — i se poate alătura un enunț formalizat chiar în *PM*:

$$(G') \qquad W \rightarrow [R(q) ; q],$$

unde „W" înseamnă enunțul formalizat „*PM* este necontradictoriu".

Dacă însă *W* este „adevărat", din (G′) rezultă prin regula de deducție a lui *modus ponens* că și $[R(q) ; q]$ este demonstrat ca adevărat. Aceasta contrazice însă principalul rezultat gődelian, conform căruia el este nedemonstrabil.

Așadar W nu este adevărat demonstrabil, adică contradicția lui *PM*, formalizată în *PM*, nu este demonstrabilă și varianta inițială pur finită a teoriei hilbertiene a demonstrației nu se poate realiza.

ÎNCHEIERE

Actuala teorie a demonstrației a reușit să arate că teoria numerelor, teoria ramificată a tipurilor lui *Russell* (fără axioma reductibilității) și o analiză modificată numai relativ puțin față de forma clasică sînt necontradictorii, ceea ce pentru toate aplicațiile matematicii în științele exacte este de ajuns. Dincolo de acestea, *Lorenzen* a inclus teoria măsurii și integralei *Lebesgue* în demonstrația sa de necontradicție (*Mass und Integral in der konstruktiven Analysis*, în „Math. Zeitschr.", vol. 54, 1951, pp. 275—290). Aceeași problemă a fost atacată în privința teoriei mulțimilor; și aici vor fi necesare anumite modificări care însă nu ar trebui să atingă miezul propriu-zis al marii opere a lui *Cantor* dacă, evident, și existența mulțimilor absolut transnumerabile va rămîne nedemonstrabilă. Deja *L. Lőwenheim*, 1915, și *Th. Skolem*, 1920, dovediseră că sistemul clasic de axiome al teoriei mulțimilor (*Zermelo*, 1908) se poate realiza complet într-un model numărabil.

Mai rămîne ca o mare problemă încă să se arate că teoria „clasică", propriu-zisă, neschimbată, a mulțimilor și analiza, care pînă acum nu a putut fi demonstrată ca necontradictorie, sau este necontradictorie sau conține contradicții reale. Nu este sigur dacă, în genere, se poate decide în această problemă.

În afară de chestiunea necontradicției se mai pun și alte probleme referitoare la sistemele logico-matematice, precum a decidabilității, completitudinii, univocității (categoricității) și multe altele. Aceste chestiuni nu intră însă în cadrul acestei cărți. Pe de o parte, ele sînt obiectul cercetării actuale, deci se sustrag prezentării istorice; pe de altă parte aparțin domeniului „logisticii", „formei matematice a logicii formale" care este tratată în alt volum din seria *Orbis academicus*, în *Logica formală* de *I. M. Bochenski* (în partea a cincea) la care trebuie să trimitem pe cititor.

INDEX DE SURSE

Observație preliminară

O serie de indicații privitoare la surse se găsesc în text (mai ales în capitolul II).

Numele de autori care nu sînt însoțite de alte indicații se pot găsi la Bibliografie.

Prescurtări

OK :	Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann.
QS :	Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B (Studien), Berlin, Springer-Verlag.
Phil. Bibl. :	Philosophische Bibliothek, Leipzig und Hamburg, Verlag von F. und R. Meiner.

Capitolul I (Matematica preelenă)

p. 20 și urm.	Textele sînt luate din: Th. L. Heath, *A. History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin, 1934, B. L. van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen, 1950. Cf. Bibliogr. la Papyrus, Neugebauer, Thureau-Dangin. Textele cuneiforme sînt citate cu numerele de inventar de muzeu al tăblițelor respective; simbolurile înseamnă: *AO :* Antiquités Orientales (Louvre, Paris); *BM :* British Museum (Londra); *VAT :* Vorderasiatische Texte (Vorderasiat. Museum, Berlin); *YBC :* Yale Babylonian Collection (Yale-University, New-Haven, Conn., S.U.A.).

Capitolul II (Matematica greacă)

p. 49 și urm.	**Relatarea lui Eudemos despre Hipocrat** se află în: Simplicius, *in Aristotelis physicam auscultationem commentaria*, ed. H. Diels, Berlin, 1882, pp. 54—69; separat în l. greacă și traducere

în l. germană de F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates*, Leipzig, 1907, pp. 46—75. Editat de O. Becker *QS*, Bd. 3, 1936, pp. 411—418, indicînd parțial o altă delimitare a textului lui Eudemos. În cartea de față s-a folosit această ultimă variantă a textului și traducerea lui *Rudio*; unele pasaje au fost însă redactate ținînd seama de critica textului (vezi mai jos Observațiile de la p.445).

p. 54 și urm. **La aritmetica pietricelelor**, cf. Heath și van der Waerden, *op. cit.*, p. 111.

p. 57 și urm. **„Învățătura despre par și impar”**: filozofii presocratici sînt citați după Diels-Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 6. Aufl., Berlin, 1951—52, și s-a folosit traducerea lui Kranz cu unele mici modificări.

pp. 61—62 **Demonstrația incomensurabilității diagonalei pătratului** din O. Becker-J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn, 1951, pp. 57—58.

p. 66 și urm. **Bryson**: cf. O. Becker, *Eudoxos-Studien II, Warum haben die Griechen die Existenz der 4. Proportionale angenommen?*, *QS*, Bd. 2, pp. 369—387.

p. 78 și urm. **Heron**: pentru *Metrica II Praefatio*, vezi în cartea de față Observații p. 446

p. 79 și urm. **Arhimede**: Textul după ediția lui Heiberg, 2. Aufl., Leipzig, 1910—1915.

Pentru „Cvadratura parabolei” am folosit traducerea preambulului de către A. Czwalina (*OK*) și rezumatul din van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap*, pp. 242 și urm. la prop. 14—17.

p. 86 și urm. **Fizica lui Aristotel**: Traducere de C. Prantl, *Aristoteles' Werke*, griech. und deutsch, Bd. I, Leipzig, 1854.

p. 99 și urm. **Teoria proporțiilor înainte de Eudoxos**: H. G. Zeuthen, *Hvorledes Mathematiken in Tiden fra Platon til Euklid*, K. Danske Vidensk, Selsk, Skriften nat.-math., Aft. R.I. 5, Kopenhagen, 1917, p. 108 și urm. E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides I*, Groningen, 1929, p. 71.

O. Becker, *Eudoxos-Studien I, Eine voreudoxische Proportionslehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euclid*, *QS*, Bd. 2, 1933, pp. 311—333. B. L. van der Waerden, *Die Arithmetik der Pythagoreer II, Die Theorie des Irrationalen*, în: „Math. Ann.”, Bd. 120, 1949, pp. 667—700 (îndeosebi p. 688 și urm.). E. B. Plooij, *Euclid's Conception of Ratio... as Critisized by Arabian Commentators*, Dissertation, Leiden, 1950; Rotterdam 1950; W. J. van Hengel Verlag.

p. 101 și urm. **Teoria proporțiilor la Eudoxos**: Th. L. Heath, *History of Greek Mathematics*, I, Oxford, 1921, p. 384 și urm.

p. 107 și urm. **Elementele lui Euclid**: traducere de Cl. Thaer (*OK*); text de Heiberg, Leipzig, 1883—1916.

p. 114 și urm. **Construcția lui Archytas**: text și traducere după Diels-Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*. Explicații după van der Waerden, *Ontw. Wetenschap*, p. 171.

p. 118 și urm. **Reflecția filozofică asupra fundamentelor matematicii: Platon**, traducere de O. Apelt (*Phil.-Bibl.*).

Aristoteles, *Analitica secundă*, traducere de Rolfes (*Phil. Bibl.*).
— *Fizica*, traducere de C. Prantl, Leipzig, 1854.
— *Despre suflet*, traducere de O. Gigon, Zürich, 1950.
— *Metafizica*, traducere de Gohlke, Paderborn, 1951.
Proklos, *Euklidkommentar*, text edit. G. Friedlein, Leipzig, 1873; traducere în l. germană de L. Schönberger-M. Steck, Halle a. S., 1945.

Capitolul III (Matematica secolului al XVII-lea)

p. 156 şi urm. **Oresme.** Pasajele au fost luate din: A. Maier, *Zwei Grundprobleme der scholastischen Natur-philosophie*, Roma, 1951, pp. 89—109. (Quaest. disput. de Euclid. Element); cf., de asemenea, *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert*, Roma, 1949, *An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft*, 2. Aufl., Roma, 1952, Abschn. III: *Die Mathematik der Formlatituden*, îndeosebi pp. 289—384.

p. 160 şi urm. **Galilei**, *Unterredungen u. math. Demonstrationen 3. Tag*, traducere de A. V. Oettinger (*OK*).

p. 161 şi urm. **Kepler**, *Neue Astronomie*, traducere de M. Caspar, München-Berlin, 1929, cap. 40.

p. 165 şi urm. **Descartes**, *Die Geometrie*, traducere de L. Schlesinger, Berlin, 1894.

p. 171 **Teorii asupra infinitului mic în evul mediu**: A. Maier, *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrh.* pp. 155—215.

p. 173 şi urm. **Barrow** şi **Newton** (primele lucrări): pasajele sînt luate din J. E. Hofmann, *Studien zur Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis*, I, Abh.: *Materialien zur ersten Schaffensperiode Newtons*, Abh. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1943, math.-naturwiss., Kl. nr. 2, Berlin, 1943; pentru Barrow, p. 115, pentru Newton, pp. 113—114.

p. 175 şi urm. Lucrările ulterioare ale lui **Newton**: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1670—71, şi *Quadratura curvarum*, 1676, se găsesc în *Opuscula*, edit. J. de Castillon, Lausanne şi Geneva, 1744, vol. I — *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londra, 1687. Pentru *Quadrat. curvarum* s-a folosit traducerea lui G. Kowalewski (*OK*).

p. 183 şi urm. **G. Berkeley**, *The Analyst*, 1734; *Works*, edit. A. C. Fraser, vol. III, Oxford, 1901, pp. 1—60.

p. 186 şi urm. **Leibniz**: cercetările din 1673 în legătură cu **B. Pascal** sînt analizate în J. E. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris 1672—1676*, München, 1949, p. 28 — „Neue Methode der Maxima und Minima sowie der Tangenten ... und eine darauf bezügliche Rechnungsart" (Acta Eruditorum, 1684), traducere de G. Kowalewski (*OK*). — *Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung durch den gewöhnlichen algebraischen Kalkül* împreună cu fragmentele din schimbul de scrisori **Leibniz-Varignon** sînt traduse de A. Buchenau în *Leibniz Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, editate de E. Cassirer, Bd. I (*Phil. Bibl.*), Leipzig, 1924, pp. 94—104.

Capitolul IV (Matematica critică a secolului al XIX-lea)

Secțiunea I. Bazele geometriei

p. 196 şi urm. **Proklos,** *Euklidkommentar,* trad. de L. Schönberger, edit. de M. Steck, Halle a S., 1945.

p. 198 şi urm. **John Wallis, Girolamo Saccheri, Joh. Heinr. Lambert, C. F. Gauss, F. A. Taurinus** sînt citați după P. Stäckel şi F. Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss,* Leipzig, 1895.

p. 203 şi urm. **Kant,** *Gedanken von der Schätzung der lebendingen Kräfte,* 1747. Werke Bd. I §§ 9—10. *Kritik der reinen Vernunft,* Transzendentale Ästhetik, Von dem Raume § 2, 1—2; § 3, ediția a doua, 1787.

p. 213 şi urm. **Bernhard Riemann,** *Gessamelte mathematische Werke,* 1. Aufl., Leipzig, 1876: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", p. 254 şi urm.

p. 222 şi urm. **Felix Klein,** *Gesammelte mathematische Abh.,* Bd. I, Berlin, 1921: *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie* (Vorläufige Mitteilung), p. 246 şi urm. *Das Erlanger Programm* (Vergleichende Betrachtungen über geometrische Forschungen), p. 460 şi urm.

p. 227 şi urm. **Moritz Pasch,** *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig, 1882, pp. 4, 16—17, 43—44, 98—100.

p. 230 şi urm. **David Hilbert,** *Die Grundlagen der Geometrie,* ediția I, 1899; citatele sînt după ediția a VI-a, Leipzig şi Berlin 1923, §§ 1, 9, 10, 12.

p. 238 şi urm. **Hugo Dingler,** *Über Geschichte und Wesen des Experiments,* München, 1952, pp. 7—12.

Secțiunea a II-a. Bazele aritmeticii, analizei şi teoriei mulțimilor

A. *Aritmetica*

p. 242 şi urm. **Leibniz,** *Mathematische Schriften,* editate de C. I. Gerhardt, Halle a. S., 1849—1863, Bd. 5, p. 357.

p. 242 şi urm. **C. F. Gauss,** *Anzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda,* Göttingsche gelehrte Anzeigen 1831 (April 23) Werke, Bd. II, Göttingen, 1863, pp. 174—178.

B. *Analiza*

p. 245 şi urm. **Bernard Bolzano,** *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt,* Praga, 1817, citat după *OK,* pp. 21—23.

p. 247 şi urm. **Hermann Hankel,** *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen,* 1870, (*OK*) pp. 44—50.

p. 253 şi urm. **Richard Dedekind,** *Gesammelte mathematische Werke,* Bd. III, Braunschweig, 1932; *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* 1872, p. 315 şi urm. — *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) p. 335 şi urm.— *Briefe an R. Lipschitz,* p. 469 şi urm.; *an Heinrich Weber,* p. 489 şi urm.

p. 274 şi urm. **Georg Cantor,** *Grundlagen einer allgemeinem Mannigfaltigkeitslehre,* 1883, § 9, *Gesammelte Abhandlungen,* Berlin, 1932, pp. 183—188.

p. 280 şi urm. **Paul du Bois-Reymond,** *Die allgemeine Funktionentheorie* Teil I, *Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Funktion,* Tübingen, 1882, pp. IX—X, 2, 3, 7—9, 60, 61—67, 68, 71—72, 85—86, 88—89, 90—91, 92—93, 112—113, 117—119, 122—123, 123—124, 126—128, 140—141, 155—156, 160—162, 180—181, 182—183, 184, 200—201, 202—205, 209.

C. *Teoria mulţimilor*

p. 303 şi urm. **Proklos,** *in Euclid. Elementa comment.*, edit. G. Friedlein, Leipzig, 1873, pp. 158, 1—20.

p. 304 şi urm. **Bernard Bolzano,** *Paradoxien des Unendlichen,* Praga, 1851, reeditată de O. Hahn (*Phil. Bibl.*), Leipzig, 1920, pp. 26—31.

p. 308 şi urm. **Georg Cantor,** *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* edit. de E. Zermelo, Berlin, 1932: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen,* 1874, pp. 116—117; *Über unendlich lineare Punktmannigfaltigkeiten,* nr. 1, 1879, pp. 139—140. — *ibidem,* nr. 5 — *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* 1883, § 1: pp. 165—167, § 4: pp. 172—175, § 5: pp. 175—177, § 7: pp. 179—181, § 8: pp. 181—183, § 11: pp. 195—197, § 10 (Definition des Kontinuums): pp. 190—194. *Briefe an R. Dedekind,* 1899, pp. 443—448. Observaţia lui E. Zermelo p. 451.

p. 346 şi urm. **Joh v. Neumann,** *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre,* în: „Journ. f. reine und angew. Math.", Bd. 160, 1929, pp. 227, 229; cf. Bd. 154, 1925, p. 223.

p. 347 *Emmy Noether,* Anecdote despre **Cantor** şi **Dedekind:** *Dedekinds Gesammelte math. Werke,* Braunschweig, 1932, Bd. III, p. 449.

Capitolul V (Cercetarea fundamentelor în secolul al XX-lea)

A. *Logicismul*

p. 349 şi urm. **Gottlob Frege,** *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* Breslau, 1884, reeditată în l. germană şi engleză, Oxford, 1950, § 6, § 62—65, § 68.

p. 354 şi urm. **Bertrand Russell,** *The Principles of Mathematics,* Cambridge, 1903, § 109—11.

p. 356 şi urm. **Alfred North Whitehead** şi **Bertrand Russell,** *Principia mathematica,* vol. I, Cambridge, 1910. Introduction (1 Edit.), Chapt. II, pp. 37, 48, 60—63.

B. *Intuiţionismul*

p. 359 şi urm. **Leopold Kronecker,** *Werke* (Leipzig, 1897—99), Bd. II, pp. 256—57 Bd. III, 1, pp. 253, 272, 156 Anm. 1.

p. 361 şi urm. **L. E. J. Brouwer,** *Intuitionistische Mengenlehre,* în: „Jahresber. d. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung, Bd. 28 (1919), p. 203 — *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten* *in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie*, în: „Journ. f. reine u. angew. Math.", Bd. 154, 1925, p. 1 — *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus*, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math., Kl., 1928, nr. 5, pp. 48—52.

p. 366 şi urm. **A. Kolmogoroff,** *Zur Deutung der Intuitionistischen Logik* în: „Math. Zeitschrift", Bd. 25, 1932, p. 58 şi urm.

p. 368 şi urm. **Hermann Weyl,** *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.*, în: „Math. Zeitschrift", Bd. 10, 1921, p. 39 şi urm.

C. Teoria demonstraţiei

p. 384 şi urm. **David Hilbert,** *Über den Zahlbegriff* (1900). *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl., Leipzig-Berlin, 1930, Anhang VI.

p. 388 şi urm. **Leibniz,** *Die philosophischen Schriften,* edit. de C. I. Gerhardt, Berlin, 1875—1890, Bd. VII, pp. 190—193; trad. de A. Buchenau în: *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie,* edit. de E. Cassirer, Bd. I, pp. 15—21 (*Phil. Bibl.*), Leipzig, 1924. *Neue Versuche über den menschlichen Verstand,* trad. de E. Cassirer (*Phil. Bibl.*), Leipzig, 1915, IV. Buch, XVII, Kap. § 4. *Opuscules et fragments inédits,* edit. L. Couturat, Paris, 1903, pp. 348, 374, 556. „*Leibnitiana*", edit. de Ivan Jagodinski, Kasan, 1913, citat după D. Mahnke, *Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik,* Halle a. S., 1925 = Husserls „Jahrb. f. Philosophie u. phänomenolog. Forsch.", Bd. VII, Anm. 32 (pp. 236—239), Anm. 37 (p. 239), Anm. 43 (pp. 240—241).

p. 392 şi urm. **David Hilbert.** *Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik.*, Verhandl. d. Internat. Math.-Kongr. in Heidelberg 1904, Leipzig, 1905, pp. 174—185, *Grundl. d. Geometrie,* 7. Aufl., Leipzig-Berlin, 1930, Anhang VII. — *Über das Unendliche,* în: „Math. Ann.", Bd. 95, 1925, pp. 161—190, *Grundl. d. Geometrie,* Anhang VIII. — *Die Grundlagen der Mathematik,* Abh. d. Hamburg, Math. Semin. Bd. VI, 1928, pp. 65—85, *Grundl. d. Geometrie,* Anh. IX.

p. 414 şi urm. **Edmund Husserl,** *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie,* Halle a. S., 1913, în: „Jahrb. f. Philosophie u. phänomenolog. Forsch.", Bd. I, 1, §§ 100—101.

p. 418 şi urm. **Schelling,** *Briefe über Dogmatismus und Kritizismus* (*1795*), Werke, Abt. 1, Bd. I, München, 1856, p. 320, Anm. 1.

p. 418 şi urm. **Gerhard Gentzen,** *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie,* în: „Math. Ann.", Bd. 112, 1936, pp. 493—565; § 15, pp. 549—559.

p. 423 şi urm. **Paul Lorenzen,** *Konstruktive Begründung der Mathematik,* în: „Math. Zeitschrift", Bd. 53, 1950, p. 162 şi urm. — *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis,* în: „Math. Zeitschfrift", Bd. 54, 1951, p. 1 şi urm.

OBSERVAŢII

Vom reproduce unele variante noi ale textelor greceşti, care în traducere sînt marcate cu semnul*.

p. 37 Un alt text didactic este BM 34568, nr. 18: „Înmulţeşti lungimea, lăţimea şi diagonala cu lungimea, lăţimea şi diagonala. Înmulţeşti suprafaţa cu 2. Scazi din (pătratul) lungimii, lăţimii şi diagonalei. Înmulţeşti restul cu

1/2. Înmulțești (inversul) lungimii, lățimii și diagonalei cu jumătatea restului; apoi poți să pui: produsul este diagonala".

Thureau-Dangin, TMB 135 (pp. 62—63 în l. germană de K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik* II, 68).

p. 52 **Simplicius,** phys. pp. 65, 9—10, 15—16, 23—24 (Diels); pp. 60, 20—21, pp. 62, 6—8 (Rudio).

τούτων οὖν οὕτως ἐκόντων τό τραπέζιον ἐφ' οὗ *EKBH* περιλήψεται κύκλος καὶ περιλήψεται κύκλου τμῆμα (acuz.) τὸ τραπέζιον (nom.), ὅπερ τμῆμα (nom.) καὶ τὸ τρίγωνον (acuz.) περιέξει τὸ ἐφ' οὗ *EZH*. γεγράφθω οὖν τὸ τμῆμα. τούτων οὕτως ἐχόντων ὁ γενόμενος μηνίσκος...

(Alegerea acestor fragmente de text atribuite lui **Eudemos** am făcut-o folosind criteriul lui Tannery, cu ameliorările aduse de mine; vezi mai jos).

p. 52 **Simplicius.** phys. pp. 66, 14—24 (Diels); pp. 66, 9—17 (Rudio)

ὅτι δὲ ἀμβλεῖά ἐστι ἡ ὑπὸ *EKH* γωνία, δείκνυσιν οὕτως. ἐπεὶ ἡ μὲν ἔφ' ᾗ *EZ* ἡμιολία ἐστὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει, ἡ δέ ἐφ' ᾗ *ZE*[1] μείζων της ἐφ' ᾗ *EK*[2], διὸ [τι] καὶ <ἡ> γωνία ἡ πρὸς τῷ *Z* <ἐλάττων καὶ ἡ ἐφεξῆς> μείζων <ὀρθῆς> {*Simpl.*: ὡς δῆλον[3], ἴση δὲ ἡ *BZ*[4] τῇ *ZK*[5]}, φανερὸν ὅτι καὶ[6] ἡ ἐφ' ᾗ *BK* μείζων [ᾗ] τῆς ἐφ' ᾗ *KZ*[6a] ᾗ διπλασία δυνάμει[7]. καὶ ἡ ἐφ' ᾗ *EK* ἔσται[8] τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ἄρα μείζων ᾗ διπλασία δυνὰμει {*Simpl.*: καὶ <μείξων> μήκει[9] δια τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων τῶν *BEK BKZ*. ἔστι γὰρ ὡς ἡ *EB* πρὸς *BK* οὕτως ἡ *EK* πρὸς *KZ*. ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ *EK* μείζων ἐστὶ τῆς ἐφ' ᾗ *KZ* ᾗ διπλασια δυνάμει}, η δὲ ἐφ' ᾗ *EZ* ἡμιολία δυνάμει τῆς ἐφ' ᾗ *EK*. ἡ ἄρα ἐφ' ᾗ *EZ* μείζων ἐστὶ δυνάμει τῶν ἐφ' αἷς *EK KZ*.

Textul din Diels are: 1) *KB* 2) *BZ*. 3) δείξω; cf. însă pp. 67, 28—29: καὶ δῆλον ὅτι... 4)*BK*. 5)*KE*. 6)κἄν. 6a)*BZ* 7)μήκει: δυνάμει *Rudio* 8)ὥστε: ἔσται *Usener* 9)διπλασία μήκει καὶ δυνάμει.

Interpolările lui **Simplicius** în textul lui Eudemos sînt închise în acolade { } și notate la început cu „*Simpl.*"

Criteriul de separare a fragmentelor care aparțin lui Simplicius a fost găsit de Paul Tannery, Mém. de la Soc. des Sciences phys. et natur. de Bordeaux, 2. Sér. tome II (Paris, 1878), p. 180: **Eudemos** notează punctele, dreptele, unghiurile etc. cu litere, cărora li se pune în față cuvîntul ἐπί; de pildă, ἡ μὲν ἐφ' ᾗ *EZ*, τῆς ἐφ' ᾗ *KZ*. Totuși se evită totdeauna îngrămădirea prepozițiilor; de pildă, ἡ γωνία ἡ πρὸς τῷ *Z* (nu: ἡ γωνία ἡ πρὸς τῷ ἐφ'ῷ *Z*). (Această caracteristică esențială n-a fost recunoscută ca atare de Tannery și de aceea criteriul a fost contestat din punct de vedere filologic și pînă la urmă abandonat chiar de către Tannery, pe nedrept așa cum am reușit să arăt în *QS*, Bd. 3, pp. 411—18.) **Simplicius,** din contră, folosește notația mai nouă a geometrilor clasici fără επί, ca de pildă, ἡ *BK*, τῇ *KE* etc. Prepoziția ὥστε ἡ ἐφ' ᾗ *EK* ... ᾗ διπλασία δυνάμει o atribui însă lui **Simplicius,** căci după părerea mea această propoziție urmată imediat de pasajul interpolat este reprodusă încă o dată de Simplicius (cu ușoare modificări pentru a o face mai clară) la sfîrșitul pasajului interpolat, păstrînd firește notația lui Eudemos.

Textul reconstituit mai sus reprezintă o argumentație matematică aproape fără lacune:

Trebuie să arătăm că unghiul *EKH* este obtuz. Avem $EZ^2 = \frac{3}{2} EK^2$ (razele sînt *EK*, *KB*), deci $EZ > EK$; așadar (διό), unghiul (triunghiului

EKZ) din Z este ascuțit (deoarece el se opune lui EK, deci nu celei mai mari laturi a triunghiului), în consecință, unghiul alăturat (KZB) este obtuz. Este evident (φανερόν ὅτι) (căci — conform interpolării lui **Simplicius**, $BZ = ZK$) că $BK^2 > 2KZ^2$, deci și $EK^2 > 2KZ^2$. Dar EZ^2 a fost egal cu $EK^2 + \frac{1}{2} EK^2$, deci EZ^2 este mai mare decît $EK^2 + KZ^2$ și, în consecință, unghiul EKH este obtuz. (Ultimul raționament, pe care **Simplicius** îl explică oarecum în cele ce urmează este, mai exact, următorul: Dacă $EK^2 = 2KZ^2$, atunci $KZ^2 = \frac{1}{2} EK^2$, deci $EZ^2 = EK^2 + \frac{1}{2} EK^2 = EK^2 + KZ^2$. Dar $\frac{1}{2} EK^2 > KZ^2$, așa încît, în realitate, $EZ^2 > EK^2 + KZ^2$.)

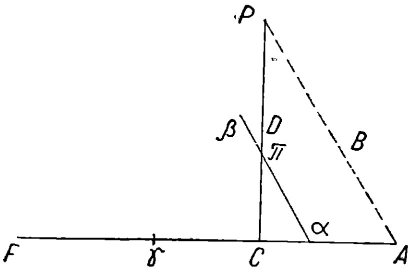
p. 79 **Heron.** *Metrica* II, praefatio (*Heronis Alex.* quae supersunt rec. *H. Schöne*, vol. III, pp. 94, 31). Lecțiunea mea, abătîndu-mă puțin față de *Schöne* printr-o completare a lacunei, este: τὸ δὲ εἰρημένον <στερεόν, εἴπερ τεμνόμενον> ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ποιεῖ τομὰς τῇ βάσει ἴσας, γίγνεται οὕτως.

p. 105 Substantivul *antanairesis*, echivalent cu *anthyphairesis* se găsește alături de verbul *antanairein* la Nikomachos din Gerasa (Introd. arithm. I, 13, 11; p. 25, 1 Hoche) în legătură cu numerele. Iamblichos îl comentează (în Nicom. 18, 14 Pistelli) folosind *anthyphairein*, fără a menționa deosebirea dintre cuvintele utilizate.

p. 119 Aici trebuie menționat pasajul din *Meno* 86 e — 87 b, unde se dă un exemplu concret pentru procedeul ipotetic al matematicienilor.

p. 139 Socrate însuși, nu sclavul, efectuează operația decisivă, construcția diagonalei (84 e — 85 a); așadar, el îl învață totuși pe sclav și chiar în cel mai important moment al argumentației! Cf. Aristoteles. Met. Θ 9, 1051 a 22: „Căci prin descompunere ei găsesc soluția". (Aici diagonala descompune pătratul.)

p. 199 Demonstrația lui Wallis (prescurtată): Fie AB și CD cele două drepte care sînt intersectate de dreapta ACF și formează cu ea unghiurile interne BAC și DCA, care împreună sînt mai mici decît două unghiuri drepte. Afirm că cele două drepte AB și CD prelungite la infinit se întîlnesc, și anume de acea parte a dreptei AF în care se găsesc cele două unghiuri.



Să ne imaginăm că dreapta AC, situată între ele pe dreapta nemărginită ACF, se mișcă pe această dreaptă. Dreapta AB, înclinată pe AC, face de asemenea această mișcare fără schimbarea unghiului BAC, pînă la $\alpha\beta$; aceasta înseamnă că dreapta AB în mișcare taie dreapta CD într-un punct π. Atunci $\pi C\alpha$ este un triunghi și există triunghiuri asemenea de mărime oarecare. De aceea se poate construi un triunghi pe dreapta CA, asemenea cu triunghiul $\pi C\alpha$ cu baza $C\alpha$. Să considerăm efectuată construcția și fie PAC acest triunghi.

Deoarece PCA este triunghi, cele două drepte CP și AP se intersectează în punctul P și, deoarece triunghiul PCA este asemenea cu triunghiul $\pi C\alpha$, unghiurile lor sînt respectiv egale. Deci unghiul PAC este egal cu unghiul $\pi C\alpha$, deci egal cu unghiul DAC și de aceea dreapta CP este situată în prelungirea dreptei CD ... De asemenea, unghiul PAC este egal cu unghiul $\pi\alpha C$. Însă unghiul BAF sau BAC este egal cu același unghi $\pi\alpha C$, deci cu unghiul $\beta\alpha F$ și de aceea și unghiul BAC este egal cu unghiul PAC. Deci dreapta AP este situată în prelungirea dreptei AB.

În consecință, dreapta AP coincide cu prelungirea lui AB. De asemenea CP și prelungirea lui CD formează o dreaptă. Dar AP și CP se intersectează în punctul P, deci se intersectează și prelungirile lui AB și CD tot în punctul P, adică de partea dreptei AF unde sînt situate ambele unghiuri, care sînt împreună mai mici decît două unghiuri drepte. Ceea ce era de demonstrat.

Să mai observăm că afirmația lui Wallis despre cercuri de mărime diferită ca figuri asemenea nu este valabilă pentru geometriile neeuclidiene; de pildă, cercurile paralele în jurul Polului Nord al Pămîntului nu sînt asemenea între ele, căci raportul dintre circumferință și diametru diferă de fiecare dată.

BIBLIOGRAFIE

Lucrările citate în Indexul de surse n-au mai fost, în general, menționate. Pentru prescurtări, vezi Indexul de surse.

Istoria matematicii în general

O. Becker und J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn, 1950 (cu bibliografie amănunțită).

J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, (2. Aufl., Leipzig u. Berlin, 1902—03, 3. Aufl., 1930—40).

*Dirk. J. Struik, *Abriss der Geschichte der Mathematik*, trad. din limba engleză de H. Karl, ed. a III-a, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.

Matematica antică

H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874.

H. C. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, trad. de Fischer-Benzon, Kopenhagen, 1896.

— *Die Mathematik im Altertum und Mittelalter*, în *Die Kultur der Gegenwart*; edit. P. Hinneberg, Teil III, Abt. 1, Leipzig und Berlin, 1912.

B. L. van der Waerden, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen, 1950.

*— *Erwachende Wissenschaft, Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, aus dem holländischen übersetzt von Helga Habicht, mit Zusätzen vom Verfasser, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956.

O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Copenhagen, London, Princeton, 1951.

*E. Kolman, *Istoria matematicii în antichitate*, traducere din limba rusă de A. Hristev, Editura Științifică, București, 1963.

---

* Cu acest semn sînt marcate lucrările consultate de traducător pentru versiunea în limba română a textelor prezentate de O. Becker în traducere germană — *N.T.*

Matematica preelenă

O. Neugebauer, *Vorlesungen über die Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Bd. I: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin, 1934.

W. von Soden, *Leistung und Grenze sumerischer und babylonischer Wissenschaft*; *Die Welt als Geschichte*, Bd. 2, 1936, p. 411 şi urm., 509 şi urm.

Conrad Müller, *Die Mathematik der Śulvasūtra. Eine Studie zur Geschichte der (alt-)indischen Mathematik*. Abh. d. Math. Seminars Hamburg, Bd. 7, 1930, pp. 172—204.

K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, I *Vorgeschichte und Ägypten*. II *Die babylonische Mathematik*, Hannover-Paderborn 1958/59.

Ediţii de texte

a) *Texte egiptene*

Papyrus Rhind, Edit. A. B. Chace, H. P. Manning, R. Cl. Archibald, Oberlin (Ohio, 1927—29).

Papyrus Moskau, Edit. W. W. Struve, Berlin, 1930, *QS* (A), Bd. 1.

b) *Texte babilonene*

Mathematische Keilschrifttexte, hrsg. v. O. Neugebauer, 3 Bde., Berlin, 1934—37, *QS* (A), Bd. 3.

Mathematical Cuneiform Texts, Edit. O. Neugebauer u. A. Sachs, New Haven, 1945.

Textes mathématiques babyloniens, Edit. F. Thureau-Dangin, Leiden, 1938.

c) *Texte hinduse antice*

Āpastamba Śulva Sūtra. Sanskrit u. deutsch v. A. Bürck, în: „Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Ges.", Bd. 55, 1901, pp. 543—591 (Einl. u. Text), Bd. 56, 1902, pp. 327—391 (traducere).

Matematica greacă

T. L. Heath, *A. History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921.

— *A. Manual of Greek Mathematics*, Oxford, 1931.

J. L. Heiberg, *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum*, în: *Handb. d. Altertumswiss.*, Edit. W. Otto, Bd. 5, Abt. 2, 2. Hälfte, München, 1925.

E. Frank, *Plato und die sogenannten Pythagoreer.*, Halle a. S., 1923.

J. Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Leipzig und Berlin, 1. Aufl., 1924, 2. Aufl., 1933.

O. Toeplitz, *Das Verhältnis von Mathematik und Indeenlehre bei Plato*, Berlin, 1929.

H. Hasse u. H. Scholz, *Die Grundlagenkrise der greichischen Mathematik*, Berlin-Charlottenburg, 1929.

O. Becker, *Eudoxos — Studien* I—IV, *QS*(B) Bd. 2 und 3, 1933—36.

K. von Fritz, *The Discovery of Incommensurability by Hippasos of Metapontum*, în: „Annals of Math.", vol. 48, 1945, pp. 242—264.

K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg, 1949.

B. L. van der Waerden, *Die Arithmetik der Pythagoreer*, în: „Math. Ann.", Bd. 120, 1949.

Texte grecești

*Jean Zafiropulo, *L'école éléate*, Les Belles Lettres, Paris, **1950**, pp. 206—209.

Euclides, *Elementa graeca et latina* J. L. Heiberg, Leipzig, 1883. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*; transl. T. L. Heath, Cambridge, 1908.

*Euclide, *Les Eléments de Géométrie d'* ..., traduits par F. Peyrard, ed. a II-a, Paris, 1809.

*Euclid, *Elemente*, traduse după textul grecesc și adnotate de Victor Marian, 3 vol., București, 1939—1941 (Biblioteca istorică a „Gazetei Matematice").

Anaritius, *Kommentar zu den Elementen*; lat. v. Gerhard von Cremona, Edit. M. Curtze, Leipzig, 1899.

Pappus, *Kommentar zu den Elementen*, Deutsch v. H. Suter, Erlangen, 1922; în l. arabă și engleză, de G. Junge și W. Thomson, London 1930.

Arhimedes, *Opera*. Griech u. lat. v. J. L. Heiberg, 2. (erste vollständige) Aufl., Leipzig, 1910—1915; versiune în l. engleză de T. L. Heath, Cambridge, 1897, supl. 1912; versiune în l. germană de F. Kliem, Berlin, 1914; fragmente în *OK* (traducere de Czwalina);

*— în l. franceză de Paul Ver Eecke, Liège, 1960.

Heron, *Opera*, griech u. deutsch v. W. Schmidt, H. Schone, J. L. Heiberg, Leipzig, 1899—1914.

Aristotel, *Fizica*, *Analiticele*, *Metafizica*, editate și comentate de W. D. Ross, Oxford, 1924, 1936, 1949.

*— *Fizica*, text și trad. în l. franceză de H. Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1926—1931.

*— *Fizica*, trad. în l. română de N. I. Barbu, Editura Științifică, București, 1957—1963.

*— *Organon*, trad. în l. română de Mircea Florian, Editura Științifică, București, 1957—1963.

*— *Metafizica*, trad. în l. franceză de J. Tricot, Edit. J. Vrin, Paris, 1933.

*— *Metafizica*, trad. în l. română de Șt. Bezdechi, Editura Academiei, București, 1965.

T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949.

*Platon, *Sämtliche Werke* I, II, III, traducere în l. germană, Verlag Lambert Schneider, Berlin.

*— *The Dialogues of Plato*, traducere în l. engleză de B. Jowett, Oxford, 1892.

*— *Oeuvres*, traducere în l. franceză de Auguste Diès, Les Belles Lettres, Paris, 1949.

*— *Platon*, III, traducere în l. română de Cezar Papacostea, București, 1935.

*— Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments*, trad. de Paul Ver Eecke, Librairie Albert Blanchard, Paris, 1948.

Matematica din secolele XIV—XVI

P. Duhem, *Études sur Léonard da Vinci. Ceux qu'il a lu et ceux qui l'ont lu*, série I—III, Paris, 1906, 1909, 1913.

H. Wieleitner, *Der Traktatus de latitudinibus formarum*, Bibl. Math. (3), XIII. pp. 115—145.

— *Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme*, Bibl. Math. (3), XIV, pp. 193—243.

*A. P. Juschevici, *Istoria matematicii în evul mediu*, traducere de A. Belinski, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1963.

Matematica din secolele XVII—XVIII

H. Wieleitner, *Geschichte der Mathematik*, II Teil, 1. Hälfte, Leipzig, 1911; 2. Hälfte, Leipzig, 1921.

*— *Istoria matematicii de la Descartes pînă la mijlocul secolului al XIX-lea*, trad. de R. Theodorescu, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1964.

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, Leipzig, 1903.

G. Galilei, *Opere complete*, Edizione Nationale de A. Favaro, Firenze 1890—1907, 19 vol. (relativ la evul mediu în vol. I).

*— *Dialoguri asupra ştiinţelor noi*, trad. de Victor Marian şi Maria Popescu, Editura Academiei, 1961, p. 273.

E. Wohlwill, *Galilei und sein Kampf für die Kopernikanische Lehre*, Hamburg u. Leipzig, Bd. I, 1909, II, 1926.

J. Kepler, *Opera omnia*, Edit. C. Frisch, Frankfurt u. Erlangen, 1858—71; Edit. M. Caspar, München, începînd din 1923; în l. germană de M. Caspar, 1929.

— *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz, 1615; în l. germană de J. Planck (*OK*).

*R. Descartes, *Geometria*, trad. de Al. Giuculescu, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

I. Barrow, *The Mathematical Works*, Edit. W. Whewell, Cambridge, 1860.

— *Lectiones geometricae*, London, 1670; în l. engleză de J. M. Child, Chicago, 1916.

I. Newton, *Opera quae extant omnia*, Edit. S. Horsley, London, 1779—1785.

*— *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, traducere de *Victor Marian*, Editura Academiei, 1956.

G. Berkeley, *The Analyst*, Dublin and London, 1734.

— *A Defence of Free-Thinking in Mathematics*, 1735; ambele se găsesc în *Complete Works*, Edit. A. C. Fraser, vol. III, Oxford, 1901.

G. Robins, *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Newton's Method of Fluxions*, London, 1735.

G. W. Leibniz, *Die mathematischen Schriften*, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Berlin-Halle 1849—63.

— *Die philosophischen Schriften*, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Berlin, 1875—90.

— *Gesamtausgabe*, hrsg. v. d. Berliner Akademie d. Wissensch., Darmstadt u. Leipzig; începînd din 1924.

*— *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Flammarion, Paris.

D. Mahnke, *Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung*, Ber. d. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturwiss. zu Marburg, Bd. 67, Berlin, 1932.

— *Neue Einblicke in die Entdeckung der höheren Analysis*, Abh. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1925, phys.-math. Kl., nr. 1, Berlin, 1927.

J. E. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris 1672—1676*, München, 1949.

J. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797.

Matematica critică din secolul al XIX-lea

I. *Bazele geometriei*

F. Enriques, *Prinzipien der Geometrie*, în: *Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften*, III, 1 pp. 1—129, Leipzig, 1907—1909.

J. Wellstein, *Grundlagen der Geometrie*, în *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*, hrsg. v. Weber u. J. Wellstein, Bd. II, Buch I, 3 Aufl., Leipzig u. Berlin, 1915 (introducere).

*I. Kant, *Critica rațiunii pure*, traducere de T. Brăileanu, Editura Casei Școalelor, București, 1930.

R. Bonola, *Die nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl., Leipzig u. Berlin, 1921.

P. Stäckel u. F. Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig, 1895.

— *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Leipzig, 1899.

N. I. Lobatschefskij, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelen*, Berlin, 1840.

*— *Cercetări geometrice cu privire la teoria liniilor paralele*, trad. de S. Sanielevici, Editura Academiei, 1952.

— *Pangeometria*, în l. germană de H. Liebmann, Leipzig, 1902, *OK*.

— *Zwei geometrische Abhandlungen*, în l. germană de F. Engel, Leipzig, 1898—99.

P. Stäckel, *W. u. J. Bolyai*, 2 Teile, Leipzig u. Berlin, 1913.

C. F. Gauss, *Werke*, Bd. VIII, Göttingen, 1906.

B. Riemann, *Werke*, 2 Aufl., Göttingen, 1892; nr. XIII (Habil.-Vortrag), nr. XXII (Pariser Preisarbeit).

*— *Ipotezele care stau la baza geometriei*, traducere de E. Gergely, Editura Tehnică, București, 1963.

H. Helmholtz, *Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen* (*1868*), Wiss. Abh. Bd. II, p. 618, Leipzig, 1883.

— *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*, Vorträge u. Reden, Bd. II, Braunschweig, 1884.

E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea* (*1868*), în: *Opere matematiche*, Milano, 1902—20.

S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen* Bd. 3, Abt. 5, Leipzig, 1893.

G. Veronese, *Elementi di geometria*, Padova, 1897 ; în l. germană de A. Schepp, Leipzig, 1894.

D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie*, în: „Math. Ann.", Bd. 56, 1902, = Grundlagen der Geometrie, 7 Aufl., Leipzig u. Berlin, 1930, Anhang IV.

H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, 1923.

O. Becker, *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie*, „Jahrb. f. Philos. u. phänomenolog. Forsch.", Bd. VI, Halle a. S., 1923.

— *Die apriorische Struktur des Anschauungsraumes*, în: „Philos. Anzeiger, Jahrb.", IV, 1930, pp. 129—162.

H. Poincaré, *Der Wert der Wissenschaft*, în l. germană de E. u. H. Weber, Leipzig, 1906.

— *Wissenschaft und Methode*, în l. germană de C. u. F. Lindemann, Leipzig, 1911.

*— *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1909.

F. Enriques, *Probleme der Wissenschaft*, în l. germană de K. Grelling, Leipzig, 1910.

H. **Dingler**, *Die Grundlagen der angewandten Geometrie*, Leipzig, 1911.
— *Die Grundlagen der Geometrie. Ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik*, Stuttgart, 1933.

II. *Bazele aritmeticii și analizei*

A. *Aritmetica*

H. **Hankel**, *Theorie der komplexen Zahlsysteme*, Leipzig, 1867.

B. *Analiza*

A. **Cauchy**, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823.
— *Leçons sur le calcul differentiel*, Paris, 1829; ambele în: *Oeuvres complètes*, sér. II, tome IV, Paris, 1899.
H. **Hankel**, Articolul *Grenze* în: *Ersch u. Grubers Realencyclopädie*.
F. **Klein**, *Autographierte Vorlesung über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig, 1902, = *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Bd. III, Berlin, 1928.
E. **Kossak**, *Die Elemente der Arithmetik*, Berlin, 1872 (Asupra fundamentării teoriei numerelor reale de către **Weierstrass**).
M. **Pasch**, *Grundlagen der Analysis*, Leipzig u. Berlin, 1909.
— *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Leipzig, 1882.

C. *Teoria mulțimilor*

A. **Fraenkel**, *Einleitung in die Mengenlehre*, 2. Aufl., Berlin, 1928.
— *Abstract set Theory*, Amsterdam, 1953 (cu bibliografie abundentă).

Cercetarea fundamentelor matematicii în secolul al XX-lea

Lucrări cu conținut mai general, parțial filozofic

P. **Natorp**, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig, 1910.
O. **Hölder**, *Die mathematische Methode*, Berlin, 1924.
H. **Weyl**, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Teil I., *Handbuch der Philosophie*, hersg. v. Bäumler u. Schröter, München, 1926; ediția mărită în l. engleză, Princeton, 1949.
O. **Becker**, *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*, Halle a. S. 1927; de asemenea, în „Jahrb. f. Philos. u. phänomenolog. Forsch.", Bd. VIII.
**Stephan Körner*, *Introducere în filozofia matematicii*, traducere de Al. Giuculescu, Editura Științifică, București, 1965.

Lucrări cu caracter special

A. *Logicismul*

G. **Frege**, *Begriffsschrift*, Halle a. S., 1879.
— *Die Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich dargestellt*, Jena, Bd. I, 1893, Bd. II, 1903.
G. **Peano**, *Formulaire de mathématique*, 5 vol., Turin, 1895—1908.
B. **Russell**, *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, în „Proceed. London Math. Soc." (2), vol. 4, 1907, pp. 29—53.

— *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, în: „Americ. Journ. of Math.", vol. 30, 1908, pp. 222—262.

— *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919; traducere în l. germană de Gumbel și Gordon, München, 1922;

* traducere în l. franceză de G. Moreau, Payot, Paris, 1928.

L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, New York, 1922.

B. *Intuiționismul*

Arnold Schmidt, *Wie dürfen wir mit dem Unendlichen umgehen ?* Math.-physik. Semin.-Ber., hrsg. Behnke u. Lietzmann, Bd. I, pp. 202—212, Göttingen, 1950 (caracter introductiv).

* E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1914.

L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam u. Leipzig, 1907.

— *De onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor wijsbegeerte, Bd. 2, 1908.

— *Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde*, Nederl. archief voor wiskunde (2), Bd. 12, 1918.

— *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*, în: „Jahresb. d. deutsch. math. Vereinig.", Bd. 33, 1925.

— *Über Definitionsbereiche von Funktionen*, în: „Math. Ann.", Bd. 97, 1921.

— *Wissenschaft, Mathematik und Sprache*, în: „Monatshefte f. Math. u. Physik, Bd. 36, 1929, pp. 153—164.

A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Die formalen Regeln der intuit. Mathematik*, Ber. d. Preuss, Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1930, pp. 42—56, 57—71, 158—169.

— *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Bd. 3, Heft 4, Berlin, 1934.

H. Weyl, *Das Kontinuum*, Leipzig, 1918 („semiintuiționist").

C. *Teoria demonstrației* (formalismul și logistica)

A. Church, *Bibliografia logisticii și cercetării fundamentelor*, în: „Journal of Symbolic Logic", vol. I, caietul 4 (continuare în volumele ulterioare), Baltimore, începînd din anul 1936.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (ediție nouă), Bd. I, I. Teil, Heft 1; aici Teil I: H. Hermes und H. Scholz, *Mathematische Logik*, Leipzig, 1952; Teil II: Arnold Schmidt, *Mathematische Grundlagenforschung*, Leipzig, 1950 (expunere rezumativă cu amplă bibliografie).

D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Berlin, 1935.

— *Grundlagen der Geometrie* (7. Aufl.) Anhang VI—X.

— *Über das Unendliche*, în: „Math. Ann.", Bd. 95, 1926, pp. 161—190, text complet.

— *Beweis des „Tertium non datur"*, Göttinger Nachr., math.-phys. Kl., 1931, pp. 120—125.

— D. Hilbert u. P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I și II, Berlin 1934 și 1939; completare în:

W. Ackermann, *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie*, în „Math. Annalen", Bd. 117, 1940, pp. 162—194.

K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I, în: „Monatsch. f. Math. u. Physik", Bd. 38, 1931, pp. 173—198.

G. Gentzen, *Die gegenwärtige Lage der math. Grundlagenforschung. — Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie,* în: ,,*Forsch. zur Logik u. zur Grundleg. d. exakten Wiss.*", Heft 4, Leipzig, 1938.

W. Ackermann, *Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse,* în: ,,Math. Zeitschr.", Bd. 53, 1951, pp. 403—413.

P. Lorenzen, *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände,* în: ,,Journal of Symbolic Logic", Bd. 16, 1951, pp. 81—106.

— *Über endliche Mengen,* în: ,,Math. Ann.", Bd. 123, 1951, pp. 331—338.

— *Mass und Integral in der konstruktiven Analysis,* în: ,,Math. Zeitschr.", Bd. 54, 1951, pp. 275—290.

W. Ackermann, *Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik,* I u. II, în: ,,Math. Zeitschr.", Bd. 55, 1952, pp. 364—84 şi Bd. 57, 1953, pp. 155—166.

E. Stenius, *Das Interpretationsproblem der formalisierten Zahlentheorie und ihre formale Widerspruchsfreiheit,* Acta Acad. Aboensis math. et. phys. XVII, 3, Abo 1952, pp. 1—102.

G. Kreisel, *On the interpretation of nonfinitist proofs,* în: ,,Journal of Symbolic Logik", vol. 16, 1951, pp. 241—267; vol. 17, 1952, pp. 43—58.

D. *Completare*

a) *Lucrări moderne de sinteză*

W. V. Quine, *Mathematical Logic,* revised edition, Cambridge, Mass., 1951.

S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics,* Amsterdam-Groningen, 1952.

P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik,* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

— *Metamathematik,* Mannheim, 1962.

A. Heyting, *Intuitionism,* Amsterdam, 1956.

A. A. Fraenkel, Y. Bar Hillel, *Foundations of Set Theory,* Amsterdam, 1958.

P. Bernays, A. A. Fraenkel, *Axiomatic Set Theory,* Amsterdam, 1958.

E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics,* Amsterdam, 1959.

K. Schütte, *Beweistheorie,* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

Hao Wang, *Survey of Mathematical Logic,* Amsterdam-Peking, 1963.

G. T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics,* London, 1963.

W. V. Quine, *Set Theory and its Logic,* Cambridge, Mass., 1963.

J. van Heijenoort, (Edit.), Source Book in Mathematical Logic 1879—1931, Cambridge, Mass., 1964.

b) *Unele lucrări cu caracter mai special*

R. L. Goodstein, *Recursive Number Theory,* Amsterdam, 1957.

— *Recursive Analysis,* Amsterdam, 1961.

A. Mostowski, *Sentences Undecided in Formalized Arithmetic,* Amsterdam, 1952.

W. Stegmüller, *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit,* Wien, 1959.

H. Hermes, *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit,* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.

L. Wette, *Von operativen Modellen der axiomatischen Mengenlehre,* în volumul colectiv: *Constructivity in Mathematics,* ed. A. Heyting, Amsterdam, 1959, pp. 166—177.

K. Schütte, *Logische Abgrenzungen des Transfiniten,* în: *Logik und Logikkalkül,* Festschrift für W. Britzelmayr, Freiburg-München, 1962, pp. 105—114.

INDEX DE NUME

Cifrele cursive indică paginile unde autorii au fost citați textual.

Abel Niels Hendrik (1802—1829), (noțiunea riguroasă de convergență), 245, 329
Ackermann Wilhelm (născut 1896), (necontradicția aritmeticii), 413, 429
Al—Chajjami (1044—1123), (comentator al lui Euclid), 105
d'Alembert Jean Baptiste le Rond (1717—1783) 250
Alexandru din Afrodisia (aprox. 200 e.n.), (comentator al lui Aristotel) *66, 104*
Al—Māhāni (decedat între 874 și 884), (comentator al lui Euclid) *105*
Amonios Hermeiou (aprox. 500 e.n.), (comentator al lui Aristotel) 67, 71, *71*, 117
Amfinom (nu se cunoaște cînd a trăit), (existența matematică prin construcții) 124
Anaxagora din Clazomene (500?—428), (cvadratura cercului) *63*
An—Nairīzī, lat. *Anaritius* (în jurul anului 900), (comentator al lui Euclid) 40, 105
Antifon Sofistul (secolul al V-lea î.e.n.), (cvadratura cercului) 63—66
Apastamba (secolul al V-lea î.e.n.?), (geometru hindus) *33 și urm*, *37*
Apollonios din Perga (secolul al III-lea î.e.n.), (problemele fundamentelor, teoria iraționalităților de ordin superior) 70, 129
Arhimede din Siracuza (287?—212), (integrări prin metoda atomistă și prin metoda riguroasă) 38, 66, *77—86*, 107, 162—164, 171, 194, 235 și urm., 386
Archytas din Tarent (în jurul anului 400), (filozof pitagoreic, problema din Delos) *100*, 101, *114—116*, 117, *131 și urm.*
Argand Jean Robert (1768—1822), (reprezentarea geometrică a numerelor imaginare) 242
Aristeu din Crotona (secolul al IV-lea î.e.n.), (teoria secțiunilor conice) 101
Aristotel din Ștagira (384—322), (teoria abstractă a matematicii; infinitatea și continuitatea) 43, *45 și urm.*, 49, 54, *58*, *68*, 86, *86—98*, *102*, *104*, *106*, *107*, *120—122*, 124, 129, *132—134*, 141, 142, *143—146*, 153 și urm., 171, 304, 318—320, 322, 333, 407, 412

Barrow Isaac (1630—1677), (precursorul calculului fluxiunilor) 156, 171, 172, *173 și urm.*, 177
Bayle Pierre (1647—1706) 195
Berkeley George (1685—1753), (filozof și teolog, adversar al calculului fluxiunilor) *183—186*, 321.

Bernays Paul (născut în 1888), (problemele fundamentelor, colaborator al lui Hilbert) 423
Bernoulli Daniel (1700—1782), (noțiunea de funcție arbitrară) 248
Bernoulli Johann (1667—1748) 249
Bernstein Felix (născut în 1878) 338, *347*
Bessel Friedrich Wilhelm (1784—1846) *206 și urm.*
Bolyai János (1802—1860), (geometria neeuclidiană) 197, 213
Bolzano Bernhard (1781—1848), (demonstrația propoziției despre valoarea intermediară) 245, *246—247*, 253, *304—308*, 338
Boole George (1815—1864), (întemeietorul calculului logic în secolul al XIX-lea) 349
Borel Émile (1871—1956), (fundamentele teoriei mulțimilor) *360—361*
Brouwer Luitzen Egbertus Jan (născut în 1881), (întemeietorul neointuiționismului) *361—366*, 366 și urm., 368, 377 și urm., 380—383, 401, 413, 430
Bruno Giordano, (1548—1600) 320
Bryson din Heracleia (în jurul anului 410 î.e.n.), (cvadratura cercului, principiul continuității) 66—68, 72, 117
Burali-Forti Cesare (1861—1931), (paradoxul celui mai mare număr ordinal) 338, 347, 357 și urm., 418

Campanus Ioannes din Navarra (în jurul anului 1260), (comentator al lui Euclid) *72*
Cantor Georg (1845—1918), (întemeietorul teoriei mulțimilor) 91, 265, 270, 272, *274 — 280*, 301 — 303, *308—346*, 346 și urm., 356, 359, 393, 402, 414, 417, 437
Cauchy Augustin Louis (1789—1857), (fundamentarea riguroasă a analizei) 247, 252, 329, 375
Cavalieri Bonaventura (1598?—1647), (teoria indivizibilelor) 172
Cayley Arthur (1821—1895), (determinarea proiectivă a măsurii) 222 și urm.
Chou Pei Suan King (probabil în jurul anului 1000 î.e.n.), (calendar chinez antic) 40
Commandino Federigo (1509—1575) 171
Conon (secolul al III-lea î.e.n.) 82

Dedekind Julius Wilhelm Richard (1831—1916), (fundamentarea logică a aritmeticii, teoria numerelor iraționale) *253—274*, 276, 279, 329, 338—347, *348*, 359, 368, 374 și urm., 387, 393, 403, 412
Democrit din Abdera (sfîrșitul secolului al V-lea și începutul secolului al IV-lea), (matematica atomistă) 77, *78*, 161, 171, 324, 333
Descartes René (1596—1650), (creatorul geometriei analitice) 156, 164, *165—171*, 171, 195, 234, 248, 321
Dingler Hugo (1881—1954), (bazele geometriei „tehnice" aplicate) 236, *238—241*
Dini Ulisse (1845—1919) 265
Diofant din Alexandria (în jurul anului 200 e.n.) *17*
Dirichlet Peter Gustav Lejeune (1805—1859), (teoria seriilor trigonometrice, noțiunea de funcție) 248, 252 și urm., 329, 376, 431
Dositheos (secolul al III-lea î.e.n.) 82 și urm.
Dubois-Reymond Paul (1831—1889), („metafizica" mărimii, limitei, argumentului și funcției) *280—302*

Einstein Albert (1879—1955) 409
Epiharm din Siracuza (în jurul anului 500 î.e.n.) 57, *58*
Epicur (341—271) 333
Eratostenes din Alexandria (aprox. 275—195) 77—78, 79
Eudemos din Rodos (secolul al IV-lea î.e.n.), (primul istoric al matematicii) 43, 49—54, 110, 114—116
Eudoxos din Cnida (secolul al IV-lea î.e.n.), (demonstrații prin metoda exhaustiunii, teoria generală a proporțiilor, axioma „arhimedică") 74—76, 77, 84, 103, 106—110, 141, 266.

Euclid din Alexandria (în jurul anului 300 î.e.n.), (autorul *Elementelor*) 30, *31*, 42 și urm., *46 și urm.*, *59—61*, *73—77*, *101*, 103, 104, *106—113*, 114, 118, 122 și urm., 130, 171, 196—199, 202 și urm., 206—211, 212, 213 și urm., 219, 222 și urm., 234, 265—273, 374 și urm., 404 și urm.
Euler Leonhard (1707—1783), (noțiunea de funcție) 247—253, 286, 431
Eurytos (secolul al V-lea î.e.n.) 54
Eutokios din Ascalon (născut în 480 e.n.), (comentator al lui Arhimede) *114—116*

Fermat Pierre (1601—1665) (geometrie analitică, calcul infinitezimal), 156, 164
Fourier Jean Baptiste Joseph (1768—1830), (serii trigonometrice) 248, 251, 252
Frege Gottlob (1846—1925), (fundamentarea logică a aritmeticii) 273, 349, *350—354*, 356, 387, 393, 403
Freudenthal Hans 36
Fuchs Immanuel Lazarus (1833—1902) 329

Galilei Galileo (1546—1642), (reprezentarea grafică a accelerației, probleme infinitezimale) 158, *160—161*, 171, 172, 304
Galloys Jean (1632—1707) 192
Gauss Carl Friedrich (1777—1855), (planul numerelor complexe, geometrie neeuclidiană) 197, *206—211*, *242—245*, 245, 286, 329
Geminos din Rodos (în jurul anului 75 e.n.), (filozof istoric, problemele fundamentelor) 129, 130, 196, 197
Gentzen Gerhard (1909—1945), (demonstrația necontradicției aritmeticii) 414, 417, *418—423*, 429
Gödel Kurt (născut 1906), (logistică și problemele fundamentelor) 414, 423, *433—436*, 437
Grassmann Hermann Günther (1809—1877), (geometrie n-dimensională, teoria „extinderii liniare") 203, 274
Gregorius a S. Vicentio (1584—1667) 172

Haller Albrecht von (1708—1777) 320
Halley Edmond (1656—1742) 183
Hankel Hermann (1839—1873), („principiul permanenței legilor formale", numere complexe superioare, noțiunea de funcțiune) 247, *248—253*, 302
Hausdorff Felix (1868—1942), (teoria mulțimilor) 338
Heath Sir Thomas 106—110
Heine H. Eduard (1821—1882) 270
Helmholtz Hermann von (1821—1894), (teoria cunoașterii, bazele geometriei) *222*, *241*, 392
Herakleides Pontikos (secolul al IV-lea î.e.n.) 141
Hermite Charles (1822—1901) 329
Heron din Alexandria (sfîrșitul secolului I e.n.), (cvadraturi și cubaturi atomiste) 39, 77, *78—79*, 161, 171
Heyting Arend (născut în 1898), (logician intuiționist) 366, 367, 423, 424
Hilbert David (1862—1943), (bazele geometriei, demonstrația necontradicției aritmeticii, metoda „metamatematică") 202, 222, 230, *231—238*, 338, 362, 383, *384—387*, 391, *392—413*, 423, 424
Hippias din Elis (secolul al V-lea î.e.n.), (sofist, a descoperit cvadratricea) 114
Hipocrat din Chios (în jurul anului 440 î.e.n.), (primul autor de *Elemente*, reducerea problemelor delice, cvadratura „lunulelor") *49—54*, *101*, 110, 114
Hobbes Thomas (1588—1679) 321
Hofmann J. E. 57
Homer (Odiseea IV, 412) 43
Hume David (1711—1776) 351
Husserl Edmund (1859—1938) *414—417*
Huygens Christian (1629—1695) 194

Iamblichos din Chalkis (283?—330) (neoplatonician și neopitagoreic) *101*

Jakobi Carl Gustav Jakob (1804—1851) 329

Kant Immanuel (1724–1804), (schița unei geometrii n-dimensionale, spațiul ca formă apriorică a intuiției) 203, *204–206*, 211, 323, 335, 403
Kepler Johannes (1571–1630), (integrări atomiste) *161–164*, 171
Klein Felix (1849–1925), (necontradicția geometriei neeuclidiene, interpretarea ei proiectivă și din punctul de vedere al teoriei invarianților) 222, *223–227*
Kolmogorov Andrei Nicolaevici (născut în 1903), (logica intuiționistă) 366, *367*, 423, 424
König Julius (1849–1913), (logică și teoria mulțimilor) 401
Kossak Ernst August Martin (1839–1892) 274
Kronecker Leopold (1823–1891), (aritmetizarea întregii matematici) 329, *359–360*, 392, 401, 407
Kummer Ernst Eduard (1810–1893), (numere „ideale") 329, 407, 412

Lagrange Joseph Louis (1736–1813) 245
Lambert Johann Heinrich (1728–1777), (precursorul geometriei neeuclidiene, definiții implicite) *201–203*, 206, 227, 231,
Lebesgue Henri (1875–1941) 437
Legendre Adrien Marie (1752–1833), (bazele geometriei) 214
Leibniz Gottfried Wilhelm (1646–1716), (calcul diferențial, calcul logic) 91, 172, 180, 186 *187–195*, *242*, 323–326, 349, *350*, 353, 387, *388–391*
Leon (secolul al IV-lea î.e.n.), (autor de *Elemente* din epoca lui Platon) 111, 118
Leucip (secolul al V-lea î.e.n.) 333
Lie Sophus (1842–1899), (fundamentarea geometriei din punctul de vedere al teoriei grupurilor) 222
Lipschitz Rudolf Otto (1832–1903) 266–273, 275
Lobacevski Nicolae Ivan (1793–1856), (geometrie neeuclidiană) 197, 213
Locke John (1632–1704) 321
Löwenheim Leopold (născut în 1878), (logistică) 437
Lorenzen Paul (născut în 1915), (necontradicția aritmeticii și analizei) 423, *424–432*, 437
T. Lucretius Carus (97–55) 333

Maier Anneliese 304
Malebranche Nicole (1638–1715) 195
Maurolico Francesco (1494–1575) 171
Menaichmos (secolul al IV-lea î.e.n.), (concepția operativă a geometriei) 123, 125
Meyer Ludwig (1630–1681) 321
Müller J. H. Fr. (1797–1862) 274

Neper John (1550–1617) 171
Neugebauer Otto 22 și urm.
Neumann Johann von (1903–1957) 346, 347, 356, 414
Newton Isaac (1643–1727), (calculul fluxiunilor, noțiunea de limită) 171, 172, *173–183*, 184–186, 220, 245, 286
Nicolaus Cusanus (1401–1464) 320
Nikomachos din Gerasa (în jurul anului 100 e.n.) 101
Noether Emmy (1882–1935) 347

Oinopides din Chios (secolul al V-lea î.e.n.), (construcție cu rigla și compasul) 114
Oresmus Nicolaus (1323?–1382), (reprezentarea grafică a funcțiilor), *156–160*, 161, 171

Parmenide (în jurul anului 500 î.e.n.) 97
Pascal Blaise (1623–1662), (precursorul calculului diferențial) 23, 172, *186*
Pasch Moritz (1843–1930), (axiomatica geometriei) 202, 227, *228–230*
Peano Giuseppe (1858–1932), (calcul logic, axiomatica numărului) 427
Philolaos din Tarent (mort în jurul anului 390 î.e.n.), (filozofia numărului) 57, *58*, 101, 102, *130–131*

Philoponos Ioannes (secolul al VI-lea e.n.), (comentator al lui Aristotel) *65—68*, 71, *117*
Platon (428—348), (Matematica — „știință ideală") 42, 43, *68—69*, 89, 97, 100, *101—102*, 103, 111, *118—119*, 133—134, *134—142*, 147, 150, 151, 320
Plooij E. B. 105
Plutarh din Cheroneia (46?—120?) 58
Poincaré Jules Henri (1854—1912), (axiomele sînt convenții) *237—238*, 329
Proclos Diadochos (410—485) (comentator neoplatonic al lui Euclid) *67—71*, 117, *122—130*, *146—154*, 171, *196——198*, *303—304*
Ptolemaios Klaudios din Alexandria (în jurul anului 150 e.n.), (încercare de demonstrare a postulatului al 5-lea al lui Euclid) 162, 197
Pitagora din Samos (mort în jurul anului 500) 101
Pitagoreicii (secolele V—IV î.e.n.), 42, 54—62, 130—134

Riemann Bernhard (1826—1866), (teoria unei varietăți n-dimensionale, geometrie neeuclidiană) 203, *213——221*, 222, 252, 329
Roberval Giles Personne, de (1602—1675), 172
Russel Bertrand născut în 1872), (reducerea matematicii la logică, teoria paradoxurilor logice ale teoriei mulțimilor, definiția logică a numărului) 273, *354—359*, 387, 429, 437

Saccheri Girolamo (1667—1733), (precursor al geometrilor neeuclidieni), 199, *200*, 201
Schelling Friedrich Wilhelm Joseph (1775—1854), (reflecțiile transfinit iterate) 417, *418*
Schumacher Heinrich Christian (1780——1850), *207*, 208—211
Schweikart Ferdinand Karl (1780——1857), (geometru neeuclidian) 206
Sextus Empiricus (în jurul anului 150 e.n.), (producerea structurilor matematice prin „curgere"; filozof sceptic) 171
Simplicius (secolul al VI-lea e.n.), (comentator al lui Aristotel) *49—54*, *64—65*, *71*, 141
Skolem Thoralf (născut în 1887), (logistică; teoria recursivă a numerelor) 437
Sosigenes (secolul I î.e.n.) 141
Speusip din Atena (secolul al IV-lea î.e.n.) 124 și urm.
Spinoza Baruch, de (1632—1677), 321—323
Stevin Simon (1548—1620) 171
Stobeu Ioannes (secolul al V-lea e.n.) 58
Struve W. W. 38

Tannery Paul 44
Taurinus Franz Adolf (1794—1874), (geometru neeuclidian) 211—213
Tales din Milet (în jurul anului 600 î.e.n.) 42, 44—49
Themistius (320?—390?) *65*, *67*
Teodoros din Cirene (secolele V—IV î.e.n.) 103, 104
Theudios din Magnezia (secolul al IV-lea î.e.n.), (autor de *Elemente* din școala platonico-aristotelică) 111, 118
Toma din Aquino (1225—1274) 333
Thureau — Dangin F. 36
Timaios din Locra (secolul al V-lea î.e.n.) 101

Valerio Luca (1552? — 1618) 171
Varignon Pierre (1654—1722), *192*, 193—195
Viète François (Vieta), (1540—1603), (limbajul formulelor algebrice) 155

Wallis John (1616—1703), (bazele geometriei, reprezentarea geometrică a imaginarelor) *198—199*, 242
van der Waerden, B. L. 36, 84—86, 101, 116—117
Weber Heinrich (1842—1913) 273—274, 275

Weierstrass Karl Theodor (1815—1897), (teoria numerelor iraționale, fundamentarea riguroasă a analizei) 265, 274—277, 329

Wessel Caspar (1745—1818), (reprezentarea geometrică a numerelor imaginare) 242

Weyl Hermann (1885—1955), (problema spațiului, intuiționism) 222, *368—383*, 401, 429, 430

Whitehead Alfred North (1861—1947), (fundamentarea logică a matematicii) *356—359*

Zenon din Eleea (secolul al V-lea î.e.n.), (noțiunea de infinit mic, paradoxurile mișcării) *62—63*, 97—99.

Zermelo Ernst (1871—1953), (axiomatizarea teoriei mulțimilor) *346*, 387, 437

Zeuthen Hieronymus Georg 104, 113.

INDEX DE NOȚIUNI

abstracție (*aphairesis*) 142—146
alefuri (Cantor) 339—344
analitică, geometrie ~ 164—171
analizei, fundamentarea ~ 245—302
—, necontradicția ~ 429—432
antanairesis (*antyphairesis*) 103—105
antinomii (vezi paradoxe)
argument, conceptul de ~ 298 și urm.
aritmeticii, necontradicția ~ 394—401, 414, 418 și urm, 423—429
asemănare 38, 198—199, 209
axiomatică 110—113, 120—130, 202—203, 227—238, 384
axiomele aritmeticii 384—387
— geometriei 99—113, 202—203, 227—238
— și postulatele 126—130

babiloneană, algebra ~ 26—37
— geometria ~ 39
bazele analizei 245—302
— aritmeticii 242—245
— geometriei 196—242
— teoriei mulțimilor 302—348

Cavalieri, principiul lui ~ 77—79, 171—172
Cayley, determinarea măsurii lui ~ 223—225
caracteristica generală (cuvinte și lucruri) 387—391
coarda și săgeata (babiloneană) 41
completitudine 230—235, 255, 258, 268—269, 271—273, 301—302, 386
condensarea singularităților 303
constructivă, fundamentarea ~ a matematicii 423—429
contingență, unghiul de ~ 69, 71—74
continuitatea în antichitate (Aristotel) 91—97
continuității, principiul ~ (al valorii intermediare) 66—74
continuul, definiția lui Cantor despre ~ 333—339
—, ca mediu al devenirii libere 376—380
convenționalism (Poincaré) 237
convergența dreptelor (Geminos) 196—198
— seriilor 245—247
corniforme, unghiuri ~ (vezi contingență, unghiuri de ~)
„creațiile spiritului omenesc" (Dedekind) 263, 267, 273—274
cvadratura cercului 63—68, 74—77
— lunulelor 49—54
— parabolei 79—81, 84—86
cubaturi 77—78, 81—82, 161
cubului, dublarea ~ (vezi delică, problema ~)
cuvinte și lucruri (vezi caracteristica)
cvadratricea 113

definiții euclidiene 59, 106—107, 111—112
— implicite 202, 231
delică, problema ~ (dublarea cubului) 114—117
delimitant și nelimitat 101—102, 130—132

demonstrației, teoria ~ 387, 391—414, 418—429
diferențială, conceptul de ~ 192—195
difformiter difformis 157

ecuații cubice 35
— cvadratice 26, 29—36
— liniare 26—29
egipteană, algebra ~ 24 și urm.
—, geometria ~ 37 și urm.
—, tehnica de calcul ~ 20 și urm.
elemente, autorii de ~ 110 și urm., 118
Elementele matematicii (Proclos) 122—130
Erlangen, Programul de la ~ (F. Klein) 225—227
Euclides ab omni naevo vindicatus (Saccheri) 199 și urm.
excentrică, mișcare ~ (Kepler) 161—164
exhaustiunii, demonstrații prin metoda ~ 74—77, 84—86
existența matematică 113, 118—122, 124—127, 129

formulă matematică 155
fluxiunilor, calculul ~ (fluentă, fluxiune) 172—183
— critica calculului ~ 183—186
„frumusețea matematicii" (după Aristotel) 153
fundamentale, șiruri ~ (Cantor) 277
funcție, conceptul de ~ 156, 247—253, 431
funcții algebrice 251
— analitice 251
— anortoide 295
— discontinue 360—361
— nediferențiabile, vezi anortoide
— nelegitime 251
— transcendente 251
funcțiilor, reprezentarea grafică a ~ 156—160

generală, știința matematică ~ 144, 149—150
geometrie euclidiană 110—113, 231—234
— nearhimedică 285—286
— neeuclidiană 196, 201, 206—211, 218, 222—225, 234
— proiectivă 222—225
— tehnică 238—241
grupuri geometrice (F. Klein) 225—227

hexagon regulat 48
hiperfuncții, hipermulțimi, hiperreale (numere, straturi ~) 429, 432

ideale, elemente ~ 406—408
— enunțuri ~ 406—408, 411
— numere ~ 329, 406, 412
imaginară, sfera ~ 201—202
imaginare, numere ~ 242—245, 406
incomensurabilitate 61, 102—105, 257
inconsistente, mulțimi ~ 339—348
indivizibile 171—172, 179
infinit (în act și potențial) 86—91, 287—288, 315, 318—327, 348, 369, 422—423
infinit, punctul de la ~ 314—315
infinit mic 62—63, 171—172, 178—180, 183—186, 192—195, 235—236, 287—288, 296, 316
infinitezimal, calcul ~ 171—195
infinitezimale, mărimi ~ (în antichitate) 62—86
intensio 156
integral, calcul ~ 182
integrări antice 77—86
intermediară, propoziția despre valoarea ~ (Bolzano) 245—246
intuiționismul 359—383
ipoteză, conceptul de ~ 118—124
ipotezele care stau la baza geometriei 213—222
iraționale, numere ~ 253—280, 282, 288—290, 292, 300, 359, 368, 375, 376—380
iraționalitatea rădăcinilor pătrate 61, 104

înclinare (pantă; preelenă) 39, 47

liberă, matematică ~ 328
limită, conceptul de ~ 24, 62—68, 76, 86, 158, 178—179, 193—194, 245—247, 277—279, 282—287, 292—293, 297—298

superioară şi inferioară 253, 281—287, 370, 376, 432
lunulelor, cvadratura ~ 49—54

maxime şi minime 187, 189
mărimi cu *n* dimensiuni 214—215
medii aritmetice, geometrice, armonice 23, 100
metafizica 130—134, 146 — 154
„metafizica" mărimii, limitei etc. 280—302
metamatematica 391, 402—414
metareguli 426
mişcare uniform accelerată 160—161
mulţimi bineordonate 340—342, 346—348, 357—358
mulţimilor, teoria ~ 299—348, 355—359, 360—363, 424—425

nearhimedică, geometrie (Hilbert) ~ 235—236
nearhimedice, sisteme de mărimi ~ (antichitate) 68—74
neeuclidiană, geometrie ~ (vezi geometrie ~)
nenumărabil (continuu) 301, 308—309
neointuiţionism 361—366
neoplatonism 122—130, 146—154
numărabil 308, 428
numărului, definiţia logică a ~ 349—355
— metafizica ~ (Philolaos) 58
numere ideale 329, 406
— imaginare 242—245, 406, 412
— iraţionale (vezi iraţionale, numere ~)
— naturale 369, 381—382
— transfinite 311—312, 330—333, 339—344
— şiruri de ~ 288—290, 362, 376—380

oblonge, numere ~ 55—56
observaţii de critică a textului 444—447
octogon semiregulat 38
ontologia obiectului matematic (vezi metafizica)

Pantahie (continuu numeric la du Bois Reymond) 299—302
parabolei, cvadratura ~ (vezi cvadratura)
paradoxele mişcării 97—99
— teoriei mulţimilor 303—308, 339—348, 357—359
paralelelor, postulatul ~ 113, 129—130, 196—203, 207—213, 219, 224, 231, 234, 240
pereche şi nepereche 57—61
permutarea mezilor proporţiei 106, 109
pictricele 54—57
pironismul 281
Pitagora, teorema lui ~ 40—41
pitagoreică, aritmetica ~ 54—62
pitagoreice, numere ~ 23
postulate şi axiome 126—130
postulatele existenţei 67—68, 76
principiile matematice 118—130
probleme şi teoreme 124—126
proporţiilor, teoria ~ la Eudoxos 106—110
— înainte de Eudoxos 101—106
propoziţia despre suma unghiurilor în triunghi 47—49
— despre unghiurile de la bază din triunghiul isoscel 45—47
— lui Löwenheim şi Skolem 437
— lui Tales 41, 44—45

relaţie, raport (Aristotel) 102

sacră, geometrie ~ la hinduşii antici 33
scena sclavului din „Menon" de Platon 134—141
scolie la lemele din „Principiile" lui Newton 178—180
semicercului, unghiul ~ 45, 47, 69, 71, 73
semicercurilor, paradoxul ~ (Proclos)
spaţiu, felurile posibile de ~ 205
spaţiu, teoria lui Kant despre ~ 204—206
spirala arhimedică 113, 128
straturi (logice) 432

tangenta 72—73, 181, 187—189
tangentei, problema inversă a ~ 156
tăietura lui Dedekind 259 şi urm.

tehnică, geometrie ~ 238—242
tertium non datur 363—368, 380—383
transcendentală, analiza ~ a spațiului (Kant) 205—206
transfinit, reflecție ~ iterată (Schelling) 418
transfinită, inducție ~ (Gentzen) 420—423
transfinite, enunțuri ~ (Hilbert) 405—406
transfinite, numere cardinale (vezi alefuri)
—, numere ordinale 312—313, 329—333
triunghiulare, numere ~ 54—55

unghi, conceptul de ~ 47, 69—71
unghi mixtiliniu (vezi unghiul semicercului şi unghi de contingență)
unghiurilor, suma ~ în triunghi (vezi propoziția despre ~)
uniformiter difformis 157

varietăți n-dimensionale 214 şi urm.
varietăților, teoria ~ (vezi teoria mulțimilor)

TABLA DE MATERII

Prefață la ediția română 5
Prefață 15
Observație preliminară 17

CAPITOLUL I

PRIVIRE ASUPRA FUNDAMENTELOR MATEMATICII PREELENE

A. Tehnica de calcul 20
- 1. Tehnica de calcul la egipteni 20
- 2. Tehnica de calcul la babiloneni 22

B. Algebra 24
- 1. Algebra egipteană 24
- 2. Algebra babiloneană 26

C. Geometria egipteană și babiloneană 37

CAPITOLUL II

FUNDAMENTAREA MATEMATICII ȘTIINȚIFICE DE CĂTRE GRECI

A. Începuturile matematicii grecești 43
- 1. Cifrele și calculul 43
- 2. Începuturile geometriei grecești 44
- 3. Eudemos despre cvadratura lunulelor la Hipocrat din Chios . . . 49
- 4. Aritmetica pietricelelor 54
- 5. Învățătura despre par și impar 57

B. Fundamentarea matematicii mărimilor infinitezimale 62
- 1. Primele considerații asupra infinitului mic (Zenon din Eleea, Anaxagora) 62
- 2. Problema cvadraturii cercului (Antifon, Bryson, Eudoxos) 63
- 3. Integrări prin metoda atomistă și prin metoda exhaustiunii (Democrit, Heron, Arhimede) 77
- 4. Analiza conceptului de infinitate și continuitate la Aristotel (infinitatea — continuitatea — paradoxele lui Zenon) 86

C. Teoria proporțiilor 99
1. Începuturile teoriei proporțiilor (Archytas ș.a.) 99
2. Teoria proporțiilor geometrice înainte de Eudoxos 101
3. Forma clasică a teoriei generale a proporțiilor la Eudoxos 106

D. Fundamentarea sistematică a matematicii grecești prin ea însăși . . . 110
1. Fundamentarea logică prin axiomatică 110
2. Sensul tehnic al conceptului de existență matematică în antichitate 113

E. Reflecția filozofică asupra fundamentării „elementare“ și asupra esenței matematicii 118

I. Probleme logice și metodice 118
1. Platon despre esența matematicii. 118
2. Aristotel despre structura unei științe „demonstrative" 120
3. Proclos despre conceptul de elemente și metoda „Elementelor" matematicii 122

II. Problema existenței obiectelor matematice 130
1. Primele idei asupra ontologiei obiectului matematic la pitagoreici 130
2. Platon despre sensul existențial al obiectului matematic 134
3. Caracterul „abstract" al obiectului matematic după Aristotel . . . 142
4. Filozofia neoplatonică a matematicii în Comentariul lui Proclos asupra lui Euclid 146

CAPITOLUL III

FUNDAMENTAREA MATEMATICII OCCIDENTALE MODERNE ÎN SECOLUL AL XVII-LEA

DESCOPERIREA ANALIZEI INFINITULUI 155

A. Etapele premergătoare calculului infinitezimal 156
(*Nicolaus Oresmus, Galilei, Kepler*)

B. Descoperirea geometriei analitice de către Descartes 164

C. Inventarea calculului infinitezimal 171
1. Metoda fluxiunilor 172
2. Un adversar al calculului fluxiunilor: Berkeley 183
3. Calculul diferențial al lui Leibniz. 186

CAPITOLUL IV

MATEMATICA CRITICĂ A SECOLULUI AL XIX-LEA

Secțiunea I 196
BAZELE GEOMETRIEI 196

1. Proclos despre postulatul al cincilea al *Elementelor* lui Euclid . . 196
2. Cum deduce John Wallis postulatul al cincilea din existența figurilor asemenea 198

3. *Euclid curățat de orice pată* de Girolamo Saccheri 199
4. Teoria liniilor paralele la Johann Heinrich Lambert 201
5. Teoria lui Kant despre spațiu 203
6. Descoperirea geometriei neeuclidiene de către Gauss 206
7. F. A. Taurinus în favoarea spațiului euclidian ca formă unică, apriorică, a simțului extern 211
8. B. Riemann despre ipotezele care stau la baza geometriei 213
9. Felix Klein: Demonstrația necontradicției geometriei neeuclidiene 222
10. *Programul de la Erlangen* al lui Felix Klein 225
11. Moritz Pasch și fundamentarea axiomatică a geometriei 227
12. *Bazele geometriei* de David Hilbert 230
13. Poincaré despre axiomele geometrice considerate convenții cu finalitate 237
14. H. Dingler despre construcția unei geometrii utilizabilă în tehnică 238

Secțiunea a II-a 242

BAZELE ARITMETICII, ANALIZEI ȘI TEORIEI MULȚIMILOR

A. Aritmetica 242
Leibniz și Gauss despre imaginare 242

B. Analiza 245
1. Demonstrația lui B. Bolzano pentru teorema valorii intermediare 245
2. Evoluția conceptului de funcție după H. Hankel 247
3. Teoria lui R. Dedekind despre numerele iraționale 253
4. Definiția numerelor iraționale dată de G. Cantor 274
5. P. du Bois-Reymond: „Metafizica și teoria conceptelor fundamentale matematice: mărime, limită, argument și funcție" 280

C. Teoria mulțimilor 302
1. Proclos despre un paradox al infinitului 303
2. Din *Paradoxele infinitului* de B. Bolzano 304
3. Georg Cantor: Teoria mulțimilor 308
(*Numerele algebrice sînt numărabile, continuul nu este o mulțime numărabilă; prima introducere a numerelor transfinite; bazele unei teorii generale a varietăților; multiplicități „inconsistente"; J. v. Neumann despre mulțimile „prea mari"; cum își reprezentau Dedekind și Cantor o mulțime infinită; „demonstratia" lui Dedekind pentru existența mulțimilor infinite*)

CAPITOLUL V

CERCETAREA FUNDAMENTELOR ÎN SECOLUL AL XX-LEA

A. Logicismul 349
1. Critica lui G. Frege relativă la o demonstrație a lui Leibniz și definiția conceptului de număr prin mijloace pur logice 349
2 Definiția logică a numărului dată de B. Russell 354
3. B. Russell: Antinomiile teoriei mulțimilor și rezolvarea lor prin teoria tipurilor logice 355

B. Intuiționismul 359
1. L. K. Kronecker, adversar al utilizării numerelor iraționale și a definițiilor nedecidabile 359
2. Criticile lui É. Borel împotriva conceptului de funcție discontinuă generală 360
3. „Neointuiționismul" lui L. E. J. Brouwer (Teoria intuiționistă a mulțimilor și obiecțiile împotriva folosirii nelimitate a principiului logic al terțului exclus) 361
4. Logica lui Brouwer ca un „calcul al problemelor". Interpretarea lui A. Kolmogorov 366
5. H. Weyl despre „Criza fundamentelor matematicii" (Semiintuiționismul și intuiționismul) 368

C. Teoria demonstrației (formalismul) 383
1. Definiția axiomatică a numărului dată de D. Hilbert 383
2. Cîteva observații ale lui Leibniz asupra „Caracteristicii" (semn și lucru) 387
3. Primele încercări ale lui Hilbert pentru demonstrația necontradicției aritmeticii 391
4. Extrase caracteristice din lucrările de maturitate ale lui Hilbert asupra teoriei demonstrației („metamatematica") 402
5. E. Husserl despre treptele noetico-noematice și caracteristica lor 414
6. Schelling despre reflecțiile transfinite 418
7. Demonstrația lui Gentzen despre necontradicția aritmeticii 418
8. P. Lorenzen: Fundamentarea constructivă a matematicii 423
9. Demonstrația necontradicției analizei la Lorenzen 429

Anexă 433
Încheiere 437
Index de surse 439
Observații 444
Bibliografie 449
Index de nume 457
Index de noțiuni 463

ERATĂ

Pag.	*Rîndul*	*În loc de*	*Se va citi*
25	5 de sus	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
127	8 de jos	*diatum*	*datum*
136	10 de sus	cum	acum
148	2 de sus	πò	τò
155	5 de jos	*A, B, C, D*	*B, C, D,*
170	9 de sus	*o*	*c*
185	11 de jos	nu *o* este nimic,	*o* nu este nimic.
232	16 de jos	$(u : x : w)$	$(u : v : w)$
343	11 de sus	$\Sigma\aleph_{\omega_0}$	$\Sigma\aleph_{\nu_0}$
345	8 de jos	$<$	$>$
421	12 de jos	număr“.	număr ε“.

O. Becker „Fundamentele matematicii”

Redactor responsabil: NECHITA DINU IOANIȚIU
Tehnoredactor: GHEORGHE POPOVICI

Dat la cules 13. 01. 1968. Bun de tipar 5. 08. 1968. Apărut 1968. Tiraj 5.000+140+20 ex. legate. Hîrtie scris II A de 63 g/m^2*. Format 610×860/16. Coli editoriale 29,05. Coli tipar 29,50. A. 18.598/1967. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari 51, pentru bibliotecile mici 51.*

Întreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5–7,
Comanda nr. 134.

Lei 21,—